دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال پنجم، شماره هفدهم، فروردین و اردیبهشت ۱۳۹۸
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

ضربگرها و کاربرد آنها در مهندسی زلزله

مرجان ادیب *

استادیار گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۶/۰۹/۲۶ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۷/۱۰/۱۶

چکیده

در این مقاله به مطالعه ضربگرها روی جبرهای باناخ پرداخته و در این راستا نتایج جدیدی چون ارتباط میانگین پذیری و منظم آرنز بودن جبر ضربگرها را با جبر باناخ اولیه بیان می‌کنیم. همچنین ارتباط میان ضربگرهای جردن و ضربگرها را بیان و تلاش می‌شود که با ارائه یک مثال به تبیین نتیجه بدست آمده بپردازیم. در آخر، با استفاده از قضیه ۲، کاربرد ضربگرها را در تئوری سیگنال‌ها و مهندسی زلزله بررسی می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: ضربگر، ضربگر جردن، جبر باناخ بدون مرتبه، جبر باناخ منظم آرنز.

*. عهده‌دار مکاتبات: Email:m.adib.pnu@gmail.com

۱– مقدمه

ضربگرها کلاسی از عملگرها هستند که با توجه به ارتباط و وابستگی آنها با سایر مفاهیم ریاضی از جمله میانگین پذیری در آنالیز هارمونیک، احتمال، تئوری بهینه سازی، معادلات دیفرانسیل، تئوری سیگنال‌ها، آنالیز مالی و اقتصاد، این مفهوم مورد توجه بسیاری از ریاضی دانان قرار گرفته است.

نظریه ضربگرها اولین بار توسط وندل در سال ۱۹۵۲ در مورد ضربگرهای جبر گروهی مطرح و بعد از آن توسط هلگاسون در سال ۱۹۵۶، به عنوان یک تابع پیوسته و کراندار با خاصیت، روی فضای ایده آل‌های ماکسیمال جبر باناخ تعریف شد. صورت کلی ضربگرها روی جبرهای باناخ بدون مرتبه، توسط وانگ در سال ۱۹۶۱ در تعریف ۱ آورده شده است. بعد از آن، تئوری ضربگرها و ضربگرهای دوتایی روی جبرهای توپولوژیک، بوسیله جانسون و حسین توسعه پیدا کرد. خان طی دو مقاله [۴] و [۵]، به مطالعه دقیق ضربگرهای دوتایی و مدول هومومورفیسم‌ها روی جبرهای توپولوژیک پرداخته و نتایجی را بدست آورده است.

ما نیز بعنوان توسیعی از مفهوم ضربگرها روی جبرهای باناخ، شبه ضربگرها راروی دوگان یک جبر باناخ تعریف و در دو مقاله [۱] و [۲] به بیان خواص آنها پرداخته ایم.

۲– پیش نیازها

در این بخش برخی تعاریف و قضایای اساسی مربوط به ضربگرها را ذکر می‌کنیم که در ادامه این مقاله مورد استفاده واقع خواهد شد.

تعریف ۱. ([۹]) فرض کنید یک جبر باناخ باشد. یک ضربگر چپ (راست) روی، یک عملگر است به طوری که به ازای هر، گوئیم یک ضربگر است هرگاه ضربگر چپ و راست باشد.

فضای همه ضربگرهای(ضربگرهای چپ، راست) روی را با نماد (،)نشان می‌دهیم. بعنوان ساده‌ترین مثال از ضربگرهای چپ و راست، می‌توان عملگرهای انتقال چپ و راست را در نظر گرفت.

تعریف ۲. جبر بدون مرتبه چپ (راست) نامیده می‌شود اگر به ازای هر، عبارت ایجاب کند که، جبر بدون مرتبه است اگر بدون مرتبه چپ و راست باشد.

مثال ۱. در هر یک از حالات زیر جبر بدون مرتبه است:
یک همانی تقریبی داشته باشد.
یک جبر نیم ساده باشد.
هیچ مقسوم علیه صفری نداشته باشد.

همانطور که می‌دانیم جبرهای باناخ بدون مرتبه در کلّی‌ترین رده جبرهای باناخ شناخته شده قرار دارند و لذا نتایج بدست آمده از مطالعه ضربگرها روی این ردهٔ خاص، قابل پیاده‌سازی به سایر جبرها است.

بعلاوه، روی جبرهای باناخ معمولی، عملا نتایج قابل توجهی در مورد ضربگرها نمی‌توان بیان کرد اما هنگامی که ضربگرها را روی جبرهای باناخ بدون مرتبه، در نظر می‌گیریم نتایج بسیاری بدست می‌آید. از جمله اینکه خطی و کرانداری ضربگرها روی جبرهای باناخ بدون مرتبه، به طور اتوماتیک حاصل می‌شود. به قضیه زیر توجه کنید.

قضیه ۱. ([۹]) فرض کنید A یک جبر باناخ بدون مرتبه باشد. در این صورت $M(A)$ یک زیر جبر بسته جابجایی از $B(A)$ است که شامل عملگر همانی $B(A)$ می‌باشد.

یکی از مهمترین قضایایی که منجر به ایجاد کاربرد ضربگرها در تئوری سیگنال‌ها و مهندسی زلزله می‌شود، قضیه زیر است:

قضیه ۲. ([۶]) فرض کنید A یک جبر باناخ جابجایی و بدون مرتبه و T یک ضربگر روی A باشد. در این صورت تابع پیوسته، کراندار و منحصر بفرد ϕ روی $\sum(A)$ وجود دارد به طوری که

الف) به ازای هر $x \in A$، $\widehat{(Tx)} = \phi\,\hat{x}$.

ب) $\|T\| \leq \|\phi\|_\infty$.

(که در آن $\sum(A)$ فضای ایده آل‌های ماکسیمال

A و $\hat{x}$ تبدیل گلفند عنصر x از A است.)

در این قسمت، بعنوان مهمترین مثال از ضربگرها، ضربگرهای جبر گروهی $L_1(G)$ را بیان می‌کنیم. فرض کنید $\mu \in M(G)$ اندازه‌ای دلخواه باشد. بوضوح نگاشت $f \to \mu * f$ یک ضربگر چپ روی $L_1(G)$ تعریف می‌کند. وندل در سال ۱۹۵۱، عکس فوق را طی قضیه زیر اثبات کرد.

قضیه ۳. ([۱۰]) فرض کنید $T: L_1(G) \to L_1(G)$ یک ضربگر چپ باشد. در این صورت اندازه یکتای $\mu \in M(G)$ وجود دارد به طوری که به ازای هر

$$T(f)^{\wedge} = \mu * \hat{f} \quad ، f \in L_1(G)$$

قضیه ۴. ([۶]) فرض کنید G یک گروه موضعاً فشرده جابجایی و $T: L_1(G) \to L_1(G)$ یک نگاشت خطی و پیوسته باشد. نتایج زیر معادلند:

(۱) T یک ضربگر روی $L_1(G)$ است یعنی به ازای هر $f, g \in L_1(G)$

$$T(f * g) = T(f) * g = f * T(g).$$

(۲) اندازه یکتای $\mu_T \in M(G)$ وجود دارد به طوری که به ازای هر $f \in L_1(G)$

$$Tf = f * \mu_T.$$

(۳) تابع یکتای H_T روی $\hat{G}$ وجود دارد به طوری که به ازای هر

$$(Tf)^{\wedge} = H_T * \hat{f}.\ f \in L_1(G)$$

نتیجه ۱. ([۶]) فرض کنید G یک گروه موضعاً فشرده جابجایی باشد. در این صورت فضای ضربگرهای جبر گروهی $L_1(G)$ به طور طولپا، با جبر اندازه $M(G)$ یکریخت است.

۳- نتایج اصلی

یکی از نتایج زیبا در این قسمت، نمایش فرمهای نمائی از ضربگرها روی جبرهای باناخ بدون مرتبه است.

تعریف ۳. فرض کنید A یک جبر باناخ باشد. نگاشت خطی و کراندار $T: A \to A$ یک ضربگر چپ (راست) جردن[1] است هرگاه به ازای هر $x \in A$ داشته باشیم:

$$(T(x^2) = x(Tx)) \quad T(x^2) = T(x)x.$$

در قضیه بعد، با ارائه اثبات متفاوتی نشان می دهیم که روی جبرهای باناخ جابجایی و بدون مرتبه، هر ضربگر جردن، یک ضربگر است.

قضیه ۵. فرض کنید A یک جبر باناخ جابجایی و بدون مرتبه باشد. در این صورت T یک ضربگر است اگر و تنها اگر یک ضربگر جردن باشد.

برهان: به وضوح هر ضربگر یک ضربگر جردن است. حال فرض کنید T یک ضربگر جردن باشد آنگاه به ازای هر $x, y \in A$ داریم:

$$T((x+y)^2) = (x+y)T(x+y) = xT(x) + xT(y) + yT(x) + yT(y) \tag{۱}$$

از طرف دیگر

$$T((x+y)^2) = T(x^2 + 2xy + y^2) = xT(x) + 2T(xy) + yT(y) \tag{۲}$$

از مقایسه (۱) و (۲) داریم:

$$2T(xy) = xT(y) + yT(x) \tag{۳}$$

حال از جابجایی بودن جبر A و عبارت (۳)، نتیجه می‌شود که به ازای هر عنصر $z \in A$

$$2T(xyz) = yT(xz) + (xz)T(y) = y[xT(z) + zT(x)]/2 + (xz)T(y). \tag{۴}$$

و در نتیجه خواهیم داشت:

$$2T(xyz) = [(yx)T(z) + (yz)T(x) + 2(xz)T(y)]/2 \tag{۵}$$

1. Jordan multiplier

با استفاده مجدد از (۳)، داریم:

$$2T(xyz) = [(xy)T(z) + (xz)T(y) +2(yz)T(x)] / 2. \quad (۶)$$

با مقایسه روابط (۵) و (۶)، به ازای هر $x, y, z \in A$ بدست می‌آوریم که

$$(xz)T(y) = (yz)T(x).$$

حال از اینکه A یک جبر جابجایی و بدون مرتبه است نتیجه می‌گیریم که $xT(y) = T(x)y$ و لذا T یک ضربگر است.

توجه. متذکر می‌شویم که قضیه قبل، در حالات خاصی از جبرهای غیرجابجایی برقرار بوده اما در حالت کلی برقرار نیست. به عنوان مثال، زالار[1] در [۱۱] نشان داده است که هر ضربگر جردن چپ (راست) روی یک حلقه نیمه اول بی تاب، یک ضربگر چپ (راست) است.
همچنین وکمن[2] در [۸] نشان داده است که هر نگاشت جمعی $\varphi : R \to R$، که در آن R یک حلقه نیمه اول بی تاب از مرتبه ۲ باشد و در خاصیت $۲\varphi(a^۲) = a\varphi(a) + \varphi(a)a$ به ازای هر $a \in A$ صدق کند، یک ضربگر است.
در ادامه مثالی ارائه می‌کنیم که نشان می‌دهد این مطلب در حالت کلی برقرار نیست.

مثال ۲. زیر جبر

$$\Delta = \{\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{C}\}$$

از ماتریس‌های 3×3 را در نظر می‌گیریم. بوضوح Δ یک جبر باناخ بر حسب نرم زیر است.

$$\left\|\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}\right\| = |a| + |b| + |c| + |d|.$$

فرض کنید

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

همچنین فرض کنید $\varphi : \Delta \to \Delta$ یک نگاشت خطی و پیوسته تعریف شده بوسیله $\varphi(A) = AX + XA$ باشد. براحتی به ازای هر $A, B \in \Delta$ داریم

$$BAX + XAB = BXA + AXB.$$

فرض کنید (o) نماد ضرب جردن $AoB = AB + BA$ ، باشد آنگاه به ازای هر $A, B \in \Delta$ داریم

$$\varphi(A o B) = Ao\varphi(B)$$

در نتیجه φ یک ضربگر جردن راست است. همچنین به ازای هر $A, B \in \Delta$ که $AoB = ۱$ داریم

$$Ao\varphi(B) = \varphi(1).$$

حال اگر

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

آنگاه $\varphi(A) \neq 0$ و $A\varphi(۱) = 0$، که ۱ و 0 به ترتیب ماتریس‌های همانی و صفر هستند. بنابراین φ یک ضربگر راست نیست.
در ادامه ارتباط منظم آرنز بودن جبر ضربگرها را با جبر باناخ اولیه بیان می‌کنیم.

گزاره ۱. فرض کنید A یک جبر باناخ باشد. اگر T یک ضربگر روی A باشد آنگاه T^{**} (نسبت به ضرب آرنز) یک ضربگر روی A^{**} است.

برهان: فرض کنید $m, n \in A^{**}$ و o نماد ضرب اول آرنز باشد. به ازای هر $f \in A^*$ و $x, y \in A$ نشان می‌دهیم

$$< T^{**}(m) on, f > = < moT^{**}(n), f >.$$

1. Zalar
2. Vukman

با استفاده از تعریف ضرب آرنز داریم

$$<T^{**}(m)\mathrm{o}n, f> = <T^{**}(m), n.f> = <m, T^{*}(n.f)>$$

و

$$<T^{*}(n.f), x> = <n.f, T(x)> = <n, f.T(x)>.$$

همچنین

$$<f.T(x), y> = <f, T(x).y>.$$

از طرف دیگر

$$<m\,\mathrm{o}T^{**}(n), f> = <m, T^{**}(n).f>$$

و

$$<T^{**}(n).f, x> = <T^{**}(n), f.x> = <n, T^{*}(f.x)>.$$

همچنین

$$<T^{*}(f.x), y> = <f.x, T(y)> = <f, x.T(y)>. \quad (۸)$$

حال از اینکه T یک ضربگر است، با مقایسه (۷) و (۸) خواهیم داشت:

$$<T^{**}(m)\mathrm{o}n, f> = <m\,\mathrm{o}T^{**}(n), f>.$$

لم ۱. فرض کنید A یک جبر باناخ میانگین پذیر و ψ یک هومومورفیسم پیوسته از A به یک زیر جبر چگال از جبر باناخ B باشد. در این صورت جبر باناخ B میانگین پذیر است.

برهان: رجوع شود به [۳] گزاره ۱۱.

قضیه ۶. ۱) فرض کنید A یک جبر باناخ جابجایی و یکدار با عنصر همانی e باشد. اگر A منظم آرنز باشد آنگاه $M(A)$ نیز منظم آرنز است.

۲) فرض کنید A یک جبر باناخ جابجایی باشد. اگر A میانگین پذیر باشد آنگاه $M(A)$ نیز میانگین پذیر است.

برهان: (۱) تعریف می‌کنیم

$$\mu: A \to M(A)$$
$$\mu(a) = L_a, L_a(b) = ab$$

چون A جابجایی است، $\mu(A)\subseteq M(A)$. محاسبه ساده‌ای نشان می‌دهد که به ازای هر $S\in M(A)$، $S = L_{S(e)}$ و در نتیجه μ یک هومومورفیسم پوشا و پیوسته است. لذا نگاشت $\mu^{**}: A^{**}\to (M(A))^{**}$ نیز پوشا است. حال فرض کنید $F', G'\in (M(A))^{**}$. در اینصورت $F, G\in A^{**}$ وجود دارد بطوریکه $\mu^{**}(F)=F'$ و $\mu^{**}(G)=G'$. فرض کنید o, o' بترتیب ضرب‌های اول و دوم آرنز باشند. در اینصورت

$$F'\circ G' = \mu^{**}(F)\circ\mu^{**}(G) = \mu^{**}(F\circ G) = \mu^{**}(F\circ' G)$$
$$= \mu^{**}(F)\circ'\mu^{**}(G) = F'\circ' G'$$

و در نتیجه $M(A)$ منظم آرنز است.

(۱) هر جبر باناخ میانگین پذیر شامل یک همانی تقریبی کراندار است [۷]. فرض کنید.

(۲) $\{e_\alpha : \alpha\in I\}, T\in M(A)$ یک همانی تقریبی کراندار در A و μ نگاشت تعریف شده در قسمت (۱) باشد. محاسبه ساده‌ای نشان می‌دهد که $T = lim_\alpha L_{T(e_\alpha)}$ و در نتیجه $\overline{\mu(A)} = M(A)$. لذا با توجه به لم ۱، $M(A)$ میانگین پذیر است.

۴- کاربرد ضربگرها

همانطور که در قسمت مقدمه ذکر شد، ضربگرها در علوم دیگر کاربردهای بسیاری دارند. ما در اینجا، کاربرد آنها را در تئوری سیگنال‌ها و بخصوص در مهندسی زلزله، بیان می کنیم.

یکی از دلایلی که کاربرد ضربگر را در علوم مهندسی و بخصوص مهندسی زلزله، درخشان می کند، تعریف آن در قضیه ۱، بر حسب تبدیل فوریه است.

در طراحی لرزه‌ای سازه‌ها، تجزیه و تحلیل محتوای فرکانسی امواج ارتعاشی زمین از اهمیت بالایی برخوردار است. به منظور مطالعه محتوای فرکانسی، آنالیز طیفی با استفاده از تبدیل فوریه یکی از ابزارهای کارآمد در مهندسی زلزله بشمار می‌رود. طیف فوریه اهمیت فرکانس‌های موجود را بدون اطلاعاتی در زمینه زمان وقوع این فرکانس‌ها نشان می‌دهد. از طرفی طیف فوریه

میزان انرژی امواج ناشی از ارتعاشات زمین را در فرکانس‌های مختلف بیان می‌کند. بعنوان مثال، سازه‌ای را در نظر بگیرید که نیروی زلزله بعنوان یک محرک به آن وارد شده است. در پژوهشگاه زلزله، رکورد بی‌نظمی شبیه نوار قلب از این زلزله توسط دستگاه شتاب نگاشت ثبت می‌شود (شکل ۱). تبدیل فوریه، فرکانس‌های ثبت شده را بصورت ترکیبی از توابع سینوسی و کسینوسی تبدیل می‌کند که قابل تحلیل است. (شکل ۲)

در پردازش سیگنال، فیلتر، فرآیند یا دستگاهی است که از آن برای حذف بخش‌ها یا خصوصیات نامطلوب یک سیگنال استفاده می‌شود. در اغلب موارد از فیلتر کردن برای حذف تعدادی فرکانس از سیگنال استفاده می‌شود که یکی از کاربردهای معمول آن حذف اثر نویز پس زمینه و اثر تداخل سیگنال‌هاست. لذا فیلتر کردن، روش تصفیه فرکانس‌ها هم گفته می‌شود.

همچنین پاسخ فرکانسی یک سیستم عبارت است از طیف فرکانس خروجی سیستم به طیف فرکانس ورودی. پاسخ فرکانسی، اندازه طیف خروجی یک سیستم یا یک وسیله در پاسخ به یک محرک است و جهت مشخص نمودن ویژگی‌های دینامیکی سیستم بکار می‌رود. پاسخ فرکانسی مقدار اندازه و فاز خروجی یک تابع فرکانسی است در مقایسه با ورودی یا همان محرکی که به سیستم وارد می‌شود.

در طول قرن‌ها، بشر به دنبال راهکارهایی بوده است که قبل از آمدن زلزله، خسارات ممکن را به حداقل برساند. در مهندسی زلزله، فیلتر کردن شکل موج‌های زلزله می‌تواند کمک شایانی در شناسایی فازهای لرزه‌ای باشد. همچنین با توجه به حساس بودن سیستم لرزه نگار و محدودیت‌های فرکانسی مشخص، طراحی یک فیلتر برای آن کاملاً لازم و ضروری است.

با توجه به قضیه ۱، یک ضربگر T به صورت

$$(\mathrm{T}f)^{\wedge}(\varsigma)=\phi(\varsigma)\hat{f}(\varsigma)$$

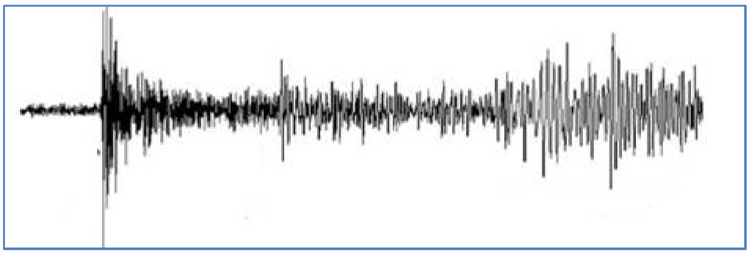
نمایش داده می‌شود که در آن، تبدیل فوریه $\mathrm{T}f$ در فرکانس ς، توسط حاصلضرب تبدیل فوریه f در همان فرکانس، در مقدار ضربگر در آن فرکانس، داده می‌شود.

به عبارت دیگر،

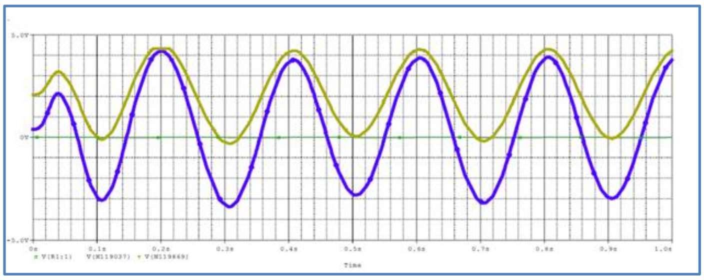
$$\phi(\varsigma)=\frac{(\mathrm{T}f)^{\wedge}(\varsigma)}{\hat{f}(\varsigma)} \qquad (۱)$$

با استفاده از مطالب ذکر شده در فوق، عملگر T به عنوان یک فیلتر و ضربگر ϕ به عنوان پاسخ فرکانسی این فیلتر در نظر گرفته می‌شود. لذا پاسخ فرکانسی یک سیستم همواره توسط یک ضربگر بیان می‌شود و بنابراین کاربرد مفهوم ضربگر در تئوری سیگنال‌ها قابل توجه است.

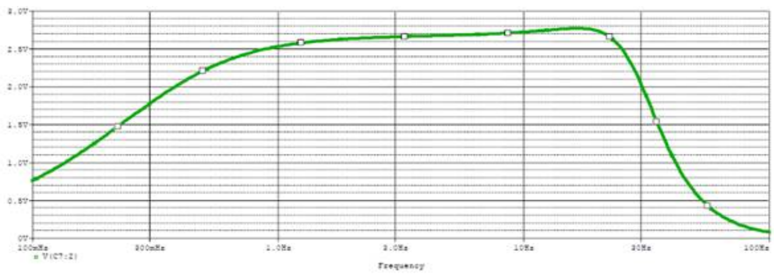
اکنون این مطلب را در مهندسی زلزله بدین صورت می‌توان تحلیل کرد که اگر شتاب زمین (زلزله) را بعنوان ورودی به یک سازه در نظر بگیریم صورت رابطه (۱)، تبدیل فوریه فرکانس‌های تصویه شده زلزله توسط فیلتر T و مخرج کسر تبدیل فوریه شتاب زمین می‌باشد. لذا پاسخ فرکانسی این سازه توسط ضربگر ϕ بیان می‌شود (شکل ۳) که این اهمیت ضربگر را در مهندسی زلزله بیان می‌کند.



(شکل ۱)


5.0V
0V
-5.0V
0s
0.1s
0.2s
0.3s
0.4s
0.5s
0.6s
0.7s
0.8s
0.9s
1.0s
Time

(شکل ۲)


3.0V
2.5V
2.0V
1.5V
1.0V
0.5V
0V
100mHz
300mHz
1.0Hz
3.0Hz
10Hz
30Hz
100Hz
V(C7:2)
Frequency

(شکل ۳)

فهرست منابع

[1] M. Adib, Some topology on the space of quasi-multipliers, Bull. Iranian Math. Soc. (2018), Vol 44.

[2] M. Adib, A. Riazi and J. Braˇciˇc, Quasi-multipliers of the dual of a Banach algebra, Banach J. Math. Anal. 5 (2011), no. 2, 6–14.

[3] F. F. Bonsall and Duncan, Complete normed algebras, Berlin, Hieidelberg, New York: Springer-Verlage, (1973).

[4] L. A. Khan, Topological modules of continuous homomorphisms, J. Math. Anal. Appl, (2008).

[5] L. A. Khan and N. Mohammad and A. B. Thaheem, Double multipliers on topological algebras, Internat. J. Math and Math. Sci, (1999).

[6] R. Laursen, An introduction to theory of multipliers, New York, Springer-Verlag, (1970).

[7] A. Runde, Lectures on Amenability, Berlin, New York, Springer-Verlag, (2002).

[8] J.Vukman, A identity related to centralizers in semiprime rings, Comment. Math. Univ. Carolinae, 40 (1999) 447-456.

[9] J.K. Wang, Multipliers of commutative Banach algebras, Pacific J. Math, (1961) 1131-1149.

[10] J. G. Wendel, Left centralizers and isomorphisms of group algebras, Pacific J. Math, (1952) 251-261.

[11] B. Zalar, On centralizers of semiprime rings, Comment. Math. Univ. Carolinae, 32 (1991) 609-614.

[۱۲] حسن مقدم، ۱۳۹۰، مهندسی زلزله–مبانی و کاربرد، انتشارات کتب دانشگاه