دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال پنجم، شماره هجدهم، خرداد و تیر ۱۳۹۸
شماره شاپا: ۲۵۸۸–۵۸۸X

JNRM

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

خاصیت‌هایی از جبرهای لی پوچ توان

محمدرضا ریسمانچیان[۱*]، مهدی ارسخان[۲]

[۱] گروه ریاضی محض، دانشگاه شهرکرد، شهرکرد، جمهوری اسلامی ایران.
[۲] گروه ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد یزد، جمهوری اسلامی ایران.

تاریخ ارسال مقاله: ۹۷/۱۰/۱۴   تاریخ پذیرش مقاله: ۹۸/۰۲/۱۶

چکیده

در این مقاله با استفاده از تعریف‌های سری‌های مرکزی و پوچ توانی در جبرهای لی، نتیجه‌هایی شبیه به کارهای هالس و لینوکس در سال ۱۹۷۶ و هکستر درسال ۱۹۸۶ را ارائه می‌دهیم. در انتها ثابت خواهیم کرد که هر ایده‌آل غیربدیهی از یک جبرلی پوچ توان دارای اشتراک غیر بدیهی با مرکز آن جبر لی است، که این شبیه به نتیجه فلیپ هال در نظریه گروه‌ها است.

واژه‌های کلیدی: مرکز جبرلی، سری مرکزی، ایده‌آل کمین، موضعاً پوچ توان.

*. عهده‌دار مکاتبات:
Email: rismanchian@sku.ac.ir

۱- مقدمه

از آنجا که ارتباط تنگاتنگی بین نظریه گروه‌ها و جبرهای لی وجود دارد، در دهه‌های اخیر مفاهیم و پژوهش‌های انجام شده در زمینه‌ی نظریه گروه‌ها، به طور مشابه در جبرهای لی نیز مورد بررسی قرار گرفته‌اند. چون گروه‌های پوچ توان رده‌ی مهمی از از گروه‌ها را در بر می‌گیرند، مشابه با آن نتیجه‌ها نیز در جبرهای لی قابل توجه است که به عنوان مثال برخی از آنها را می‌توان در [۴-۱] مشاهده نمود. در این خصوص برخی خواص پوچ توانی از گروه‌ها را در جبرهای لی مورد بررسی قرار می‌دهیم.

یک جبر لی L فضای برداری روی میدان F است همراه با ضرب براکت $[\ ,\ ]: L\times L\to L,$ به قسمی که ضرب روی هر مولفه خطی است و

$$\forall x\in L\ :[x,x]=0,$$
$$\forall x,y,z\in L:\left[x,[y,z]\right]+\left[z,[x,y]\right]+\left[y,[z,x]\right]=0$$

(اتحاد ژاکوبی).

در صورتی که مشخصه میدان مخالف ۲ فرض شود خاصیت اول معادل است با این که

$$\forall x,y\in L\ :[x,y]=-[y,x].$$

تمام جبرهای لی مورد بحث در این نوشته (از بعد متناهی یا نامتناهی) روی یک میدان ثابت F در نظر گرفته شده اند. فرض کنیم I و J دو زیر فضا از جبر لی L باشند. در این صورت زیر فضای زیر را تعریف می‌کنیم،

$$[I,J]=\prec[i,\mathrm{j}]|i\in I,\mathrm{j}\in J\succ.$$

زیر فضای I از L را زیر جبر L گویند اگر $[I,I]\subseteq I$. همچنین I را ایده‌آل L گویند اگر $[I,L]\subseteq I$.

در صورتی که I و J هر دو ایده‌آل L باشند، $[I,J]$ نیز یک ایده‌آل از L است.

حال دو ایده‌آل از L را به صورت زیر یادآور می‌شویم،

$$Z(L)=\{x\in L\,|\,[x,y]=0,\forall y\in L\}\ ,$$
$$L^2=[L,L]=\prec[x,y]|x,y\in L\succ.$$

توجه شود $Z(L)$ را مرکز و L^2 را مشتق L گویند و به طور مشخص ایده‌آل‌هایی از L هستند.

فرض کنیم I ایده آلی از L باشد. در این صورت فضای خارج قسمت $\frac{L}{I}$ با ضرب $[,]_1$،

$$[x+I,y+I]_1=[x,y]+I,x,y\in L,$$

یک جبر لی خواهد بود (گزاره ۵.۱.۱ از [۵] را ببینید). لازم به ذکر است جهت سادگی در نوشتار $[,]_1$ را با همان $[,]$ نشان می‌دهیم.

در ادامه دو مفهوم مورد استفاده از جبرهای لی را یادآور می‌شویم. فرض کنیم $L^1=L$ و $Z_1(L)=Z(L)$ باشند. به صورت استقرایی برای هر $i\ge 1$ تعریف می کنیم

$$\frac{Z_{i+1}(L)}{Z_i(L)}=Z\left(\frac{L}{Z_i(L)}\right)\ \text{و}\ L^{i+1}=\left[L,L^i\right].$$

واضح است که $L^{\mathrm{i}}\supseteq L^{\mathrm{i}+1}$ و $Z_i(L)\subseteq Z_{i+1}(L)$.

با توجه به مطالب بیان شده دو سری کاهشی و افزایشی از ایده‌آل‌های L (بخش۷.۱ از [۵] را ببینید) به صورت زیر بیان می‌شوند،

$$L=L^1\supseteq L^2\supseteq\cdots\supseteq L^{\mathrm{i}}\supseteq\cdots,\qquad(*)$$
$$0=Z_0(L)\subseteq Z_1(L)\subseteq Z_2(L)\subseteq\cdots\subseteq Z_i(L)\subseteq\cdots\quad(**)$$

سری (×) را سری مرکزی پایینی و سری (××) را سری مرکزی بالایی جبر لی L گویند L پوچ توان نامیده می‌شود اگر برای عدد صحیح و مثبتی مانند n، $Z_n(L)=L$ یا $L^{n+1}=0$.

کوچکترین مقدار موجود برای n را رده پوچ توانی L گویند.

در اینجا با توجه به مطالب بیان شده تعریف زیر را یادآور می‌شویم.

تعریف ۱.۱: جبر لی L را موضعاً پوچ توان گویند هرگاه هر زیر جبر با تولید متناهی از L، پوچ توان باشد.

ایده‌آل نابدیهی I از جبر لی L را ایده‌آل کمین گویند اگر به ازای هر ایده‌آل J از L که $J \subseteq I$ نتیجه شود $J=0$ یا $J=I$.

در این مقاله ثابت خواهیم کرد اگر I یک ایده‌آل کمین از جبرلی موضعاً پوچ توان L باشد، آنگاه $[I,L]=0$ این قضیه شبیه به کار انجام شده توسط مالسو [۶] و مکلین [۷] است که نشان می‌دهند اگر M یک زیرگروه کمین نرمال از گروه موضعاً پوچ توان G باشد، آنگاه $[M,G]=\prec 1 \succ$.

۲- نتایج و بحث

در این قسمت درستی بعضی از نتایج صادق در جمله‌های سری‌های مرکزی (پایینی و بالایی) و پوچ توانی در گروه‌ها را روی جبرهای لی مورد بررسی قرار می‌دهیم. با مشابه کاری از مطالب صادق در گروه‌ها از مرجع [۶] می‌توان نتایج و لم های زیر را نتیجه گرفت.

لم ۱.۲: فرض کنیم I و J ایده‌آل‌هایی از جبر لی L باشند به طوری که I مشمول در J است. در این صورت $[I,L]\subseteq J$ اگر و تنها اگر $\frac{I}{J}\subseteq Z(\frac{L}{J})$.

برهان:

$$[I,L]\subseteq J \Leftrightarrow \frac{[I,L]+J}{J}=0_{\frac{L}{J}}$$

$$\Leftrightarrow [\frac{I}{J},\frac{L}{J}]=0_{\frac{L}{J}} \Leftrightarrow \frac{I}{J}\subseteq Z(\frac{L}{J}).$$

نتیجه۲.۲: فرض کنیم L یک جبر لی دلخواه و r عددی صحیح و مثبت باشد. در این صورت $\left[Z_r(L),L\right]$ مشمول در $Z_{r-1}(L)$ است.

لم۳.۲: فرض کنیم L یک جبر لی پوچ توان و I ایده‌آلی نابدیهی از L باشد. در این صورت $[I,L]\subset I$.

برهان: فرض پوچ توانی L وجود عددی صحیح و مثبتی مانند n به طوری که $Z_n(L)=L$ را ایجاب می‌کند. فرض کنیم $Z_r(L)$ اولین جمله از سری مرکزی بالایی L باشد به طوری که شامل I است. مشاهده می‌شود که $Z_{r-1}(L)\cap I\subset I$.
حال با استفاده از نتیجه۲.۲ داریم

$$[I,L]\subseteq\left[Z_r(L),L\right]\cap I\subseteq Z_{r-1}(L)\cap I\subset I$$

قضیه زیر در جبرهای لی شبیه به قضیه ۱۷،۲ از مر جع [۶] و کارهای انجام شده توسط مالسو [۸] و مک لین [۸] در نظریه گروه‌ها است.

قضیه ۴.۲: فرض کنیم I ایده‌آلی کمین از جبر لی موضعاً پوچ توان L باشد. در این صورت $[I,L]=0$.

برهان: فرض کنیم $[I,L]\neq 0$. در این صورت $a\in I$ و $x\in L$ موجود است به طوری که $b=[a,x]\neq 0$. چون $b\in I$ است، خاصیت کمین بودن I ایجاب می‌کند $I=\langle b\rangle$. از این رو برای اعضای مناسب $l_1,l_2,\ldots,l_n$ متعلق به L داریم $a\in\langle[b,l_1],\ldots,[b,l_n]\rangle$. فرض کنیم H یک زیر جبر موضعاً پوچ توان تولید شده توسط مجموعه‌ی $\{a,x,l_1,l_2,\ldots,l_n\}$ باشد و نیز $A=\langle a\rangle$ ایده آلی از L تولید شده توسط عضو a باشد. چون $[a,x]\in[A,H]$ لذا $b\in[A,H]$. بنابراین $A=[A,H]$. اگر $A\neq 0$، آنگاه با کمک گرفتن از لم ۳.۲ می‌توان گفت $[A,H]\subset A$، که این در تناقض با شرط $A=[A,H]$ است. لذا $A=0$ و این بدین معنی است که $b=[a,x]=0$ بنابراین $[I,L]=0$.

لم زیر نقش اساسی در نتایج بعدی دارد. این لم شبیه به لم ۲۲.۲ از مرجع [۹] است.

لم۵.۲: فرض کنیم I و J ایده‌آل‌هایی از جبر لی L باشند به طوری که $L=J+[I,L]$. در این صورت برای هر عدد صحیح مثبت n داریم $L=J+\left[I,L^n\right]$.

برهان: جهت سهولت در روند اثبات، نمادهای $\overline{L}=\frac{L}{J}$ و $\overline{I}=\frac{I+J}{J}$ را معرفی می‌کنیم. با استناد به فرض لم، $\overline{I}\subseteq\left[\overline{I},\overline{L}\right]=\frac{[I,J]+J}{J}=\overline{L}$. از این رو $\overline{I}=\overline{L}$ و $\overline{L}=\left[\overline{I},\overline{L}\right]$. حال با روند استقرایی بر n می‌توان مشاهده کرد،

$$\overline{L}=\overline{L}^{n+1}=[\overline{L},\overline{L}^{n}]=\frac{[I,L^{n}]+J}{J}.$$

لذا $L=J+\left[I,L^{n}\right]$.

قضیه زیر شبیه به قضیه ۳.۲ از مرجع [۱۰] است.

قضیه۶.۲: فرض کنیم I و J ایده‌آلی از جبر لی L باشد. در این صورت

(۱) اگر $L=J+L^{2}$، آنگاه برای هر عدد صحیح مثبت n، $L=J+L^{n}$،

(۲) اگر $J\cap Z\left(L\right)=0$، آنگاه برای هر عدد صحیح مثبت n، $J\cap Z_{n}\left(L\right)=0$.

برهان: (۱) کافی است در لم ۶.۲ ایده آل I را برابر با L در نظر بگیریم.

(۲) با توجه به نتیجه ۲.۲ برای هر عدد صحیح مثبت n، داریم

$$\left[J\cap Z_{n+1}\left(L\right),L\right]\subseteq\left[Z_{n+1}\left(L\right),L\right]\subseteq Z_{n}\left(L\right).$$

با توجه به این که $J\cap Z_{n+1}\left(L\right)$ ایده آلی از L است، داریم. $\left[J\cap Z_{n+1}\left(L\right),L\right]\subseteq J\cap Z_{n}\left(L\right)$

فرض کنیم $x\in J\cap Z_{n+1}\left(L\right)$. با توجه به رابطه فوق به ازای هر $l\in L$، $\left[x,l\right]\in J\cap Z_{n}\left(L\right)$. با روند استقرایی روی n می‌توان فرض کرد $J\cap Z_{n}\left(L\right)=0$. یعنی $\left[x,l\right]=0$، لذا $x\in Z\left(L\right)$. از این رو $x\in J\cap Z\left(L\right)=0$، که این مطلب قسمت دوم قضیه را اثبات می‌کند.

قضیه زیر شبیه به نتیجه شناخته شده فیلیپ هال در نظریه گروه‌ها (قضیه ۳۶.۲۴ از مرجع [۱۱] را ببینید) و مشابه قضیه ۴.۲ از مرجع [۱۲] در حالت چند گونای گروه‌ها است. برهان ارائه شده کوتاه‌تر و متفاوت از برهان مراجع ذکر شده است.

قضیه۷.۲: فرض کنیم I ایده‌آلی نابدیهی از جبر لی پوچ توان L باشد. در این صورت $I\cap Z\left(L\right)\neq 0$.

برهان: چون L پوچ توان است، عدد صحیح و مثبتی مانند s موجود است به طوری که $L=Z_{s}\left(L\right)$. فرض کنیم $I\cap Z\left(L\right)=0$ باشد. بنابر قسمت دوم قضیه ۷.۲ داریم $I\cap Z_{s}\left(L\right)=0$، که این با رابطه $I\cap Z_{s}\left(L\right)=I$ در تناقض است.

نتیجه۸.۲: هر ایده‌آل کمین از یک جبر لی پوچ توان مشمول در مرکز آن جبر لی است.

۳. نتیجه‌گیری

در این مقاله با استفاده از تعریف سری‌های مرکزی پایینی و بالایی و مفهوم پوچ توانی در جبر لی، نتیجه‌هایی مشابه در نظریه گروه‌ها به دست آوردیم. به خصوص ثابت کردیم اگر I ایده‌آل نا بدیهی از جبر لی پوچ توان L باشد، آنگاه اشتراک I با مرکز L غیر بدیهی است که این مشابه با نتیجه شناخته شده فیلیپ هال در نظریه گروه‌ها است. اثبات ارائه شده متفاوت و کوتاه‌تر از مورد مشابه است. هم چنین نشان دادیم اگر I ایده‌آل کمین از جبر لی موضعاً پوچ توان L باشد، آنگاه $[I,L]$ بدیهی است.

فهرست منابع

[1] M. Araskhan and M. R. Rismanchian, Dimension of the c-nilpotent multiplier of Lie algebras Proc. Indian Acad. Sci. 126(3) (2016) 353–357.

[2] P. Hardy, On characterizing nilpotent Lie algebras by their multipliers III, Comm. Algebra 33 (2005) 4205–4210.

[3] M. R. Rismanchian and M. Araskhan, Some inequalities for the dimension of the Schur multiplier of a pair of (nilpotent) Lie Algebras, J. Algebra 352 (2012) 173–179.

[4] M. R. Rismanchian, M. Molavi and M. Araskhan, On dimension and homological methods of the (higher) Schur multiplier of a pair of Lie algebras, Comm. Algebra 45(11) (2017) 4707-4716.

[5] W. A. de Graaf, Lie algebras: Theory and algorithms, Elsevier, Amsterdam, New York, 2000.

[6] A. I. Malcev, On a general method for obtaining local theorems in group theory, Ivanov. Gos. Ped. Inst. Ucen. Zap. 1 (1941) 3-9.

[7] D. H. Mclain, On locally nilpotent groups, Proc. Cambridge Philos. Soc. 52 (1956) 5-11

[8] J. A. Hulse and J. C. Lennox, Marginal series in groups, Proc. Roy. Soc. Edinburgh 76A (1976) 139-154.

[9] D. J. S. Robinson, Finiteness conditions and generalized soluble groups, Pt 1. Springer-Verlag, Berlin, New York, 1972.

[10] N. S. Hekster, On the structure of n-isoclinism classes of groups, J. Pure Appl. Algebra 40 (1986) 63-85.

[11] H. Neumann, Varieties of groups, Springer-Verlag, Berlin, 1967.

[12] M. R. Rismanchian, ν-nilpotent groups and 5-term exact sequence, Comm. Algebra 42 (2014) 1559-1564.