دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال پنجم، شماره هجدهم، خرداد و تیر ۱۳۹۸
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

پژوهش‌های نوین در ریاضی

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

طیف و طیف اساسی ترکیبات خطی عملگرهای ترکیبی روی فضای هاردی H^2

محمود حاجی شعبانی[1*]، مهسا فاتحی[2]، ملیحه فرضی[3]

(۱) استاد، دانشکده ریاضی، دانشگاه صنعتی شیراز، شیراز، ایران
(۲) استاد، گروه ریاضی، واحد شیراز، دانشگاه آزاد اسلامی، شیراز، ایران
(۳) دانشجوی دکتری، دانشکده ریاضی، دانشگاه صنعتی شیراز، شیراز، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۶/۱۲/۰۲ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۷/۱۱/۰۷

چکیده

فرض کنید $\mathbb{D}=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$. اگر φ یک خود نگاشت تحلیلی از $\mathbb{D}$ باشد، برای هر f تحلیلی روی $\mathbb{D}$، عملگر ترکیبی C_φ را به صورت $C_\varphi(f)=f\circ\varphi$ تعریف کرده و φ را تابع ترکیب می‌نامیم. اگر ψ یک تابع تحلیلی کراندار روی $\mathbb{D}$ باشد، عملگر ترکیبی وزن‌دار $C_{\psi,\varphi}$ به صورت $C_{\psi,\varphi}(f)(z)=\psi(z)f(\varphi(z))$ تعریف می‌شود. مجموعه تمام توابع تحلیلی f روی $\mathbb{D}$ را که قدر مطلق مربع ضرایب سری مکلورن آن‌ها جمع پذیر است را فضای هاردی H^2 می‌نامیم. منظور از H^∞، فضای تمام توابع تحلیلی کران‌دار روی $\mathbb{D}$ می‌باشد. اگر φ_1، ... و φ_n توابعی خطی کسری و غیرخودریختی باشند، با قرار دادن شرایطی روی آن‌ها طیف و طیف اساسی مجموع آن‌ها و همچنین هر ترکیب خطی از آن‌ها را بدست می‌آوریم. همچنین در حالتی که φ_{t_1}، ... و φ_{t_n} سهموی‌های غیرخودریخت با تنها یک نقطه ثابت و t_1، ... و t_n اعداد انتقال آن‌ها باشند، طیف هر ترکیب خطی عملگرهای ترکیبی القائی توسط آن‌ها را بدست می‌آوریم. در ادامه با معرفی مفهوم زنجیر ماکزیمال، نشان می‌دهیم که اگر $\{\varphi_1,\ldots,\varphi_n\}$ یک زنجیر ماکزیمال به طول n و $m>n$ باشد، آن‌گاه هر ترکیب خطی از عملگرهای ترکیبی القاء شده توسط آن‌ها با توان m فشرده می‌باشد. در پایان در حالت خاص دیگری نیز طیف و طیف اساسی ترکیبات خطی بعضی از عملگرهای ترکیبی وزن‌دار را بدست می‌آوریم.

واژه‌های کلیدی: فضای هاردی، عملگر ترکیبی، طیف، طیف اساسی.

*. عهده‌دار مکاتبات: Email: shaabani@sutech.ac.ir

۱- مقدمه

اگر S زیر مجموعه‌ای از صفحه مختلط $\mathbb{C}$ باشد، نقاط مرزی S را با ∂S نشان داده و برای هر عدد مختلط a، aS را به صورت $\{as: s\in S\}$ تعریف می‌کنیم. برای تابع تحلیلی f روی $\mathbb{D}$ و $0\le r\le 1$ تابع f_r را بصورت $f_r(e^{i\theta})=f(re^{i\theta})$ تعریف می‌کنیم. بوضوح برای هر $0\le r\le 1$، f_r ها توابعی پیوسته می‌باشند. فضای تمام توابع تحلیلی f روی $\mathbb{D}$ که $\sup_{0<r<1}\int_0^{2\pi}\left|f_r(e^{i\theta})\right|^2\frac{d\theta}{2\pi}<\infty$ ، را فضای هاردی H^2 نامیده و ریشه دوم این مقدار سوپریمم را به وسیله $\|f\|$ نمایش می‌دهیم. منظور از H^∞، فضای تمام توابع تحلیلی کراندار روی $\mathbb{D}$ با نرم سوپریمم $\|f\|_\infty=\sup_{z\in\mathbb{D}}|f(z)|$ می‌باشد. همانطور که می‌دانیم برای هر $f\in H^2$، تقریباً همه جا به ازای هر $\theta\in[0,2\pi]$، $\lim_{r\to1} f(re^{i\theta})$ موجود بوده، بنابراین $f(e^{i\theta})$ را بصورت $f(e^{i\theta})=\lim_{r\to1}f(re^{i\theta})$ تعریف می‌کنیم.

یک تبدیل خطی کسری از $\mathbb{D}$ به $\mathbb{D}$ بفرم $\varphi(z)=\frac{az+b}{cz+d}$ تعریف می‌شود، جایی‌که $a,b,c,d\in\mathbb{C}$ و $ad-bc\neq0$. مجموعه توابع بفرم فوق را با $LFT(\mathbb{D})$ نمایش می‌دهیم. خود ریختی‌ها از $\mathbb{D}$ به $\mathbb{D}$ را توابع تحلیلی، یک به یک و پوشا روی $\mathbb{D}$ در نظر می‌گیریم. ثابت می‌شود که این توابع بفرم $\varphi(z)=\lambda\frac{a-z}{1-\bar{a}z}$ می‌باشند بطوریکه $|\lambda|=1$ و a درون دایره یکه قرار دارد. مجموعه همه خودریختی‌ها روی $\mathbb{D}$ را با $Aut(\mathbb{D})$ نشان می‌دهیم[۵].

گوییم φ دارای مشتق زاویه‌ای متناهی در $\zeta\in\partial\mathbb{D}$ است اگر $\eta\in\partial\mathbb{D}$ موجود باشد بطوریکه حد $(\varphi(z)-\eta)/(z-\zeta)$ وقتی که z به طور غیر مماسی در $\mathbb{D}$ به ζ میل کند، متناهی باشد. این حد را با $\varphi'(\zeta)$ نمایش می‌دهند.

اگر $\varphi\in LFT(\mathbb{D})$ دارای نقطه ثابت منحصربفرد $\zeta\in\partial\mathbb{D}$ باشد، φ را یک سهموی گوییم. فرض کنید $T(z)=\frac{\zeta+z}{\zeta-z}$، قرار دهید $\phi=T\circ\varphi\circ T^{-1}$. در این صورت ϕ یک تبدیل خطی کسری از نیم صفحه سمت راست به خودش می‌باشد که ∞ را ثابت نگه می‌دارد. بنابراین عدد t که $\mathrm{Re}\ t\ge0$ وجود دارد بطوریکه $\phi(z)=z+t$. عدد ثابت t را عدد انتقال φ می‌نامند. اگر قسمت حقیقی t برابر صفر باشد، φ یک سهموی خودریختی و در غیر این صورت φ خودریختی نیست. همچنین در [۲۶] نشان داده شده است که اگر $\zeta\in\partial\mathbb{D}$ نقطه ثابت برای سهموی φ باشد، آن‌گاه $\varphi'(\zeta)=1$. با محاسبه به راحتی می‌توان دید که اگر φ یک نگاشت سهموی با نقطه ثابت ζ و عدد انتقال t باشد آن‌گاه $\varphi(z)=\frac{(2-t)z+t\zeta}{2+t-t\bar{\zeta}z}$ در [۱۰] نشان داده شده است که اگر φ یک تبدیل خطی کسری از $\mathbb{D}$ به $\mathbb{D}$ باشد، آن‌گاه $C_\varphi^*=T_gC_\sigma T_h^*$، که $\sigma(z):=\frac{\bar{a}z-\bar{c}}{-\bar{b}z+\bar{d}}$ یک خود نگاشت از $\mathbb{D}$، $g(z):=(-\bar{b}z+\bar{d})^{-1}$ $h(z):=cz+d$ و $g,h\in H^\infty$. اگر $\zeta,\eta\in\partial\mathbb{D}$ و $\varphi(\zeta)=\eta$، آن‌گاه $\sigma(\eta)=\zeta$. نگاشت‌های σ، g و h را تابع‌های کمکی کاون می‌نامند. مجموعه همه عملگرهای کراندار و عملگرهای فشرده از H^2 به H^2 را به ترتیب با $B(H^2)$ و $B_0(H^2)$ نشان می‌دهیم. در این مقاله برای هر $T\in B(H^2)$، طیف T و طیف اساسی T را به ترتیب با $\sigma(T)$ و $\sigma_e(T)$ نشان می‌دهیم. در [۴]، [۷]، [۱۱]، [۲۱] و [۲۵] طیف عملگرهای ترکیبی C_φ روی H^2، که φ خود نگاشت خطی کسری از $\mathbb{D}$ می‌باشد کاملاً مشخص شده است. اخیراً نتایج جالبی در مورد طیف عملگرهای ترکیبی وزن‌دار روی H^2 بدست آمده است. به عنوان مثال در [۱۸] طیف عملگرهای ترکیبی وزن‌دار در حالتی‌که φ دارای یک نقطه ثابت در $\mathbb{D}$ و $C_{\psi,\varphi}$ فشرده می‌باشد، مورد بررسی قرار گرفته است. در [۸] طیف عملگرهای ترکیبی خودالحاق $C_{\psi,\varphi}$ و در [۳] طیف، در حالتی‌که $C_{\psi,\varphi}$ یکانی و یا نرمال با نقطه ثابت در $\mathbb{D}$ باشد مورد مطالعه قرار گرفته است. در [۱۹] عملگرهای ترکیبی وزن‌دار معکوس‌پذیر روی H^2 تعریف و طیف آن‌ها بدست آورده شده است. در [۲۰] این نتایج، به $C_{\psi,\varphi}$هایی که لزوماً معکوس‌پذیر نیستند و φ در آن‌ها خودریختی

است، توسیع داده شده است. اگر φ یک تابع تحلیلی از $\mathbb{D}$ به $\mathbb{D}$ باشد، φ_0 را تابع همانی و φ_n را ترکیب n بار از φ با خودش در نظر می‌گیریم. در [۹] طیف عملگرهای ترکیبی وزن‌دار $C_{\psi,\varphi}$ روی H^2 در حالتی‌که φ دارای نقطه دنجوی-ولف a، با خاصیت $0<|\varphi'(a)|<1$ می‌باشد و همچنین دنباله φ_n بطور یکنواخت به a همگرا و $\psi \in H^\infty$ در a پیوسته باشد، بطور کامل بررسی شده است. همچنین در [۱] و [۲] نیز طیف و طیف اساسی عملگرهای ترکیبی وزن‌دار مورد بررسی قرار گرفته است. اخیرا مقالات دیگری در مورد عملگرهای ترکیبی و عملگرهای ترکیبی وزن‌دار به چاپ رسیده است، که از جمله می‌توان به مراجع [۱۷-۱۲]، [۲۳]، [۲۴] و [۲۷] اشاره کرد. در این مقاله ابتدا چند لم برای بررسی طیف مجموع متناهی از عضوهای یک جبر یکدار بیان می‌کنیم. سپس برای $1\le i\le n$، اگر $\varphi_i \in LFT(\mathbb{D})$ و $\psi_i \in H^\infty$، با قرار دادن شرایطی روی φ_i ها و ψ_iها، نشان می‌دهیم که مجموعه عضوهای غیر صفر طیف اساسی مجموع C_{ψ_i,φ_i}ها به صورت اجتماعی از طیف اساسی هر کدام از آن‌ها به غیر از صفر می‌باشد. در ادامه طیف ترکیبات خطی C_{φ_1} ، ... و C_{φ_n} که تابع‌های ترکیب آن‌ها سهموی‌های غیرخودریخت و همگی دارای یک نقطه ثابت یکسان می‌باشد را بدست می‌آوریم. در آخر طیف اساسی ترکیباتی خطی از عملگرهای ترکیبی C_φ که φ دارای نقطه ثابت در $\partial\mathbb{D}$ یا φ دارای شرایطی خاص می‌باشد را بررسی می‌کنیم. همانطور که قبلاً بیان شد، چون طیف و طیف اساسی عملگرهای ترکیبی در مراجع [۴]، [۷]، [۱۱]، [۲۱] و [۲۵] پیدا شده‌اند لذا با استفاده از نتایج بدست آمده در این مقاله می‌توان طیف و طیف اساسی هر ترکیب خطی عملگرهای بررسی شده در این مقالات را پیدا کرد.

۲- دست آوردهای پژوهش

در ابتدا چند لم برای پیدا کردن طیف مجموعی متناهی از اعضای یک جبر یکدار را بیان می‌کنیم. سپس به بررسی طیف و طیف اساسی مجموعی متناهی از عملگرهای ترکیبی و عملگرهای ترکیبی وزن‌دار تحت شرایطی خاص می‌پردازیم.

لم ۲.۱. اگر a_1 و a_2 دو عضو از جبر یکدار $\mathcal{A}$ روی میدان $\mathbb{F}$ باشند بطوریکه $a_1a_2=0$ و $a_2a_1=0$، آن‌گاه. $(\sigma(a_1)\bigcup\sigma(a_2))\setminus\{0\}\subseteq\sigma(a_1+a_2)\setminus\{0\}$

اثبات. فرض کنید $\lambda\neq 0$. از آنجا که $a_1a_2=a_2a_1=0$، بنابراین

$$(a_2-\lambda I)(a_1-\lambda I)=(a_1-\lambda I)(a_2-\lambda I)$$
$$=-\lambda(a_1+a_2-\lambda I).$$

حال فرض کنید $\lambda\notin\sigma(a_1+a_2)$. بنابراین $a_1-\lambda I$ و $a_2-\lambda I$ معکوس‌پذیرند. لذا $\lambda\notin\sigma(a_1)$ و $\lambda\notin\sigma(a_2)$. □

لم ۲.۲. فرض کنید برای $n\geq 2$، a_1، a_2 ، ... و a_n عضوهایی از جبر یکدار $\mathcal{A}$ روی میدان $\mathbb{F}$ و برای $i,j\in\{1,2,\dots,n\}$ که $i\neq j$، $a_ia_j=a_ja_i=0$. در این صورت $(\bigcup_{k=1}^{n}\sigma(a_k))\setminus\{0\}\subseteq\sigma(\sum_{k=1}^{n}a_k)\setminus\{0\}$.

اثبات. فرض کنید $\alpha_1=\sum_{k=1}^{n-1}a_k$ و $\alpha_2=a_n$. مشاهده می‌شود که α_1 و α_2 شرایط لم قبل را دارا می‌باشند. بنابراین نتیجه با استفاده از استقراء حاصل می‌شود. □

لم ۲.۳. اگر a_1 و a_2 دو عضو از جبر یکدار $\mathcal{A}$ روی میدان $\mathbb{F}$ باشند، بطوریکه $a_1a_2=0$، آن‌گاه $\sigma(a_1+a_2)\subseteq\sigma(a_1)\bigcup\sigma(a_2)$

اثبات. فرض کنید $\lambda\notin\sigma(a_1)\bigcup\sigma(a_2)$. پس $a_1-\lambda I$ و $a_2-\lambda I$ معکوس‌پذیرند. از آنجا که $a_1a_2=0$، به راحتی می‌توان دید که $0\in\sigma(a_1)\bigcup\sigma(a_2)$. لذا λ غیر صفر است. چون $a_1a_2=0$، داریم

$$(a_1-\lambda I)(a_2-\lambda I)=-\lambda(a_1+a_2-\lambda I).$$

بنابراین با توجه به اینکه حاصل‌ضرب دو عضو معکوس‌پذیر، معکوس‌پذیر می‌باشد، $a_1+a_2-\lambda I$ معکوس‌پذیر خواهد بود. لذا اگر $\lambda\in\sigma(a_1+a_2)$،

آن‌گاه $\lambda \in \sigma(a_1)\bigcup\sigma(a_2)$ و نتیجه حاصل می‌شود.

لم ۴.۲. فرض کنید $n \geq 2$ یک عدد طبیعی و a_1، a_2، ... و a_n عضوهایی از جبر یکدار $\mathcal{A}$ روی میدان $\mathbb{F}$ باشند، بطوریکه برای هر i و j که $1 \leq i \leq j \leq n$، $a_i a_j = 0$. در این صورت $\sigma(\sum_{k=1}^{n} a_k) \subseteq \bigcup_{k=1}^{n}\sigma(a_k)$.

اثبات. با استفاده از استقراء و لم ۳.۲ نتیجه حاصل می‌شود. □

در صفحه ۱۲۹ از مرجع [۱۰] بیان شده است که اگر $\varphi \in LFT(\mathbb{D})$ و $\varphi(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$، آن‌گاه C_φ روی H^2 فشرده است. در نتایج بعدی از این مطلب استفاده خواهد شد.

گزاره ۵.۲. فرض کنید φ_1، φ_2، ... و φ_n تبدیلات خطی کسری غیرخودریخت از $\mathbb{D}$ به $\mathbb{D}$ و برای هر $1 \leq i \leq n$، $\zeta_i, \eta_i \in \partial\mathbb{D}$ موجود باشند بطوریکه $\varphi_i(\zeta_i) = \eta_i$. همچنین فرض کنید برای $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ که $i \neq j$، داشته باشیم $\zeta_i \neq \zeta_j$، $\eta_i \neq \zeta_j$ و $\eta_i \neq \eta_j$. اگر برای هر $1 \leq i \leq n$، $\psi_i \in H^\infty$ و ψ_iها در ζ_i پیوسته باشند، آن‌گاه

$$\sigma_e(C_{\psi_1,\varphi_1} + C_{\psi_2,\varphi_2} + \cdots + C_{\psi_n,\varphi_n}) \setminus \{0\} = (\bigcup_{i=1}^{n}\psi_i(\zeta_i)\sigma_e(C_{\varphi_i})) \setminus \{0\}.$$

اثبات. با استفاده از نتیجه ۲.۲ از [۲۲] داریم:

$$\sigma_e(C_{\psi_1,\varphi_1} + \cdots + C_{\psi_n,\varphi_n}) = \sigma_e(\psi_1(\zeta_1)C_{\varphi_1} + \cdots + \psi_n(\zeta_n)C_{\varphi_n}).$$

از طرفی برای هر i و j که $i \neq j$، به راحتی می‌توان دید که $\varphi_i(\varphi_j(\mathbb{D})) \subseteq \mathbb{D}$. بنابراین با توجه به صفحه ۱۲۹ از مرجع [۱۰]، $C_{\varphi_i \circ \varphi_j}$ یک عملگر فشرده است. لذا با توجه به لم ۲.۲،

$$(\bigcup_{i=1}^{n}\sigma_e(\psi_i(\zeta_i)C_{\varphi_i})) \setminus \{0\} \subseteq \sigma_e(\sum_{i=1}^{n}\psi_i(\zeta_i)C_{\varphi_i}) \setminus \{0\}.$$

همچنین با توجه به لم ۴.۲،

$$\sigma_e(\sum_{i=1}^{n}\psi_i(\zeta_i)C_{\varphi_i}) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n}\sigma_e(\psi_i(\zeta_i)C_{\varphi_i}).$$

بنابراین

$$\sigma_e(\sum_{i=1}^{n}\psi_i(\zeta_i)C_{\varphi_i}) \setminus \{0\} = (\bigcup_{i=1}^{n}\sigma_e(\psi_i(\zeta_i)C_{\varphi_i})) \setminus \{0\}.$$

لذا نتیجه حاصل می‌شود. □

در قضیه بعد طیف ترکیبات خطی عملگرهای ترکیبی را در حالتی‌که تابع ترکیب آن‌ها سهموی‌های غیرخودریخت و همگی دارای نقطه ثابت یکسان می‌باشند مورد بررسی قرار می‌دهیم.

قضیه ۶.۲. فرض کنید φ_{t_1}، φ_{t_2}، ... و φ_{t_n} سهموی‌های غیرخودریخت از $\mathbb{D}$ به $\mathbb{D}$ با نقطه ثابت $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ و α_1، ... و α_n اعداد مختلط دلخواه باشند. اگر ثابت‌های t_1، t_2، ... و t_n به ترتیب اعداد انتقال φ_{t_1}، φ_{t_2}، ... و φ_{t_n} باشند، آن‌گاه

$$\sigma(\alpha_1 C_{\varphi_{t_1}} + \cdots + \alpha_n C_{\varphi_{t_n}}) = \{\alpha_1 e^{-\beta t_1} + \cdots + \alpha_n e^{-\beta t_n} : \beta \geq 0\} \bigcup \{0\}.$$

اثبات. از آنجا که برای هر $1 \leq i \leq n$، ζ نقطه ثابت φ_{t_i} می‌باشد، $\tilde{\varphi}_i(z) = \overline{\zeta}(\varphi_{t_i}(\zeta z))$ یک تابع سهموی با نقطه ثابت 1 است. زیرا

$$\tilde{\varphi}_i(1) = \overline{\zeta}(\varphi_{t_i}(\zeta)) = \overline{\zeta}\zeta = |\zeta|^2 = 1$$

بنابراین برای هر $1 \leq i \leq n$ عملگر ترکیبی $C_{\varphi_{t_i}}$ به طور یکانی هم ارز با $C_{\tilde{\varphi}_i}$ می‌باشد که $C_{\tilde{\varphi}_i} = C_{\zeta z} C_{\varphi_{t_i}} C_{\zeta z}^*$، جایی که $C_{\zeta z}$ یک عملگر یکانی است. حال بدون کاسته شدن از کلیت مسأله می‌توان فرض کرد φ_{t_i}ها سهموی‌های غیرخودریخت با نقطه ثابت 1 باشند. فرض کنید $\tau(G) = \{t : |\arg\ t| < \frac{\pi}{2}\}$ و قرار دهید $\varphi_t(z) = \sigma^{-1}(\sigma(z) + t)$، جایی‌که

$\sigma(z)=\frac{1+z}{1-z}$ و $t\in\tau(G)$. طبق آنچه در قسمت پیش گفتار بیان کردیم φ_tها توابع سهموی غیرخودریخت می‌باشند. حال فرض کنید U یک جبر بسته نرم‌دار تولید شده توسط مجموعه $\{C_{\varphi_t}:t\in\tau(G)\}\bigcup\{I\}$ باشد. اگر $\sum$ را مجموعه تمام تابعک‌های خطی ضربی ناصفر روی U تعریف کنیم، در این صورت با توجه به اثبات قضیه ۱.۶، از مرجع [۷]، برای هر $t\in\tau(G)$ و $\Lambda\in\sum$، $\Lambda(C_{\varphi_t})=0$ یا $\Lambda(C_{\varphi_t})=e^{-\beta t}$، جایی که $\beta\geq 0$.

لذا با توجه به قضیه ۶.۸ صفحه ۲۱۹ از [۶]، داریم

$$\begin{aligned}&\sigma(\alpha_1C_{\varphi_{t_1}}+\cdots+\alpha_nC_{\varphi_{t_n}})\\&\subseteq\{\Lambda(\alpha_1C_{\varphi_{t_1}}+\cdots+\alpha_nC_{\varphi_{t_n}}):\Lambda\in\sum\}\\&=\{\alpha_1\Lambda(C_{\varphi_{t_1}})+\cdots+\alpha_n\Lambda(C_{\varphi_{t_n}}):\Lambda\in\sum\}\\&=\{\alpha_1e^{-\beta t_1}+\cdots+\alpha_ne^{-\beta t_n}\}\bigcup\{0\}.\end{aligned}$$

همچنین با توجه به نتیجه ۲.۶ از [۷]، $f(z)=\exp(-\beta\sigma(z))$ یک بردار ویژه با مقدار ویژه $e^{-\beta t}$ برای هر C_{φ_t} می‌باشد. لذا

$$\begin{aligned}&(\alpha_1C_{\varphi_{t_1}}+\cdots+\alpha_nC_{\varphi_{t_n}})(f)=\\&(\alpha_1e^{-\beta t_1}+\cdots+\alpha_ne^{-\beta t_n})(f)\end{aligned}$$

و بنابراین

$$\begin{aligned}&\alpha_1e^{-\beta t_1}+\alpha_2e^{-\beta t_2}+\cdots+\alpha_ne^{-\beta t_n}\\&\in\sigma(\alpha_1C_{\varphi_{t_1}}+\cdots+\alpha_nC_{\varphi_{t_n}}).\end{aligned}$$

از آنجا که برای هر $1\leq i\leq n$، φ_{t_i}ها سهموی‌های غیرخودریخت می‌باشند، بنابراین $\mathrm{Re}\,t_i>0$. به راحتی می‌توان دید که 0 یک نقطه حدی برای $\alpha_1e^{-\beta t_1}+\alpha_2e^{-\beta t_2}+\cdots+\alpha_ne^{-\beta t_n}$ می‌باشد و از آنجا که طیف فشرده است نتیجه حاصل می‌شود. □

همانطور که می‌دانیم برای هر $\varphi\in LFT(\mathbb{D})$ که خودریختی نباشد تنها یکی از سه حالت زیر اتفاق می‌افتد.

الف) $\overline{\varphi(\mathbb{D})}\subseteq\mathbb{D}$ به این معنی که $\|\varphi\|_\infty<1$ یا به عبارتی دیگر φ هیچ نقطه‌ای از $\partial\mathbb{D}$ را به نقطه‌ای از $\partial\mathbb{D}$ نمی‌برد.

ب) تنها دو نقطه $\zeta,\eta\in\partial\mathbb{D}$ که $\zeta\neq\eta$ موجود باشند بطوریکه $\varphi(\zeta)=\eta$ که در این حالت $\|\varphi\|_\infty=1$ خواهد بود.

ج) نقطه منحصربفرد $\zeta\in\partial\mathbb{D}$ موجود باشد بطوریکه $\varphi(\zeta)=\zeta$ که در این حالت $\|\varphi\|_\infty=1$.

در تعریف ۷.۲ قصد داریم برای مجموعه‌ای از توابع خطی کسری که شرایط حالت (ب) را دارا باشند، مفهوم جدیدی ارایه دهیم.

تعریف ۷.۲. فرض کنید φ_1، φ_2، ... و φ_n تبدیلات خطی کسری غیرخودریخت از $\mathbb{D}$ به $\mathbb{D}$ و برای هر $1\leq i\leq n$، $\|\varphi_i\|_\infty=1$. همچنین فرض کنید برای هر $1\leq m\leq n$، $\{\varphi_{i_1},\varphi_{i_2},\ldots,\varphi_{i_m}\}$ زیر مجموعه‌ای از $\{\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n\}$ باشند، بطوریکه برای هر $1\leq j\leq m$، φ_{i_j}ها دو بدو متمایز و $\varphi_{i_j}(\zeta_j)=\zeta_{j+1}$ جایی‌که $\{\zeta_1,\ldots,\zeta_m,\zeta_{m+1}\}\subseteq\partial\mathbb{D}$. گوییم m تایی مرتب $(\varphi_{i_1},\varphi_{i_2},\ldots,\varphi_{i_m})$ یک زنجیر ماکزیمال به طول m می‌باشد اگر $\|\varphi_{i_m}\circ\varphi_{i_{m-1}}\circ\cdots\circ\varphi_{i_1}\|_\infty=1$ و برای هر t که $t\notin\{i_1,\ldots,i_m\}$، $\|\varphi_t\circ\varphi_{i_m}\circ\varphi_{i_{m-1}}\circ\cdots\circ\varphi_{i_1}\|_\infty<1$ و $\|\varphi_{i_m}\circ\varphi_{i_{m-1}}\circ\cdots\circ\varphi_{i_1}\circ\varphi_t\|_\infty<1$ و نیز برای $1\leq j\leq m+1$، ζ_jها دو بدو متمایز باشند.

دقت شود از آن‌جا که ζ_jها در تعریف ۷.۲ با هم متمایز هستند، اگر $\varphi\in LFT(\mathbb{D})$ دارای یک نقطه ثابت در مرز $\mathbb{D}$ باشد، آن‌گاه φ در هیچ زنجیر ماکزیمالی قرار نمی‌گیرد.

مثال ۸.۲. فرض کنید φ_1، φ_2، φ_3، φ_4 و φ_5 تبدیلات خطی کسری غیرخودریخت از $\mathbb{D}$ به $\mathbb{D}$ با نرم سوپریمم 1 و برای هر $1\leq i\leq 6$، $\zeta_i\in\partial\mathbb{D}$ متمایز باشند. همچنین فرض کنید $\varphi_1(\zeta_1)=\zeta_2$، $\varphi_2(\zeta_2)=\zeta_3$، $\varphi_3(\zeta_3)=\zeta_4$، $\varphi_4(\zeta_5)=\zeta_6$ و $\varphi_5(\zeta_6)=\zeta_2$. برای درک بهتر آن نمودار زیر را ارایه می‌دهیم.

$$\begin{tikzcd}\zeta_1 \arrow[r, "\varphi_1"] & \zeta_2 \arrow[r, "\varphi_2"] & \zeta_3 \arrow[r, "\varphi_3"] & \zeta_4 \\ & \arrow[u, "\varphi_5"'] & & \\ \zeta_5 \arrow[r, "\varphi_4"'] & \zeta_6 & & \end{tikzcd}$$

با توجه به تعریف ۷.۲، ملاحظه می‌شود که $(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)$ و $(\varphi_4,\varphi_5,\varphi_2,\varphi_3)$، به ترتیب زنجیرهایی ماکزیمال به طول سه و چهار می‌باشند. حال اگر برای $\in \mathbb{C}$ $\alpha_1,\dots,\alpha_5$، $\alpha_1 C_{\varphi_1}+\alpha_2 C_{\varphi_2}+\cdots+\alpha_5 C_{\varphi_5}$ را پنج مرتبه با خودش ترکیب کنیم، ترکیبی خطی از عملگرهایی بفرم $C_{\varphi_{i_1}\circ\varphi_{i_2}\circ\cdots\circ\varphi_{i_5}}$ حاصل می‌شود که برای $1\le j\le 5$، $\varphi_{i_j}\in\{\varphi_1,\dots,\varphi_5\}$. به بیان دیگر

$$(\alpha_1 C_{\varphi_1}+\alpha_2 C_{\varphi_2}+\cdots+\alpha_n C_{\varphi_n})^5 = \sum_{\substack{i_j\in\{1,\dots,5\}\\ 1\le j\le 5}} \alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\dots\alpha_{i_5} C_{\varphi_{i_1}} C_{\varphi_{i_2}}\dots C_{\varphi_{i_5}}.$$

با توجه به تعریف ۷.۲، داریم $\|\varphi_{i_1}\circ\varphi_{i_2}\circ\cdots\circ\varphi_{i_5}\|_\infty<1$. لذا با توجه به صفحه ۱۲۹ از [۱۰]، $C_{\varphi_{i_1}\circ\varphi_{i_2}\circ\cdots\circ\varphi_{i_5}}$ فشرده است. از طرفی با استفاده از قضیه ۱۰.۴ صفحه ۲۰۴ از [۶]،

$$\begin{aligned}(\sigma_e(\alpha_1 C_{\varphi_1}+\alpha_2 C_{\varphi_2}+\cdots+\alpha_5 C_{\varphi_5}))^5 &= \sigma_e((\alpha_1 C_{\varphi_1}+\alpha_2 C_{\varphi_2}+\cdots+\alpha_5 C_{\varphi_5})^5)\\ &=\{0\}\end{aligned}$$

و بنابراین $\sigma_e(\alpha_1 C_{\varphi_1}+\alpha_2 C_{\varphi_2}+\cdots+\alpha_5 C_{\varphi_5})=\{0\}$. در گزاره بعد نشان می‌دهیم که طیف اساسی ترکیبات خطی عملگرهای ترکیبی با تابع‌های ترکیبی که در یک زنجیر قرار دارند صفر می‌باشد.

گزاره ۹.۲. اگر $(\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_n)$ زنجیری ماکزیمال به طول n باشد، در این صورت برای هر $m>n$، $(\alpha_1 C_{\varphi_1}+\alpha_2 C_{\varphi_2}+\cdots+\alpha_n C_{\varphi_n})^m$ یک عملگر فشرده می‌باشد و همچنین $\sigma_e(\alpha_1 C_{\varphi_1}+\alpha_2 C_{\varphi_2}+\cdots+\alpha_n C_{\varphi_n})=\{0\}$.

اثبات. فرض کنید $\{\zeta_1,\dots,\zeta_n,\zeta_{n+1}\}\subseteq\partial\mathbb{D}$ و برای هر $1\le i\le n$، $\varphi_i(\zeta_i)=\zeta_{i+1}$. بوضوح برای هر $m>n$ داریم

$$(\alpha_1 C_{\varphi_1}+\alpha_2 C_{\varphi_2}+\cdots+\alpha_n C_{\varphi_n})^m = \sum_{\substack{i_j\in\{1,2,\dots,n\}\\ 1\le j\le m}} \alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\dots\alpha_{i_m} C_{\varphi_{i_1}} C_{\varphi_{i_2}}\dots C_{\varphi_{i_m}}.$$

از میان n بار ترکیب φ_iها فقط $\varphi_n\circ\varphi_{n-1}\circ\cdots\circ\varphi_2\circ\varphi_1$ نقطه ζ_1 از مرز قرص واحد را به مرز قرص واحد می‌برد و بقیه n بار ترکیب φ_iها تمام مرز $\mathbb{D}$ را به داخل $\mathbb{D}$ می‌برند. حال چون $m>n$ می‌باشد، طبق تعریف ۷.۲ و صفحه ۱۲۹ از [۱۰]، برای هر $1\le j\le n$، همه ترکیبات بفرم $C_{\varphi_j\circ\varphi_n\circ\cdots\circ\varphi_2\circ\varphi_1}$ و $C_{\varphi_n\circ\varphi_{n-1}\circ\cdots\circ\varphi_1\circ\varphi_j}$ فشرده‌اند. بنابراین با توجه به قضیه ۱۰.۴ صفحه ۲۰۴ از [۶] داریم

$$\begin{aligned}(\sigma_e(\alpha_1 C_{\varphi_1}+\alpha_2 C_{\varphi_2}+\cdots+\alpha_n C_{\varphi_n}))^m &= \sigma_e((\alpha_1 C_{\varphi_1}+\alpha_2 C_{\varphi_2}+\cdots+\alpha_n C_{\varphi_n})^m)\\ &=\{0\}.\end{aligned}$$

پس $\sigma_e(\alpha_1 C_{\varphi_1}+\alpha_2 C_{\varphi_2}+\cdots+\alpha_n C_{\varphi_n})=\{0\}$.

فرض کنید $\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_n\in LFT(\mathbb{D})$ غیر خودریختی و برای هر $1\le t\le n$، $\|\varphi_t\|_\infty=1$ و اگر $\zeta\in\partial\mathbb{D}$ و $1\le i,j\le n$ وجود داشته باشند بطوریکه $\varphi_i(\zeta),\varphi_j(\zeta)\in\partial\mathbb{D}$، آن‌گاه $\varphi_i=\varphi_j$. همچنین φ_iها در یکی از شرایط زیر صدق کنند.

الف) تابع φ_i دارای یک نقطه ثابت در $\partial\mathbb{D}$ باشد و اگر ζ نقطه ثابت برای φ_i باشد، آن‌گاه برای هر $1\le j\le n$ که $j\ne i$، اگر $\zeta_j,\eta_j\in\partial\mathbb{D}$ و $\varphi_j(\zeta_j)=\eta_j$، آن‌گاه $\zeta\ne\zeta_j$ و $\zeta\ne\eta_j$.

ب) تابع φ_i در یک زنجیر ماکزیمال قرار داشته باشد (دقت کنید که با توجه به تعریف ۷.۲، φ_i دارای نقطه ثابت در $\partial\mathbb{D}$ نمی‌باشد). توجه شود که تحت شرایط بالا اگر $2\le m\le n$ و $\{\varphi_{i_1},\varphi_{i_2},\dots,\varphi_{i_m}\}\subseteq\{\varphi_1,\dots,\varphi_n\}$ و $\zeta\in\partial\mathbb{D}$ موجود باشد بطوریکه $(\varphi_{i_1}\circ\varphi_{i_2}\circ\cdots\circ\varphi_{i_m})(\zeta)=\zeta$، آن‌گاه طبق تعریف ۷.۲، $\varphi_{i_1}=\varphi_{i_2}=\cdots=\varphi_{i_m}$ و ζ نقطه ثابت آن‌ها می‌باشد.

در قضیه بعد فرض می‌کنیم φ_iها شرایط فوق را دارا باشند و طیف اساسی را برای ترکیبات خطی از این قبیل C_{φ_i}ها پیدا می‌کنیم.

قضیه ۱۰.۲. اگر φ_1، φ_2، ... و φ_n شرایط فوق را دارا باشند، آن‌گاه برای هر ترکیب خطی بفرم زیر از C_{φ_i} ها داریم

$$\sigma_e(\alpha_1 C_{\varphi_1}+\alpha_2 C_{\varphi_2}+\cdots+\alpha_n C_{\varphi_n})\setminus\{0\} = \bigcup_{i\in I}\{\alpha_i\sigma_e(C_{\varphi_i})\}\setminus\{0\},$$

که در آن $I=\{\, i :$ دارای یک نقطه ثابت در $\partial\mathbb{D}$ باشد $\varphi_i\}$

اثبات. فرض کنید $1\le n_1\le n$ و برای هر $1\le i\le n_1$، φ_i دارای یک نقطه ثابت در $\partial\mathbb{D}$ باشد. قرار دهید $T=\sum_{i=1}^{n_1}\alpha_i C_{\varphi_i}$ و $S=\sum_{i=n_1+1}^{n}\alpha_i C_{\varphi_i}$، بطوریکه برای هر $n_1+1\le i\le n$، زنجیر ماکزیمالی موجود باشد بطوریکه φ_i درون آن قرار گیرد. بدون کاسته شدن از کلیت، فرض می‌کنیم که برای هر $n_1+1\le i\le n$، φ_i فقط در یک زنجیر ماکزیمال قرار داشته باشد (بوضوح اگر i_0 ی موجود باشد بطوریکه φ_{i_0} درون حداقل دو زنجیر ماکزیمال باشد مشابه مثال ۸.۲ و روند اثبات همین قضیه، می‌توان نشان داد که زنجیرهای ماکزیمال در محاسبه طیف اساسی بی‌تاثیر می‌باشند). فرض کنید تبدیلات خطی کسری φ_{n_1+1}، φ_{n_1+2}، ... و φ_n درون زنجیرهای ماکزیمال $(C_{\varphi_{n_1+1}},C_{\varphi_{n_1+2}},\ldots,C_{\varphi_{n_1+m_1}})$، $(C_{\varphi_{n_1+m_1+1}},C_{\varphi_{n_1+m_1+2}},\ldots,C_{\varphi_{n_1+m_1+m_2}})$، ... و $(C_{\varphi_{n_1+m_1+\cdots+m_{k-1}+1}},\ldots,C_{\varphi_{n_1+m_1+\cdots+m_{k-1}+m_k}})$ قرار داشته باشند که به ترتیب طول هر کدام از آن‌ها m_1، m_2، ... و m_k و $n_1+m_1+\cdots+m_k=n$ می‌باشد. قرار دهید $N=\max\{m_1,m_2,\ldots,m_k\}$. نشان می‌دهیم S^{N+1} فشرده است. واضح است که S^{N+1} ترکیبی خطی از عملگرهای ترکیبی می‌باشد. به عبارت دیگر

$$S^{N+1}=\sum_{i_j\in\{n_1+1,\ldots,n\}}\alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\ldots\alpha_{i_{N+1}}C_{\varphi_{i_1}\circ\varphi_{i_2}\circ\cdots\circ\varphi_{i_{N+1}}}.$$

اگر φ_{i_1}، φ_{i_2} و ... و $\varphi_{i_{N+1}}$ همگی عضوی از یک زنجیر ماکزیمال باشند آن‌گاه طبق گزاره ۹.۲، $C_{\varphi_{i_1}\circ\varphi_{i_2}\circ\cdots\circ\varphi_{i_{N+1}}}$ فشرده است. حال بدون کاسته شدن از کلیت فرض کنید φ_{i_1} و φ_{i_2} در دو زنجیر ماکزیمال متفاوت قرار داشته باشند. لذا با توجه به تعریف ۷.۲، $\|\varphi_{i_1}\circ\varphi_{i_2}\circ\cdots\circ\varphi_{i_{N+1}}\|_\infty<1$ و سپس با توجه به صفحه ۱۲۹ از [۱۰]، $C_{\varphi_{i_1}\circ\varphi_{i_2}\circ\cdots\circ\varphi_{i_{N+1}}}$ فشرده است. پس تمام جمعوندهای S^{N+1} فشرده می‌باشند، لذا S^{N+1} فشرده است. بنابراین با توجه به قضیه ۱۰.۴ صفحه ۲۰۴ از [۶]، $\sigma_e(S)=\{0\}$. از طرفی TS و ST فشرده می‌باشند. زیرا برای $1\le i_0\le n_1$ و $n_1+1\le j_0\le n$، با توجه به شرط (الف) بیان شده قبل از صورت قضیه، $\varphi_{i_0}\circ\varphi_{j_0}$ و $\varphi_{j_0}\circ\varphi_{i_0}$ هیچ نقطه‌ای از $\partial\mathbb{D}$ را به $\partial\mathbb{D}$ نمی‌برد. پس با توجه به صفحه ۱۲۹ از [۱۰]، $C_{\varphi_{i_0}\circ\varphi_{j_0}}$ و $C_{\varphi_{j_0}\circ\varphi_{i_0}}$ فشرده می‌باشند. لذا با استفاده از لم‌های ۱.۲ و ۳.۲ داریم

$$\begin{aligned}
&\sigma_e(\alpha_1 C_{\varphi_1}+\alpha_2 C_{\varphi_2}+\cdots+\alpha_n C_{\varphi_n})\setminus\{0\}\\
&=\sigma_e(S+T)\setminus\{0\}\\
&=(\sigma_e(S)\cup\sigma_e(T))\setminus\{0\}\\
&=\sigma_e(T)\setminus\{0\}\\
&=\bigcup_{i=1}^{n_1}\{\alpha_i\sigma_e(C_{\varphi_i})\}\setminus\{0\}.
\end{aligned}$$

دقت شود که تساوی آخر از این مطلب نتیجه می‌شود که با توجه به شرط (الف) بیان شده قبل از صورت قضیه ضرب هر دو عضو از T فشرده می‌باشد. □

نتیجه ۱۱.۲. فرض کنید φ_1، φ_2، ... و φ_n شرایط قضیه قبل را دارا و برای هر $1\le i\le n$، ζ_i عضوی از $\partial\mathbb{D}$ باشد بطوریکه $\varphi_i(\zeta_i)\in\partial\mathbb{D}$. اگر برای هر $1\le i\le n$، $\psi_i\in H^\infty$ و ψ_i در ζ_i پیوسته باشند، آن‌گاه

$$\sigma_e(C_{\psi_1,\varphi_1}+C_{\psi_2,\varphi_2}+\cdots+C_{\psi_n,\varphi_n})\setminus\{0\} = \bigcup_{i\in I}\{\psi_i(\zeta_i)\sigma_e(C_{\varphi_i})\}\setminus\{0\},$$

که در آن $I=\{\, i :$ دارای نقطه ثابت در $\partial\mathbb{D}$ باشد $\varphi_i\}$

اثبات. با توجه به نتیجه ۲.۲ از [۲۲] داریم

$$\begin{aligned}
&\sigma_e(C_{\psi_1,\varphi_1}+C_{\psi_2,\varphi_2}+\cdots+C_{\psi_n,\varphi_n})\\
&=\sigma_e(\psi_1(\zeta_1)C_{\varphi_1}+\psi_2(\zeta_2)C_{\varphi_2}\\
&+\cdots+\psi_n(\zeta_n)C_{\varphi_n}).
\end{aligned}$$

بنابراین با استفاده از قضیه قبل نتیجه حاصل می‌شود.□

نتیجه ۱۲.۲. اگر برای هر $1 \leq i \leq n$، φ_i و ψ_i شرایط گزاره ۵.۲ را دارا باشند، آن‌گاه

$$\sigma_e(C_{\psi_1,\varphi_1} + C_{\psi_2,\varphi_2} + \cdots + C_{\psi_n,\varphi_n}) \setminus \{0\}$$
$$= \bigcup_{i \in I} \sigma_e(\psi_i(\zeta_i) C_{\varphi_i}),$$

که در آن $\mathrm{I} = \left\{ i : \right.$ دارای یک نقطه ثابت در ζ_i باشد $\left. \varphi_i \right\}$

اثبات. برای هر $1 \leq j \leq n$ که $\varphi_j(\zeta_j) = \eta_j$ و $\zeta_j \neq \eta_j$، واضح است که φ_j درون یک و فقط یک زنجیر ماکزیمال به طول 1 قرار می‌گیرد. لذا φ_iها شرایط نتیجه ۱۱.۲ را دارا می‌باشند. پس با توجه به نتیجه ۱۱.۲ مطلب اثبات می‌شود. □

فهرست منابع

[1] P. S. Bourdon, Spectra of some composition operators and associated weighted composition operators, J. Operator Theory **67** (2012), 537-560.

[2] P. S. Bourdon, Spectra of composition operators with symbols in S(2), J. Operator Theory 75 (2016), 21-48.

[3] P. S. Bourdon and S. Narayan, Normal weighted composition operators on the Hardy space $H^2(U)$, J. Math. Anal. App. 367 (2010), 278-286.

[4] J. G. Caughran and H. J. Schwartz, Spectra of compact composition operators, Proc. Amer. Math. Soc. 51 (1975), 127-130.

[5] J. B. Conway, Functions of One Complex Variable, Second Edition, Springer-Verlag, New York, 1978.

[6] J. B. Conway, A Course in Functional Analysis, Second Edition, Springer-Verlag, New York, 1990.

[7] C. C. Cowen, Composition operators on H^2, J. Operator Theory 9 (1983), 77-106.

[8] C. C. Cowen and E. Ko, Hermitian weighted composition operators on weighted Hardy spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 362 (2010), 5771-5801.

[9] C. C. Cowen, E. Ko, D. Thompson and F. Tian, Spectra of some weighted composition operators on H^2, Acta Sci. Math. (Szeged) 82 (2016), 221-234.

[10] C. C. Cowen and B. D. MacCluer, Composition Operators on Spaces of Analytic Functions. Staudies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 1995.

[11] J. A. Deddens, Analytic Toeplitz and composition operators, Canad. J. Math. 24 (1972), 859-865.

[12] M. Fatehi and M. Haji Shaabani, Certain nontrivially essentially self-adjoint weighted composition operators on H2 and A2, Complex Variables and Elliptic Equations. 59 (2014), 1626-1635.

[13] M. Fatehi and M. Haji Shaabani, Some essentially normal weighted composition operators on the weighted Bergman spaces, Complex Variables and Elliptic Equations. 60 (2015), 1205-1216.

[14] M. Fatehi and M. Haji Shaabani, Normal, cohyponormal and normaloid weighted composition operators on the Hardy and weighted Bergman spaces, Journal of the Korean Mathematical Society. 54 (2017), 599–612.

[15] M. Fatehi and M. Haji Shaabani, Norms of hyponormal weighted composition operators on the Hardy and weighted Bergman Spaces, Operators and Matrices. 12 (2018), 997–1007.

[16] M. Fatehi, M. Haji Shaabani and D. Thompson, Quasinormal and Hyponormal Weighted Composition Operators on H2 and A2 with Linear Fractional Compositional Symbol, Complex Anal. Oper. Theory, 12 (2018), 1767–1778.

[17] M. Fatehi, Complex symmetric weighted composition operators, Complex Variables and Elliptic Equations, to appear.

[18] G. Gunatillake, Spectrum of a compact weighted composition operator, Proc. Amer. Math. Soc. 135 (2) (2007), 461-467.

[19] G. Gunatillake, Invertible weighted composition operators, J. Funct. Anal. 261 (2011), 831-860.

[20] O. Hyvarinen, M. Lindstrom, I. Nieminen, and E. Saukko, Spectra of weighted composition operators with automorphic symbols, J. Funct. Anal. 265 (2013), 1749-1777.

[21] H. Kamowitz, The spectra of composition operators on H^p, J. Funct. Anal.18 (1975), 132-150.

[22] T. L. Kriete, B. D. MacCluer and J. L. Moorhouse, Toeplitz- composition C^* -algebras, J. Operator Theory. 58 (2007), 135-156.

[23] R. Lim, L. H. Khoi, Complex symmetric weighted composition operators $H_\gamma(D)$, J. Math. Anal. Appl. 464 (2018), 101-118.

[24] S. K. Narayan, D. Sievewright and D. Thompson, Complex symmetric composition operators on H2, J. Math. Anal. Appl. 443 (2016), 625-630.

[25] E. A. Nordgren, Composition operators, Canad. J. Math. 20 (1968), 442-449.

[26] J. H. Shapiro, Composition Operators and Classical Function Theory, Springer-Verlag, New York, 1993.

[27] D. Thompson, Normaloid weighted composition operators on H2. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 467 (2018), 1153-1162.