

دسترسی در سایت <http://jnrm.srbiau.ac.ir>

سال پنجم، شماره هجدهم، خرداد و تیر ۱۳۹۸

شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸۸

JNRM

پژوهش‌های نوین در ریاضی



دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

# ارائه یک روش دو مرحله‌ای برای تعیین الگوی مناسب و بازده به مقیاس

## (مطالعه موردی: دبیرستان‌های دخترانه ناحیه یک شهرستان شیراز)

جواد گرامی\*

استادیار، گروه ریاضی، دانشکده علوم، واحد شیراز، دانشگاه آزاد اسلامی، شیراز، ایران.

تاریخ ارسال مقاله: ۹۶/۰۳/۲۵ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۸/۰۳/۲۳

### چکیده

در این مقاله به ارائه یک روش دو مرحله‌ای برای تعیین الگوی مناسب و بازده به مقیاس مجموعه‌ای از واحدهای تصمیم‌گیرنده می‌پردازیم. در ابتدا به یافتن همه مجموعه‌های مرجع کارا در تحلیل پوششی داده‌ها غیرشعاعی بر پایه برنامه‌ریزی خطی می‌پردازیم. ابتدا مدل بازه تعدیل شده غیر شعاعی را معرفی کرده و واحدها را با استفاده از این مدل ارزیابی می‌کنیم. سپس برای اجرای الگوریتم مورد نظر مراحل زیر را انجام می‌دهیم. در گام اول به معرفی سه نوع مجموعه مرجع می‌پردازیم و در گام دوم برای شناسایی همه مجموعه‌های مرجع ممکن برای یک واحد تصمیم‌گیرنده یک مسئله برنامه‌ریزی خطی منحصر به فرد که بر پایه روش اولیه - دوگانه می‌باشد، پیشنهاد می‌کنیم. در گام سوم بازده به مقیاس را در مدل تحلیل پوششی داده‌ها ی غیر شعاعی اندازه‌گیری می‌نماییم. در انتها برای نشان دادن کاربرد بودن این روش به ارزیابی و تحلیل کارایی دبیرستان‌های دخترانه ناحیه یک شهر شیراز می‌پردازیم و الگوی مناسب و بازده به مقیاس را برای این مجموعه از واحدهای تصمیم‌گیرنده ارائه می‌دهیم.

**واژه‌های کلیدی:** تحلیل پوششی داده‌ها، الگویابی، بازده به مقیاس، مجموعه مرجع کلی.

## ۱- مقدمه

استفاده مطلوب و بهین از منابع در دسترس بشر، همواره مورد نظر او بوده است. محدودیت‌های عواملی چون سرمایه، نیروی انسانی، انرژی و... مدیران را به فکر پیدا کردن روشی برای استفاده بهین از این عوامل وا داشت. در حقیقت اطلاع از عملکرد واحدهای تحت نظارت مدیر، مهمترین وظیفه مدیریت در رابطه با تصمیم‌گیری‌های مناسب، به منظور هدایت آنان است. پیچیدگی اطلاعات، حجم بسیار زیاد داده‌ها، اثرات عوامل بیرونی، محدود بودن واحدها در رابطه با تصمیم‌گیری‌های مناسب (مثلاً به دلیل دولتی بودن واحدها و...) از عواملی است که مدیر بدون برخورد علمی نمی‌تواند از کارکرد واحدها مطلع شود. لذا مدیر باید تصمیمات مناسبی را در راستای بهبود کارایی و اثر بخشی<sup>۱</sup> اتخاذ نماید. ارزیابی عملکرد سازمان‌ها در جهت‌گیری برای تصمیمات مدیریتی آنها نقش اساسی دارد. در این راستا می‌بایست میزان کارایی و بهره‌وری سازمان‌ها مورد محاسبه قرار گیرد تا از این طریق بتوان در تصمیم‌گیری‌های آتی روند رشد اقتصادی را نیز در نظر داشت. در عصر حاضر دستیابی به رشد اقتصادی از طریق ارتقاء بهره‌وری از مهم‌ترین اهداف کشورها به شمار می‌رود. ارتقاء بهره‌وری با استفاده از عوامل تولید حاصل می‌گردد و در نیل به رشد اقتصادی مستمر بر تولید پایدار نقش مهمی ایفا می‌کند. کارایی نشان می‌دهد که یک سازمان تا چه میزان از داده‌های ورودی خود به طور بهینه در جهت تولید خروجی‌ها استفاده کرده است و به عبارتی نشان دهنده «صحیح انجام دادن کار» است به این معنی که از حداقل ورودی‌ها، حداکثر خروجی‌ها بدست آید.

تحلیل پوششی داده‌ها از مجموعه مدل‌های ریاضی مبتنی بر برنامه‌ریزی خطی است که به مثابه ابزار قوی، یاری رسان مدیران سازمان‌ها است. تحلیل پوششی داده‌ها با اندازه‌گیری کارایی نسبی سازمان‌ها، آنها را رتبه‌بندی کرده و سپس با مشخص کردن نقاط ضعف و قوت هر کدام، پیشنهادهایی برای بهبود هر سازمان ارائه می‌کند (مهرگان [1]).

تحلیل پوششی داده‌ها  $DEA^2$  که توسط چارنر، [2] و چارنر، کوپر، رودز [3] بر اساس کار اثر گذار فارل [4]، معرفی شد، روشی مبتنی بر برنامه‌ریزی خطی (LP) برای اندازه‌گیری کارایی نسبی یک گروه همگن از واحدهای تصمیم‌گیرنده  $DMU^3$  با چند ورودی و چند خروجی است.

بر اساس داده‌های مشاهده شده و مجموعه‌ای از اصول موضوعه،  $DEA$  یک مجموعه امکان تولید مرجع که نسبت به آن یک  $DMU$  می‌تواند به عنوان کارا یا ناکارا طبقه‌بندی شود، را تعریف می‌کند. برای  $DMU$  ناکارا،  $DEA$  یک تصویر منحصر به فرد یا تصویرهای چندگانه در مرز کارا از مجموعه‌ی امکان تولید به رسمیت می‌شناسد. متناظر با هر تصویر، همچنین مجموعه‌ای از  $DMU$ های کارای مشاهده شده به غیر از آن  $DMU$  کارایی که به طور مستقیم با مورد تحت ارزیابی مقایسه شده‌است را شناسایی می‌کند. آن واحدهای تصمیم‌گیرنده کارا،  $DMU$ های مرجع نامیده می‌شوند و مجموعه مربوطه به عنوان یک مرجع در نظر گرفته می‌شود. شناسایی همه  $DMU$ های مرجع محتمل برای یک واحد ناکارا مسئله مهم و جالب توجه در  $DEA$  می‌باشد، که در این مقاله برای شناسایی مجموعه مرجع از مدل  $RAM^4$  استفاده کرده‌ایم (کوپر و همکاران [5]). از نقطه نظر مدیریتی در این دیدگاه، شناسایی همه واحدهای مرجع به طور خاص به دو دلیل مهم است. ابتدا، برای بهبود عملکرد یک  $DMU$  ناکارا، معرفی یک تصویر مشاهده نشده (مجازی) در عمل به عنوان معیار، منطقی نیست. در چنین موقعیتی، شناسایی همه مجموعه‌های مرجع امکان یافتن یک معیار عملی از بین  $DMU$ های مرجع را فراهم می‌کند. دوم، زمانی که برخی از  $DMU$ های مرجع (نه همه) برای یک واحد تحت ارزیابی شناسایی می‌شوند، تصمیم‌گیرنده ممکن است معتقد باشد که واحدهای تصمیم‌گیرنده مشخص شده دارای معیار مناسبی نیستند و مایل به انتخاب گزینه‌های بیشتری است. تلاش اولیه برای پیدا کردن همه واحدهای مرجع در مدل‌های

2. Data Envelopment analysis
3. Decision Making Unit
4. non-radial range-adjusted model

1. Effectiveness

مجموعه شامل واحدهای تصمیم‌گیرنده کارایی می‌باشد که در ترکیب محدب خاص تولیدکننده این تصویر فعال هستند. از آنجا که ممکن است URS‌های چندگانه (از این پس به عنوان مسئله نوع ۱ نامیده می‌شود) رخ دهد، مفهوم مجموعه‌ی مرجع ماکزیمال<sup>3</sup> (MRS) را معرفی می‌کنیم و آن را به عنوان اجتماع همه URS‌های مرتبط با تصویر ارائه شده تعیین می‌کنیم. چون در مدل RAM امکان وقوع تصویرهای متعدد (از این پس به عنوان مسئله نوع ۲ نامیده می‌شود)، وجود دارد، اجتماع همه MRS‌های مرتبط با همه این تصاویر را به عنوان مجموعه مرجع کلی منحصر به فرد<sup>4</sup> (GRS) مربوط به DMU ارزیابی شده، تعریف می‌کنیم. یک نکته جالب اینک: پوسته محدب<sup>5</sup> GRS با وجه می‌نیمم برابر است. مزایای معرفی سه نوع مجموعه مرجع (MRS, GRS, URS) در زیر خلاصه شده است.

- مفاهیم معرفی شده همه خوش تعریف هستند.
- URS و MRS به نشان دادن وقوع مجموعه‌های مرجع چندگانه، به ترتیب متناظر با یک تصویر یا تصویرهای متعدد کمک می‌کند.
- درحالی‌که ممکن است چندگانگی برای URS و MRS رخ دهد، GRS مجموعه‌ی مرجع منحصر به فردی که شامل تمام واحدهای تصمیم‌گیرنده مرجع محتمل می‌باشد را ارائه می‌دهد.
- به عنوان قدم دوم، یک مدل LP پیشنهاد داده‌ایم که GRS را شناسایی می‌کند و تصویری در درون نسبی وجه مینیمم به دست می‌آورد. این روش دارای چندین ویژگی مهم است.
- اول می‌تواند به طور موثری، همزمان به وقوع مسئله‌های نوع ۱ و ۲ رسیدگی کند.
- دوم، این روش شامل حل یک مسئله LP منحصر بفرد است که باعث می‌شود بخاطر اجرای آسان آن در کاربردهای عملی کارآمدتر از روش‌های موجود باشد.
- سوم، کارایی محاسباتی این روش نسبت به اولیه – دوگان‌های قبلی بالاتر است، زیرا بر اساس فرم اولیه

DEA غیر شعاعی توسط (سویوشی و سکیسانی [6]) انجام شد. براساس قضیه مکمل زائد<sup>1</sup> (SCSCs) از برنامه‌ریزی خطی، آنها یک روش مبتنی بر اولیه-دوگان با استفاده از مدل RAM پیشنهاد کردند. با این حال همانطور که کریونوسکو، فورسوند و لایچیو [7] استدلال کرده‌اند، نه تنها بار محاسباتی رویکرد سویوشی و سکیسانی [8] بالا می‌باشد، همچنین به نظر می‌رسد که ماتریس‌های پایه تعریف شده در این رویکرد به احتمال زیاد نامطلوب بوده، منجر به نتایج نادرست و غیرقابل قبول می‌شود. از این رو تفسیر اقتصادی برخی از محدودیت‌های مدل پیشنهادی بی‌معنی است، برای غلبه بر این مشکلات، کریونوسکو و همکارانش [9] یک روش مبتنی بر اولیه-دوگان بر اساس حل مسائل LP مختلف پیشنهاد کرده‌اند. با استفاده از آزمایش‌های محاسباتی، آنها نشان دادند که روش پیشنهادی، در مجموعه داده‌های زندگی واقعی، قابل اعتماد و کارآمد است و بهتر از رویکرد سویوشی و سکیسانی [8] کار می‌کند.

شایان ذکر است که روش انجام شده توسط سویوشی و سکیسانی [8] و کریونوسکو و همکاران، [9] دقیقاً تمام DMU‌های مشاهده شده را روی وجه می‌نیمم-یک وجه از بعد می‌نیمم که همه‌ی تصاویر در آن واقع شده است، به عنوان یک مجموعه مرجع منحصر به فرد از DMU بنا می‌کند. از سوی دیگر هر دو این مطالعات به امکان وقوع مجموعه‌های مرجع چندگانه اشاره کرده‌اند. با این حال، هیچ یک از آنها به صراحت تمایز روشنی بین مجموعه مرجع منحصر به فرد ساخته شده و سایر انواع مرجع تعیین شده که ممکن است چندگانه، رخ دهند را پیدا نکرده‌اند. این عدم تبعیض، در مورد منحصر به فردی و در نتیجه، در مورد خوش تعریفی تعیین مجموعه‌ی مرجع، ابهام ایجاد می‌کند.

بنابراین، برای از بین بردن این ابهام، سه نوع از مجموعه مرجع پی در پی را پیشنهاد کرده‌ایم، به عنوان اولین قدم، در ارتباط با تصویر داده شده، برای اولین بار مفهوم مجموعه مرجع یگانی<sup>2</sup> (URS) را معرفی می‌کنیم. این

3. Maximal Reference Set  
4. Global Reference Set  
5. Conv(GRS)

1. Strong Complementary Slackness Conditions(SCSCs)  
2. Unary Reference Set

کننده از MRS مربوط به این تصویر عبور می‌کنند و می‌توانند از لحاظ ریاضی از طریق این MRS مشخص گردند. بنابراین، مسئله نوع ۲ باعث وقوع ابرصفحه‌های تکیه کننده چندگانه می‌شود (از این به بعد به عنوان مسئله نوع ۳ نامیده می‌شود). که اندازه‌گیری RTS را مشکل می‌سازد. چنین مشکلی می‌تواند به طور مناسب با استفاده از یک نقطه درونی نسبی از وجه می‌نیم برای اندازه‌گیری RTS رفع شود. چون ابرصفحه‌های تکیه کننده متصل به این نقطه از طریق GRS و نه از طریق یک MRS خاص مشخص می‌شوند. با این وجود منحصر به فرد بودن ابرصفحه‌های تکیه کننده مشخص شده، هنوز نمی‌توانند تضمین شوند، چرا که وجه می‌نیم ممکن است یک وجه کارا از بعد کامل نباشد، (اولسن و پترسن [18]، اولسن و پترسن [19]). در مجموع مشکل ناشی شده از مسئله نوع ۳ در اندازه‌گیری RTS، از مسئله نوع ۲ و یا از کامل نبودن بعد وجه می‌نیم نشأت می‌گیرد. برای رسیدگی به این مشکل، یک روش دو مرحله‌ای برای اندازه‌گیری RTS را با استفاده از مطالعه قوی کریونوسکو و همکارانش [9] ایجاد کردیم. در مرحله اول مشکل ناشی از مسئله نوع ۲ را با پیدا کردن یک نقطه درونی نسبی از وجه می‌نیم از طریق مسئله LP که برای شناسایی GRS پیشنهاد شده، حل می‌کنیم. سپس برای نقطه بدست آمده، از روش غیر مستقیم بنکر - ترال و همکاران [20] استفاده می‌کنیم. ادامه این مقاله بصورت زیر سازماندهی شده است، در بخش دوم مفاهیم اولیه مقاله را تشریح می‌کنیم. در بخش سوم به معرفی و تعیین مجموعه مرجع کلی در تحلیل پوششی داده‌ها می‌پردازیم. در بخش چهارم روش پیشنهادی دو مرحله‌ای برای تعیین بازده به مقیاس را ارائه می‌دهیم. در بخش پنجم به ارزیابی و تعیین الگو و بازده به مقیاس مجموعه‌ای از واحدهای تصمیم‌گیرنده شامل دبیرستان‌های دخترانه شهرستان شیراز می‌پردازیم و در انتها نتایج حاصل از تحقیق را ارائه می‌دهیم.

## ۲- مفاهیم اولیه

$n$  واحد تصمیم‌گیرنده  $\{(X_j, Y_j) | j \in J = \{1, \dots, n\}\}$  را در نظر بگیرید که در آن  $X_j = (x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{mj}) \in R_{\geq 0}^m$

(پوششی) ایجاد شده است که از نظر محاسباتی کارآمدتر از فرم‌های دوگان (چندگانه) می‌باشد، (کوپر و همکاران [10]) چهارم، از آنجایی که مسئله LP پیشنهادی، شامل چندین متغیر با کران بالا می‌باشد، کارایی محاسباتی آن می‌تواند با استفاده از الگوریتم سیمپلکس طراحی شده برای حل مسائل LP با متغیرهای کران بالا افزایش یابد، که بسیار کارآمدتر از الگوریتم سیمپلکس عادی می‌باشد، (وینستون [11]).

پنجم، این روش می‌تواند به آسانی و بدون هیچ گونه تغییر، در مدل جمعی (چارنر و همکاران [12]) استفاده شود. زیرا تفاوت بین این مدل و مدل RAM تنها در وزن‌های اختصاص یافته به اسلک‌های ورودی و خروجی در تابع هدف، می‌باشد. با برخی تغییرات جزئی می‌توان از این روش در مدل RAM/BCC (آیدا، کوپر، پاستور و سویوشی [13])، مدل DSMB از جهان‌شاهلو، حسین زاده لطفی، مهدیلوزاد و رشدی [14] و مدل GMDDF از مهدیلوزاد، ساهو و رشدی [15] استفاده کرد.

به علاوه، این روش می‌تواند به راحتی در هر مدل شعاعی DEA مانند مدل BCC از (بنکر و همکاران [16]) البته با برخی تغییرات جزئی اجرا گردد. در نهایت این روش از فرض این محدودیت که داده‌های ورودی - خروجی باید نامنفی باشند، آزاد است، پس می‌تواند به طور موثری به داده‌های منفی رسیدگی نماید. این کار می‌تواند از نقطه نظر عملی بسیار سودمند باشد. چرا که در بسیاری از برنامه‌های کاربردی، ورودی و یا خروجی‌های منفی می‌توانند ظاهر شوند. برای مثال می‌توان به مقالات پژوهشی پاستور و رویز [17] برای ارائه مثال‌های مختلفی از کاربردهای این روش با داده‌های منفی اشاره کرد.

قدم سوم در این مطالعه، اندازه‌گیری RTS در تنظیمات DEA غیر شعاعی است. چنانچه می‌دانیم، مفهوم RTS تنها زمانی معنی‌دار است که DMU مربوطه در مرز مجموعه‌ی امکان تولید، قرار گیرد. بنابراین، برای یک DMU ناکارا، بایستی تصویر کارایی در نظر گرفته شود. در این مورد، نوع و مقدار RTS از طریق موقعیت(های) ابر صفحه(های) تکیه کننده مجموعه امکان تولید در تصویر مورد استفاده، تعیین می‌شود. ابرصفحه‌های تکیه

مدل ماهیت ورودی BCC در فرم مضربی به صورت زیر است، (بنکر و همکاران [16]).

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & \sum_{r=1}^s u_r y_{ro} - u_0 \\ \text{St.} \quad & \sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \\ & + u_0 \leq 0, j = 1, \dots, n, \\ & \sum_{i=1}^m v_i x_{io} = 1, \\ & u_r \geq 0, \quad r = 1, \dots, s, \\ & v_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (3)$$

### ۲-۲- مدل RAM

فرض کنید  $DMU_0$  واحد تحت ارزیابی باشد، مدل RAM با توجه به ساختار مجموعه  $T_{VRS}^{DEA}$  به صورت زیر ارائه می‌گردد. (کوپر و همکاران [5]).

$$\begin{aligned} \rho_o = \min \quad & 1 - \frac{1}{m+s} \left\{ \sum_{i=1}^m \frac{s_i^-}{R_i^-} + \sum_{r=1}^s \frac{s_r^+}{R_r^+} \right\} \\ \text{St.} \quad & \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} + s_i^- = x_{io}, \quad i = 1, \dots, m, \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = y_{ro}, \quad r = 1, \dots, s, \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \\ & \lambda_j \geq 0, j \in J, s_i^-, s_r^+ \geq 0, \forall i, r, \end{aligned} \quad (4)$$

که  $s_i^-$  (به ازای هر  $i$ ) و  $s_r^+$  (به ازای هر  $r$ ) به ترتیب نشان‌دهنده ورودی هدر رفته  $i$  ام و کمبود خروجی  $r$  ام می‌باشد. در اینجا  $R_i^-$  (به ازای هر  $i$ ) و  $R_r^+$  (به ازای هر  $r$ ) به ترتیب دامنه‌های تعریف شده بوسیله کمترین و بیشترین مقادیر مشاهده شده در ورودی  $i$  ام و خروجی  $r$  ام می‌باشند.

$$\begin{aligned} R_i^- &= \max_{j \in J} \{x_{ij}\} - \min_{j \in J} \{x_{ij}\}, i = 1, \dots, m \\ R_r^+ &= \max_{j \in J} \{y_{rj}\} - \min_{j \in J} \{y_{rj}\}, r = 1, \dots, s. \end{aligned} \quad (5)$$

و  $Y_j = (y_{1j}, y_{2j}, \dots, y_{sj}) \in R_{\geq 0}^s$  بردار مقادیر ورودی‌ها و خروجی‌های  $DMU_j, j = 1, \dots, n$  باشند و  $X_j \geq 0, Y_j \neq 0, Y_j \geq 0, X_j \neq 0$  مجموعه امکان تولید که آن را با  $T$  نمایش می‌دهیم چنین تعریف می‌شود:

$$T = \left\{ (X, Y) \left| \begin{array}{l} \text{خروجی } Y \text{ بتواند} \\ \text{توسط ورودی } X \text{ تولید شود} \end{array} \right. \right\}$$

$$T_{VRS}^{DEA} = \left\{ (X, Y) \in R_{\geq 0}^{m+s} \left| \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n \lambda_j X_j \leq X \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j Y_j \geq Y \end{array} \right. \right\} \quad (1)$$

تعریف فوق با توجه به تکنولوژی تولید، مجموعه امکان تولید را مشخص می‌کند. با پذیرش اصل بازده به مقیاس، متغیر مجموعه امکان تولید  $T$  به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} T_{VRS}^{DEA} &= \left\{ (X, Y) \in R_{\geq 0}^{m+s} \left| \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n \lambda_j X_j \leq X \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j Y_j \geq Y \end{array} \right. \right\} \\ &\& \sum_{j=1}^n \lambda_j Y_j \geq Y_j \& \\ &\left. \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0 \right\} \end{aligned}$$

آن را با  $T_V$  نشان می‌دهند. (بنکر و همکاران [16]).

### ۲-۱- مدل BCC با ماهیت ورودی

فرض کنید واحد تحت ارزیابی  $DMU_0$  است. در ماهیت ورودی به دنبال ترکیب محدبی از  $DMU$ ها هستیم به طوری که همان خروجی را با حداقل ورودی ممکن تولید کند. مدل ماهیت ورودی BCC با توجه به تعریف  $T_{VRS}^{DEA}$  در فرم پوششی بصورت زیر ارائه گردید. (بنکر و همکاران [16]).

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \theta - \varepsilon \left( \sum_{i=1}^m s_i^- + \sum_{r=1}^s s_r^+ \right) \\ \text{St.} \quad & \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} + s_i^- = \theta x_{io}, i = 1, \dots, m \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = y_{ro}, r = 1, \dots, s \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \\ & \lambda_j \geq 0, s_i^- \geq 0, s_r^+ \geq 0, j = 1, \dots, n, \\ & i = 1, \dots, m, r = 1, \dots, s. \end{aligned} \quad (2)$$

**۲-۲-۱- تعریف RAM کارا**

$DMU_0$ . RAM کارا گفته می‌شود اگر و تنها اگر،  $\rho_0 = 1$  و همه اسلک‌ها در بهینگی مدل (۴) صفر باشند، (براکت و همکاران [21]). اگر  $(\lambda^*, s^{*-}, s^{*+})$  جواب بهینه مدل (۴) باشد، آنگاه تصویر  $DMU_0$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$P = (\hat{x}_o, \hat{y}_o) = (x_o - s^{*-}, y_o + s^{*+}) = \sum_{j \in J} \lambda_j (x_j, y_j) \quad (6)$$

این تصویر RAM کارا است.

**۲-۳- بازده به مقیاس**

بازده به مقیاس بیانگر پیوند بین تغییرات ورودی‌ها و خروجی‌های یک سیستم می‌باشد. یکی از توانایی‌های روش DEA، کاربرد الگوهای مختلف متناظر با بازده به مقیاس‌های متفاوت و همچنین اندازه‌گیری بازده به مقیاس واحدهاست.

**الف- بازده به مقیاس ثابت:** یعنی هر مضربی از ورودی‌ها همان مضرب از خروجی‌ها را تولید می‌کند. الگوی CCR بازده به مقیاس واحدها را ثابت فرض می‌کند. بنابراین واحدهای کوچک و بزرگ با هم مقایسه می‌شوند.

**ب- بازده به مقیاس متغیر:** یعنی هر مضربی از ورودی‌ها، می‌تواند همان مضرب از خروجی‌ها یا کمتر از آن و یا بیشتر از آن را، در خروجی‌ها تولید کند. الگوی BCC بازده به مقیاس را متغیر فرض می‌کند، (بنکر و ترال [20])

**۲-۳-۱- بازده به مقیاس از دید بنکر:**

برای تعیین بازده به مقیاس با استفاده از مدل مضربی BCC در ابتدا این مدل (۳) را حل می‌کنیم. برای تعیین بازده به مقیاس قضیه زیر را داریم. (ببینید: تن [22])

**قضیه ۱:** فرض می‌کنیم که  $(x_o, y_o)$  یک DMU روی مرز کارای  $T_{VRS}^{DEA}$  باشد و  $(U^*, V^*, u_o^*)$  جواب بهینه مدل (۳) باشد:

الف)  $(x_o, y_o)$  بازده به مقیاس ثابت دارد اگر و تنها اگر  $u_o^* = 0$  در یکی از جوابهای بهینه مدل (۳) در ارزیابی  $(x_o, y_o)$ .

ب)  $(x_o, y_o)$  بازده به مقیاس افزایشی دارد اگر و تنها اگر  $u_o^* < 0$  در تمام جوابهای بهینه مدل (۳) در ارزیابی  $(x_o, y_o)$ .

پ)  $(x_o, y_o)$  بازده به مقیاس کاهششی دارد اگر و تنها اگر  $u_o^* > 0$  در تمام جوابهای بهینه مدل (۳) در ارزیابی  $(x_o, y_o)$ .

در صورتی که در ارزیابی  $(x_o, y_o)$  جواب بهینه منحصر به فرد نباشد، برای تعیین کلاس بازده به مقیاس در ابتدا مقادیر  $u^+$  و  $u^-$  (مقادیر حداکثر و حداقل  $u_o$  با توجه به مجموعه جوابهای بهینه مدل (۳)) را تعیین می‌کنیم. برای تعیین بازده به مقیاس قضیه زیر را داریم. (ببینید: تن [22])

**قضیه ۲:** فرض می‌کنیم که  $(x_o, y_o)$  یک DMU روی مرز کارای  $T_{VRS}^{DEA}$  باشد و  $u^+$  و  $u^-$  بترتیب مقادیر حداکثر و حداقل  $u_o$  با توجه به مجموعه جوابهای بهینه مدل (۳) باشند، در اینصورت:

الف)  $(x_o, y_o)$  بازده به مقیاس ثابت دارد اگر و تنها اگر  $u^- \leq 0 \leq u^+$ .

ب)  $(x_o, y_o)$  بازده به مقیاس افزایشی دارد اگر و تنها اگر  $u^+ < 0$ .

پ)  $(x_o, y_o)$  بازده به مقیاس کاهششی دارد اگر و تنها اگر  $u^- > 0$ .

تا به حال بازده به مقیاس واحدهایی بررسی شد که روی مرز قرار داشتند، یعنی متعلق به  $\partial T_V$  بودند. در اینجا فرض می‌کنیم که  $(x_o, y_o)$  یک DMU دلخواه از  $T_{VRS}^{DEA}$  باشد، ابتدا با بکار بردن مدل پوششی BCC ماهیت ورودی  $(x_o, y_o)$  را مورد ارزیابی قرار می‌دهیم. فرض کنید  $(\theta^*, \lambda^*, s^{*-}, s^{*+})$   $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_n^*)$ ،  $s^{*-} = (s_1^{*-}, s_2^{*-}, \dots, s_m^{*-})$ ،  $s^{*+} = (s_1^{*+}, s_2^{*+}, \dots, s_s^{*+})$  جواب بهینه مدل فوق باشد، تصویر واحد تصمیم‌گیرنده  $(x_o, y_o)$  که روی مرز قرار دارد و آن را با P نشان می‌دهیم، به صورت زیر است.

$$\hat{X} = \theta^* X_o - s^{*-}$$

$$\hat{Y} = Y_o + s^{+*} \quad (۷)$$

در این حالت برای تعیین کلاس بازده به مقیاس قضایای بالا را برای تصویر واحد تصمیم‌گیرنده  $(x_o, y_o)$  یعنی  $(\hat{x}_o, \hat{y}_o)$  که روی مرز قرار دارد و کارا می‌باشد، بکار می‌بریم و کلاس بازده به مقیاس را تعیین می‌کنیم.

### ۳- شناسایی مجموعه مرجع کلی

در این قسمت به ارائه بحث و تعاریف کلیدی، مفاهیم و نتایجی که برای شرح و توضیح روش پیشنهادی ضروری است می‌پردازیم.

#### ۳-۱- تعریف URS

ابتدا هر واحد تصمیم‌گیرنده را به کمک مدل RAM ارزیابی می‌کنیم. این واحد کارا یا ناکارا ارزیابی می‌شود. اگر کارا باشد، بدین معنی است که وضعیت فعلی آن واحد خوب است و اگر واحد ناکارا باشد باید از واحدهای کارا الگوبرداری کند و وضعیت خود را بهبود دهد. فرض کنیم واحد  $DMU_o$  ناکارا باشد. برای الگوبرداری از واحدهای کارا ابتدا این  $DMU_o$  را بر مجموعه امکان تولید تصویر می‌کنیم. این تصویر را می‌توان به صورت ترکیب محدب چندگانه از  $DMU$ های مرجع نوشت که آن مجموعه‌های مرجع URSهای تصویر مورد نظر می‌باشند. بنابراین اگر فرض کنیم  $(\lambda^*, s^-, s^+)$  جواب بهینه مدل (۴) متناظر با تصویر بدست آمده در ارزیابی واحد تصمیم‌گیرنده  $(x_o, y_o)$  باشد، مجموعه  $DMU$ ها با  $\lambda_j^*$  مثبت را به عنوان مجموعه مرجع یگانی (URS) برای  $DMU_o$  به صورت زیر تعریف می‌کنیم و آن را با  $R_{op}^*$  نشان می‌دهیم.

$$R_{op}^* = \{DMU_j | \lambda_j^* > 0\}.$$

هر کدام از اعضای  $R_{op}^*$  را به عنوان یک  $DMU$  مرجع برای  $DMU_o$  تعیین می‌نماییم. تمام واحدهای مرجع  $DMU_o$ ، RAM کارا می‌باشند و بر روی ابرصفحه‌های تکیه‌کننده  $T_{VRS}^{DEA}$  واقع شده‌اند. از آنجایی که تصویر P بدست آمده ممکن است به صورت ترکیب محدب

چندگانه از  $DMU$ های مرجع مربوط به خودش نشان داده‌شود، احتمال وقوع مقادیر بهینه چندگانه برای بردار  $\lambda$  که منجر به ایجاد URSهای چندگانه (از این بعد آن را مسئله نوع ۱ می‌نامیم) می‌شود، وجود دارد. در این شرایط محاسبه بازده به مقیاس از طریق روش تن [23] دشوار و پیچیده می‌باشد. برای رفع مشکل وقوع URSهای چندگانه برای تصویر P داده‌شده، به توصیف مجموعه مرجعی شامل همه URSهای ممکن احتیاج داریم.

#### ۳-۲- تعریف MRS

در قسمت قبل برای نقطه تصویر P هر  $DMU_o$  که می‌توانست امکان‌پذیر باشد را پیدا کردیم. حال اجتماع همه URSهای مربوط به تصویر P داده شده را به عنوان مجموعه مرجع ماکزیمال (MRS) برای  $DMU_o$  تعریف می‌کنیم و آن را با  $R_{op}^M$  نمایش می‌دهیم. در بعضی از جواب‌های  $\lambda_j^* > 0$ ،  $R_{op}^M = \{DMU_j | \lambda_j^* > 0, \text{ بهینه مدل (۴) مرتبط با تصویر P}\}$  (۸)

از آنجایی که مدل RAM ماهیت غیر شعاعی دارد، ممکن است تصویرهای چندگانه برای  $DMU_o$  تولید کند، که منتج به وقوع MRSهای چندگانه (که از این به بعد آن را مسئله نوع ۲ می‌نامیم) می‌شود. برای حل مشکل وقوع MRSهای چندگانه، از مفهوم وجه می‌نیم استفاده می‌کنیم. ابتدا، مجموعه‌ای از جواب‌های بهینه مدل (۴) با نام  $\Omega_o$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم. به اینصورت که  $J_E$  مجموعه اندیس همه  $DMU$ های RAM کارا می‌باشد. در اینصورت مجموعه همه تصویرهای  $DMU_o$ ، به عنوان مجموع تصویر را می‌توان به صورت مجموعه  $\Lambda_o$  نشان داد.

همانگونه که توسط کریونوسکو و همکاران [9] ثابت شده است، وجهی از بعد می‌نیم مانند  $\Gamma_o^{min}$  وجود دارد که شامل مجموعه تصویر  $\Lambda_o$  می‌باشد. این وجه همان وجه می‌نیم است و در حقیقت فصل مشترک تمام وجه‌های  $T_{VRS}^{DEA}$  است که شامل  $\Lambda_o$  می‌باشد.

**قضیه ۳:** وجه می‌نیمم با پوسته محدب GRS برابر است با  $\Gamma_o^{\min} = \text{conv}(R_o^G)$

**اثبات:** همان طور که می‌دانیم،  $\text{conv}(R_o^G)$  یک وجه قوی از  $T_{VRS}^{DEA}$  است که شامل  $\Lambda_o$  می‌باشد. بنابراین با توجه به تعریف  $\Gamma_o^{\min}$  کافی است نشان دهیم  $\text{conv}(R_o^G) \subseteq \Gamma_o^{\min}$ . با توجه به تعریف وجه، یک ابر صفحه مانند  $H^{\min}$  وجود دارد که  $\Gamma_o^{\min} = H^{\min} \cap T_{VRS}^{DEA}$ . از آن جا که  $H^{\min}$  در هر تصویر فعال است، از همه DMUهای درون  $R_o^G$  می‌گذرد. در اینصورت، تحدب  $H^{\min}$  نتیجه می‌دهد که  $\text{conv}(R_o^G) \subseteq H^{\min}$  و اثبات را کامل می‌شود. □

با توجه به قضیه ۴ نمایش روشنی از وجه می‌نیمم به صورت زیر بدست می‌آید.

$$\Gamma_o^{\min} = \left\{ (x, y) \mid \begin{aligned} x &= \sum_{j \in J_o^G} \lambda_j x_j, \\ y &= \sum_{j \in J_o^G} \lambda_j y_j, \sum_{j \in J_o^G} \lambda_j = 1, \\ \lambda_j &\geq 0, \forall j \in J_o^G \end{aligned} \right\}, \quad (13)$$

جایی که  $J_o^G \in J_E$  مجموعه اندیس DMUها در  $R_o^G$  می‌باشد. باید توجه داشت که وجه می‌نیمم یک چند سقفی می‌باشد.

با توجه به قضیه (۴)  $DMU_k$  یک واحد مرجع برای  $DMU_o$  می‌باشد، اگر و فقط اگر  $(\lambda, s^-, s^+) \in \Omega_o$  وجود داشته باشد به طوری که  $\lambda_k > 0$  با توجه به تعریف:

$$R_o^G = \bigcup_{(\lambda, s^-, s^+) \in \Omega_o} \{DMU_j \mid \lambda_j > 0\}$$

**قضیه ۴:** اگر  $(\lambda', s'^-, s'^+)$  متعلق به  $\Omega_o$  باشد به طوریکه  $\lambda'$  دارای ماکزیمم تعداد مؤلفه‌های مثبت است آنگاه،

$$R_o^G = \{DMU_j \mid \lambda'_j > 0\} \quad (14)$$

$$\Omega_o = \left\{ (\lambda, s^-, s^+) \mid \begin{aligned} \sum_{j \in J_E} \lambda_j x_{ij} + s_i^- &= x_{io}, \\ i &= 1, \dots, m, \\ \sum_{j \in J_E} \lambda_j y_{rj} - s_r^+ &= y_{ro}, \\ r &= 1, \dots, s, \\ \sum_{j \in J_E} \lambda_j &= 1, \\ \sum_{i=1}^m \frac{s_i^-}{R_i^-} + \sum_{r=1}^s \frac{s_r^+}{R_r^+} &= (m+s)(1-\rho_0), \\ \lambda_j &\geq 0, j \in J_E, \\ s_i^-, s_r^+ &\geq 0, \forall i, r, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$\Lambda_o = \left\{ (x_o, -s^-, y_o, +s^+) \mid (\lambda, s^-, s^+) \in \Omega_o \right\}. \quad (10)$$

$$\Gamma_o^{\min} = \bigcap_{\substack{F \text{ is a face of } T_{VRS}^{DEA} \\ \text{and } \Lambda_o \subseteq F}} F \quad (11)$$

اکنون مفهوم بعدی که وقوع MRSهای چندگانه متناظر با تصویرهای چندگانه را مورد مطالعه قرار می‌دهد، معرفی می‌کنیم.

### ۳-۳- تعریف GRS

اجتماع همه‌ی MRSهای متناظر هر تصویر  $DMU_o$  را به عنوان مجموعه مرجع کلی آن (GRS) تعریف نموده و آن را با نماد  $R_o^G$  نشان می‌دهیم.

$$R_o^G = \bigcup_{p \in \Lambda_o} R_{op}^M \quad (12)$$

مفهوم URS و MRS، متناظر با یک تصویر خاص در نظر گرفته می‌شود اما مفهوم GRS متناظر همه تصویرهای ممکن برای  $DMU_o$  می‌باشد. وقتی مدل RAM را حل می‌کنیم همیشه یک تصویر دلخواه و یک URS دلخواه تولید می‌کند. اما ما به دنبال یافتن همه مجموعه‌های مرجع ممکن برای  $DMU_o$  هستیم. بنابراین هدف ما یافتن راه حلی برای پیدا کردن GRS است.



و  $u'$  دارای ماکزیمم تعداد مؤلفه‌های مثبت می‌باشد.

$$\max \sum_{j=1}^{q_1+1} w_j$$

$$\text{St.} \quad \sum_{j=1}^{q_1} a_j (u_j + w_j) + \sum_{j=1}^{q_2} b_j v_j$$

$$-d(u_{q_1+1} + w_{q_1+1}) = 0, \quad (16)$$

$$0 \leq w_j \leq 1, u_j \geq 0, j = 1, \dots, q_1 + 1,$$

$$v_j \geq 0, j = 1, \dots, q_2.$$

**اثبات:** فرض کنید  $(u_j^* + w_j^*, j = 1, \dots, q_1 + 1, v_j^*, j = 1, \dots, q_2)$  یک جواب بهینه برای مسئله (۱۶) باشد، این جواب، ماکزیمم تعداد مؤلفه‌های مثبت را دارد. بنابراین با فرض  $X \neq \emptyset$  در نتیجه محدودیت اول (۱۶) در بهینگی می‌تواند به صورت معادل زیر باز نویسی شود.

$$\sum_{j=1}^{q_1} a_j \left( \frac{u_j^* + w_j^*}{u_{q_1+1}^* + w_{q_1+1}^*} \right) + \sum_{j=1}^{q_2} b_j \left( \frac{v_j^*}{u_{q_1+1}^* + w_{q_1+1}^*} \right) = d \quad (17)$$

که اثبات را کامل می‌کند. بر اساس قضیه بالا، از LP زیر برای یافتن GRS استفاده می‌نماییم. در ابتدا مدل زیر را حل می‌کنیم. که t نشان دهنده عدد اصلی  $J_E$  می‌باشد به طور مثال  $J_E = \{j_1, \dots, j_t\}$  فرض می‌کنیم  $(\lambda_{j_k}^*, \mu_{j_k}^*, s_i^-, s_r^+, \forall k, i, r)$  جواب بهینه مدل (۱۸) باشد.

$$\max \sum_{j \in J_E} \mu_j + \mu_{j_{t+1}},$$

$$\text{St.} \quad \sum_{j \in J_E} (\lambda_j + \mu_j) x_{ij} + s_i^- - (\lambda_{j_{t+1}} + \mu_{j_{t+1}}) x_{io} = 0, i = 1, \dots, m,$$

$$\sum_{j \in J_E} (\lambda_j + \mu_j) y_{rj} - s_r^+$$

**اثبات:** با فرض اینکه  $(\lambda', s^-, s^+) \in \Omega_0$  باشد. از این رو از (۱۳) تنها کافی است ثابت کنیم  $R_0^G \subseteq \{DMU_j | \lambda_j' > 0\}$  است که معادل است با این که نشان دهیم،  $\lambda$  مقادیر مثبت هر مؤلفه مثبت  $\lambda$  در هر  $(\lambda, s^-, s^+) \in \Omega_0$  را می‌گیرد. به روش برهان خلف، فرض کنید که یک عضو  $j_h \in \Omega_0$  و  $(\lambda'', s^-, s^+) \in \Omega_0$  و یک اندیس  $j_h \in \{j | \lambda_j'' > 0\}$  که برای آن  $\lambda''_{j_h} = 0$  وجود دارد: آن گاه فرض کنید که  $(\hat{\lambda}, \hat{s}^-, \hat{s}^+) \in \Omega_0$  یک ترکیب محدب اکید از عناصر  $(\lambda', s^-, s^+) \in \Omega_0$  و  $(\lambda'', s^-, s^+) \in \Omega_0$  باشد. از آن جا که  $\Omega_0$  محدب است،  $(\hat{\lambda}, \hat{s}^-, \hat{s}^+) \in \Omega_0$  و  $\{j | \lambda_j'' > 0\} \cup \{j | \lambda_j' > 0\} = \{j | \hat{\lambda}_j > 0\}$  در نتیجه  $\{j | \lambda_j' > 0\} \subseteq \{j | \hat{\lambda}_j > 0\}$  که با فرض  $\lambda'$  ماکزیمم تعداد مؤلفه‌های مثبت را دارد در تناقض است. بنابراین اثبات کامل است.

### ۳-۴- شناسایی مجموعه مرجع کلی

یک روش برای شناسایی کردن GRS در واقع یافتن عضوی به طور مثال  $(\lambda', s^-, s^+)$  از  $\Omega_0$  می‌باشد، به طوریکه تعداد مؤلفه‌های مثبت  $\lambda'$  ماکزیمم باشد.

**قضیه ۵:** فرض کنیم  $X$  مجموعه‌ای ناتهی از جواب‌های شدنی دستگاه معادلات ناهمگن زیر باشد.

$$Au + Bv = d, u \geq 0, v \geq 0, \quad (15)$$

اگر

$$(u_j^*, w_j^*, j = 1, \dots, q_1 + 1, v_j^*, j = 1, \dots, q_2)$$

جواب بهینه برای مسئله (۱۶) باشد. آنگاه

$$(u'_j := \frac{u_j^* + w_j^*}{u_{q_1+1}^* + w_{q_1+1}^*}, j = 1, \dots, q_1,$$

$$v'_j := \frac{v_j^*}{u_{q_1+1}^* + w_{q_1+1}^*}, j = 1, \dots, q_2) \in X$$

#### ۴- روش پیشنهادی دو مرحله‌ای برای تعیین بازده به مقیاس

همانطور که می‌دانید، واژه RTS تنها زمانی معنادار می‌باشد که DMU مربوطه بر روی مرز مجموعه امکان تولید قرار گرفته باشد. بنابراین برای یک  $DMU_0$  ناکارا، باید تصویری کارا در نظر گرفت. در این حالت نوع و اندازه RTS برای  $DMU_0$  بوسیله موقعیت(های) ابرصفحه(های) تکیه کننده  $TVRS^{DEA}$  در تصویر استفاده شده تعیین می‌گردد. این ابر صفحه(های) تکیه کننده از MRS مرتبط با این تصویر عبور می‌کنند و می‌توانند از لحاظ ریاضی از طریق این MRS مشخص شوند.

اگر  $DMU_0$  ناکارا باشد ابتدا آن را روی مرز کارایی تصویر می‌کنیم و بازده به مقیاس آن را بازده به مقیاس تصویر روی مرز کارایی تعریف می‌کنیم. اگر  $DMU_0$  ناکارا دارای یک تصویر منحصر به فرد باشد مشکلی پیش نمی‌آید و بازده به مقیاس آن همان بازده به مقیاس تصویر بدست آمده است. اما اگر  $DMU_0$  ناکارا دارای تصویر چندگانه باشد در این صورت ممکن است بازده به مقیاس مختلفی برای هر تصویر بدست آید و این تعریف مشکل ساز است. زیرا خوش تعریف نیست. اگر  $DMU_0$  ناکارا را روی مرز کارایی تصویر کنیم یک وجه مینیمم شامل این تصویر داریم. همه نقاط درون نسبی وجه مینیمم بازده به مقیاس یکسان دارند. پس هدف پیدا کردن یک نقطه درون نسبی وجه مینیمم است. برای اینکه RTS واحد ناکارا را پیدا کنیم نیاز به شناسایی وجه مینیمم داریم و از طرفی می‌دانیم وجه مینیمم توسط GRS تولید می‌شود. بنابراین اگر GRS را پیدا کنیم وجه مینیمم را یافته‌ایم، ترکیب محدب اعضای  $R_0^G$  وجه مینیمم را می‌سازد.

فرض کنیم وجه مینیمم را پیدا کرده‌ایم باز رفع مشکل ایجاد شده توسط مسئله نوع ۲ که همان وقوع تصویرهای چندگانه و ایجاد MRSهای چندگانه و در نتیجه وقوع ابرصفحه‌های تکیه کننده چندگانه (که از این به بعد مسئله نوع ۳ می‌نامیم) می‌باشد، لزوماً منحصر به فردی این ابرصفحه‌های تکیه کننده مشخص شده را

$$\begin{aligned} & -(\lambda_{j_{t+1}} + \mu_{j_{t+1}})y_{r_0} = 0, r = 1, \dots, s, \\ & \sum_{j \in J_E} (\lambda_j + \mu_j) - \quad (18) \\ & (\lambda_{j_{t+1}} + \mu_{j_{t+1}}) = 0, \\ & \sum_{i=1}^m \frac{S_i^-}{R_i^-} + \sum_{r=1}^s \frac{S_r^+}{R_r^+} - \\ & (\lambda_{j_{t+1}} + \mu_{j_{t+1}})(m+s)(1-\rho_0) = 0, \\ & 0 \leq \mu_{j_k} \leq 1, \lambda_{j_k} \geq 0, \\ & k = 1, \dots, t+1, s_i^- \geq 0, s_r^+ \geq 0, \\ & i = 1, \dots, m, r = 1, \dots, s. \end{aligned}$$

آنگاه

$$\left( \begin{aligned} \lambda'_{j_k} &= \frac{\lambda_{j_k}^* + \mu_{j_k}^*}{\lambda_{j_{t+1}}^* + \mu_{j_{t+1}}^*}, s_i'^- = \frac{s_i'^-}{\lambda_{j_{t+1}}^* + \mu_{j_{t+1}}^*}, \\ s_i'^+ &= \frac{s_r'^+}{\lambda_{j_{t+1}}^* + \mu_{j_{t+1}}^*}, \forall k, i, r \end{aligned} \right) \in \Omega_0 \quad (19)$$

و  $\lambda'$  دارای ماکزیمم تعداد مؤلفه‌های مثبت می‌باشد. GRS را می‌توان به صورت زیر معرفی کرد.

$$R_0^G = \{DMU_j \mid \lambda'_j > 0, \}. \quad (20)$$

پس از تشخیص دادن GRS، تصویر مربوط به فرمول (۱۹) را نیز می‌توان به صورت زیر به دست آورد.

$$\begin{aligned} P_0^* &= (x_0^*, y_0^*) = (x_0 - s^-, y_0 + s^+) \\ &= \sum_{j \in J_0^G} \lambda'_j (x_j, y_j) \end{aligned} \quad (21)$$

چون  $P_0^*$  به عنوان ترکیب محدب اکید از واحدهای درون  $R_0^G$  معرفی شده‌است،  $P_0^*$  نقطه درونی نسبی  $\Gamma_0^{\min}$  می‌باشد.

به طور خلاصه جوابهای مسئله (۱۸) مجموعه‌ی تمامی DMUهای مولد وجه مینیمم GRS به همراه نقطه درونی نسبی از این وجه (به عنوان مثال تصویر  $P_0^*$ ) را تعیین می‌کند.

BAM (کوپر و همکاران، [25]؛ پاستور [26]؛ پاستور و رویز [27]) استفاده شود، زیرا تفاوت بین هر یک از این دو مدل و مدل RAM تنها در وزن‌هایی است که به اسلک‌های ورودی و خروجی در تابع هدف اختصاص داده می‌شود. با برخی تغییرات کوچک، می‌توان آن را برای مدل RAM/BCC، از آیدا و همکاران [13]، مدل DSBM از جهان‌شاهلو و همکاران [14] و مدل GMDDF از مهدیلوزاد و همکاران [15] تعمیم داد. علاوه بر این می‌تواند در هر مدل شعاعی DEA (به عنوان مثال مدل BCC) اجرا شود. در این رابطه اگر  $(\theta^*, \lambda^*, s_i^{-*}, s_r^{+*})$  یک جواب بهینه برای مدل BCC ورودی محور باشد، آنگاه کافی است  $\theta X_0$  را به جای  $X_0$  در محدودیت‌های ورودی (۹) و (۱۸) جایگزین کنیم و مجموع اسلک‌ها را در  $\sum_{i=1}^m s_i^{-*} + \sum_{r=1}^s s_r^{+*}$  ثابت نگه داریم. (مهدیلوزاد و همکاران [15]).

#### ۴-۲- تعمیم به بازده به مقیاس ثابت

فرض بازده به مقیاس متغیر در مطالعه ما حفظ می‌شود. زیرا وقتی یک مجموعه داده دارای مقادیر منفی باشد، با فرض بازده به مقیاس ثابت قادر به تعیین کردن یک مرز کارای گذرنده از مبدأ نخواهیم بود. بنابراین، همان طور که توسط سیلوا پورتلا و تاناسولیس [28] بحث شده، فرض CRS با داده‌های منفی قابل قبول نمی‌باشد. به هر حال مهم نیست که وجه می‌نیمم یک چند سقفی در تکنولوژی بر پایه VRS یا یک مخروط چند وجهی بیکران در تکنولوژی بر پایه CRS تولید شده بوسیله واحدهای مرجع در GRS باشد. علیرغم اینکه بین دو تکنولوژی، تفاوت ساختاری وجود دارد، همچنان نتایج ما برای حالت CRS با خارج کردن قید تحذب  $\sum_{j \in J} \lambda_j = 1$  قابل اثبات می‌باشد. زیرا این روش بر اساس یافتن جوابی با ماکزیمم تعداد مؤلفه‌های مثبت برای سیستم معادلات خطی می‌باشد و مستقل از وجود قید تحذب است.

#### ۴-۳- مبحث داده‌های ورودی - خروجی منفی

چون روش پیشنهادی مستقل از مجموعه داده‌های

تضمین نمی‌کند زیرا ممکن است وجه مینیمم یک وجه کارا از بعد کامل در فضای ورودی - خروجی (یک وجه کارا از بعد  $m+s-1$ ) نباشد.

اگر وجه مینیمم از بعد  $m+s-1$  باشد مشکلی پیش نمی‌آید اما اگر وجه مینیمم از بعد کمتر از  $m+s-1$  باشد مشکل‌ساز است زیرا بیشمار ابرصفحه تکیه کننده از آن می‌گذرد پس مشکل دوم، چندگانگی ابرصفحه‌های تکیه کننده ناشی از کامل نبودن بعد وجه مینیمم است. در مجموع مشکل اندازه‌گیری RTS از یکی از دو مسئله زیر ناشی می‌شود:

۱- چندگانگی ناشی از انتخاب نقطه تصویر دلخواه (مجموعه مرجع)

۲- کامل نبودن بعد وجه مینیمم

برای از بین بردن این مشکل یک فرایند دو مرحله‌ای را برای اندازه‌گیری RTS بر اساس مطالعات قوی کریونوسکو و همکاران [9] پیشنهاد می‌کنیم.

مرحله ۱) واحدها را با مدل RAM ارزیابی کرده به دو دسته کارا و ناکارا تقسیم می‌کنیم. اگر واحدها کارا باشد بازده به مقیاس آن را با استفاده از روش بنکر-ترال [20] محاسبه می‌کنیم. اگر واحد ناکارا باشد مقدار تابع هدف مدل RAM یعنی  $\rho_0$  بدست آمده را در مدل (۴) جایگذاری کرده و با استفاده از فرمول (۱۹)  $(\lambda', s_i^-, s_r^+)$  را مشخص می‌کنیم.  $\lambda'$  ها، GRS را که در مدل (۲۰) به آن ذکر شده مشخص می‌کنند. فرمول (۲۱) تصویری از  $DMU_0$  ناکارا ارائه می‌دهد که درون نسبی وجه مینیمم قرار دارد و برای این تصویر بازده به مقیاس خوش تعریف است، زیرا همه نقاط درن نسبی وجه می‌نیمم دارای بازده به مقیاس یکسان می‌باشند. بازده به مقیاس این تصویر را به عنوان بازده به مقیاس واحد تحت ارزیابی تعریف می‌کنیم.

مرحله ۲) مشکل ناشی از غیر کامل بودن بعد وجه مینیمم را با اندازه‌گیری RTS در  $P_0^*$  از طریق روش بنکر-ترال [20] رفع می‌کنیم.

#### ۴-۱- بسط به مدل‌های دیگر DEA

روش پیشنهادی به آسانی می‌تواند بدون هیچ تغییری برای مدل جمعی (چارنر و همکاران [24]) و مدل

دبیرستان توسط ترکیب خطی از امکانات دبیرستان که شامل چند نوبته بودن  $(a_1)$  - تعداد غیر کلاس  $(a_2)$  - تعداد کلاس  $(a_3)$  - مساحت کل  $(a_4)$  و مساحت زیر بنا  $(a_5)$  می‌باشد.

$$x_1 = 2N(a_1) + 3N(a_2) + 5N(a_3) + 2N(a_4) + 3N(a_5)$$

تابع  $N(\cdot)$  تابعی نرمال ساز می‌باشد.

**۲- کادر اداری** - (کادر اداری شامل مدیر و معاونین آموزشی و پرورشی و مشاور و معاونین اجرایی و سرایدار و خدمت گذار است). پارامتری است که برای هر دبیرستان ترکیب خطی از عوامل زیر می‌باشد:

تعداد دبیران  $(b_1)$  - تعداد فوق دیپلم  $(b_2)$  - تعداد لیسانس و فوق لیسانس  $(b_3)$  - تعداد دفتر دار  $(b_4)$  - تعداد خدمت گذار  $(b_5)$

$$x_2 = 2N(b_1) + 3N(b_2) + 5N(b_3) + 2N(b_4) + 3N(b_5)$$

**۳- کادر آموزشی** - پارامتری که برای هر دبیرستان توسط ترکیب خطی از عوامل زیر حاصل شده است: میانگین گروه معلمان  $(c_1)$  - میانگین سابقه کار معلمان  $(c_2)$  - تعداد متخصصین  $(c_3)$  - تعداد کل معلمان  $(c_4)$  - تعداد دیپلم  $(c_5)$  - تعداد فوق دیپلم  $(c_6)$  - تعداد لیسانس  $(c_7)$  - تعداد فوق لیسانس و دکترا  $(c_8)$  و تعداد کلاس  $(c_9)$ . ترکیب خطی برای پارامتر به صورت زیر ارائه می‌شود:

$$x_3 = N((N(c_5) + 2N(c_6) + 4N(c_7) + 5N(c_8))/c_9) + N(c_1) + N(c_2) + N(c_3/c_4)$$

**۱- کیفیت تحصیلی سال قبل (سال تحصیلی ۹۲-۹۳)** - پارامتری است که از ترکیب خطی عوامل زیر حاصل می‌شود:

تعداد دانش آموزان پایه سوم در سال قبل  $(d_1)$  - تعداد قبولی در پایه سوم در سال قبل  $(d_2)$  - تعداد دانش آموزان پیش دانشگاهی در سال قبل  $(d_3)$  - تعداد قبولی

استفاده شده می‌باشد، بنابراین هیچ محدودیتی در فرض اینکه داده‌های ورودی - خروجی حتما نامنفی باشند، وجود ندارد، به طوریکه شناسایی GRS را با وجود داده‌های منفی ممکن می‌سازد. این روش از لحاظ کاربردی بسیار مفید است چون در بسیاری از کاربردهای تجربی با ورودی یا خروجی‌های منفی سر و کار داریم.

## ۵- مطالعه موردی دبیرستان‌های دخترانه ناحیه یک شیراز

برای اینکه کاربرد روش تحقیق مطرح شده را در زندگی واقعی نشان دهیم، این روش را بر روی بیست دبیرستان دخترانه ناحیه ۱ شهرستان شیراز که دارای مقطع پیش‌دانشگاهی بوده‌اند بررسی کردیم. برای تهیه داده‌های ورودی و خروجی ابتدا پرسشنامه‌ای تهیه کرده (در پیوست آمده) با مراجعه به مدیریت آموزش و پرورش ناحیه ۱ و همچنین مراجعه به مدیریت بیست دبیرستان دخترانه ناحیه ۱ شیراز پرسشنامه را برای این مدارس تکمیل نمودیم و داده‌های خام ورودی و خروجی را به دست آوردیم.

سپس داده‌ها را نرمال سازی کرده و الگوریتم مطرح شده را روی داده‌های نرمال سازی شده اجرا کردیم. برای انجام کلیه محاسبات، از برنامه نرم افزاری گمز استفاده کردیم. داده‌ها شامل ۴ ورودی و ۳ خروجی می‌باشند.

## ۵-۱- معرفی داده‌های ورودی و خروجی برای دبیرستان‌ها

با توجه به اینکه امتحانات پایه اول و دوم هر دبیرستان به صورت داخلی برگزار می‌شود و سختی یا راحتی امتحانات مدارس قابل مقایسه نیست بنابراین تصمیم گرفتیم که فقط پایه سوم و پیش دانشگاهی را مورد مطالعه قرار دهیم و کیفیت را در این دو پایه مقایسه کنیم، چون امتحانات در این دو پایه به صورت نهایی برگزار می‌شود. به دلیل زیاد بودن پارامترها مجبور به ترکیب آنها با وزن‌های مختلف به نام‌های ورودی و خروجی شدیم.

### ورودی‌ها:

**۱- فضای آموزشی** - پارامتری است که برای هر

$$y_2 = \text{کیفیت تحصیلی سال مورد مطالعه} \\ = (e_2/e_1) + 3(e_4/e_3)$$

$$\text{دانش آموزان پیش دانشگاهی در سال قبل } (d_4) \\ x_4 = \text{کیفیت سال قبل} = \left(\frac{d_2}{d_1}\right) + 3\left(\frac{d_4}{d_3}\right)$$

به طور خلاصه ورودی‌ها و خروجی‌ها به صورت زیر است:

#### ورودی‌ها:

- ۱- فضای آموزشی
- ۲- کادر اداری
- ۳- کادر آموزشی
- ۴- کیفیت تحصیلی سال قبل (سال تحصیلی ۹۳-۹۲)

#### خروجی‌ها:

- ۱- تعداد دانش آموزان
- ۲- کیفیت تحصیلی سال ۹۳-۹۴ (سال مورد مطالعه) (جدول مربوط به اطلاعات خام مربوط به هر ورودی و هر خروجی در پیوست آمده است.)

#### خروجی‌ها:

- ۱- **تعداد دانش آموزان:** پارامتری است که در فاصله (۷۰۰-۱۰۰) تغییر می‌کند و مداری که دارای تعداد دانش آموزان بیشتری باشند خروجی بالاتری دارند.  $y_1 = \text{تعداد دانش آموزان}$

#### ۲- کیفیت تحصیلی سال ۹۳-۹۴ (سال مورد مطالعه):

- پارامتری است که توسط ترکیب خطی از عوامل زیر به دست می‌آید:
- تعداد دانش آموزان پایه سوم در سال مورد مطالعه ( $e_1$ ) - تعداد قبولی در پایه سوم در سال مورد مطالعه ( $e_2$ ) - تعداد دانش آموزان پیش دانشگاهی در سال مورد مطالعه ( $e_3$ ) - تعداد قبولی دانش آموزان پیش دانشگاهی در سال مورد مطالعه ( $e_4$ ) ترکیب خطی برای این پارامتر به صورت زیر تعریف می‌شود:

جدول ۱. نمره کارایی و الگوی (تساوی ورودی‌ها و خروجی‌ها) متناظر با دبیرستان‌ها حاصل از مدل RAM

Y <sub>2</sub>	Y <sub>1</sub>	X <sub>4</sub>	X <sub>3</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>1</sub>	کارایی ρ <sub>o</sub>	واحد
3.8	632	3.67	3.34	12	13.196	1	DMU <sub>1</sub>
3.31	586	3.3	3.39	8	9.418	1	DMU <sub>2</sub>
2.76	416	2.76	3.61	7.277	7.011	1	DMU <sub>3</sub>
3.26	566	3.04	3.66	8	7.51	1	DMU <sub>4</sub>
2.81	491	2.48	3.57	7	7.744	1	DMU <sub>5</sub>
3.5	454	3.62	3.5	5.722	7.915	1	DMU <sub>6</sub>
2.43	265	2.77	3.1	4.22	6.786	1	DMU <sub>7</sub>
3.63	326.19	3.278	2.801	5.467	7.75	0.86	DMU <sub>8</sub>
2.61	267	2.77	3.58	3.944	7.023	1	DMU <sub>9</sub>
3.68	210	3.35	2.66	6.778	7.204	1	DMU <sub>10</sub>
3.266	437	2.999	3.226	6.56	7.183	0.817	DMU <sub>11</sub>
3.86	440	3.52	3.15	6.833	8.595	1	DMU <sub>12</sub>
3.32	387	3.029	3.05	6.022	7.178	0.838	DMU <sub>13</sub>
3.8	410.31	3.457	3.059	6.477	8.375	0.867	DMU <sub>14</sub>
3.265	463	3.008	3.313	6.85	7.249	0.768	DMU <sub>15</sub>
3.34	460	3.076	3.306	6.989	7.399	0.958	DMU <sub>16</sub>
3.11	426	2.74	3.52	7.278	7.399	1	DMU <sub>17</sub>
3.127	290	2.78	2.784	4.866	6.948	0.86	DMU <sub>18</sub>
3.137	365	2.9	3.103	5.444	7.341	0.889	DMU <sub>19</sub>
3.28	153	2.91	2.27	3.389	6.464	1	DMU <sub>20</sub>

### ۵-۲- اجرای روش پیشنهادی بر روی داده‌های دبیرستان‌ها

برای اجرای روش ارائه شده در ابتدا بیست مدرسه مورد نظر را با استفاده از مدل RAM ارزیابی می‌کنیم و نمره کارآیی ( $\rho_0$ ) آنها را با استفاده از این مدل محاسبه می‌کنیم. جدول (۱) نمره کارآیی حاصل از مدل RAM و الگوی (تصاویر ورودی‌ها و خروجی‌ها) متناظر با مطالعه موردی دبیرستان‌ها را نشان می‌دهد. نتایج جدول (۱) نشان می‌دهد که ۱۲ مدرسه (۶۰٪) کارآ می‌باشد و ۸ مدرسه (۴۰٪) باقی‌مانده ناکارا می‌باشد.

همانطور که می‌دانیم مدل RAM به تنهایی قادر به یافتن همه واحدهای مرجع ممکن برای DMUهای ناکارا نیست. بنابراین با حل مدل (۱۸) برای هر مدرسه ناکارا، همه مجموعه‌های مرجع کارا (GRS) را شناسایی می‌کنیم. جدول (۲) همه مدارس مرجع برای مدارس ناکارا با وزن‌های مربوط به آنها را نشان می‌دهد. برای مثال برای ناکارترین مدرسه یعنی DMU<sub>۱۵</sub> مدارس کارای DMU<sub>۴</sub> و DMU<sub>۲۰</sub> با مقادیر وزن‌های ۰.۷۵۱ و ۰.۲۴۹ به عنوان مرجع معرفی شده‌اند. این بدان معنی است که ورودی‌ها و خروجی‌های هدف مدرسه DMU<sub>۱۵</sub>

ترکیب خطی از ورودی‌ها و خروجی‌های DMU<sub>۴</sub> و DMU<sub>۲۰</sub> هستند و برای اینکه DMU<sub>۱۵</sub> کارا شوند باید ورودی‌ها و خروجی‌های خود را تعدیل کند تا بتواند  $Y_{۲۰} + ۰.۲۴۹ X_{۲۰}$  مقدار خروجی را با فرض  $۰.۷۵۱ Y_{۴} + ۰.۲۴۹ X_{۴}$  مقدار ورودی به دست آورد.

اکنون به اندازه‌گیری بازده به مقیاس مدارس می‌پردازیم. بازده به مقیاس مدارس کارا را از روش دو مرحله‌ای بنکر - ترال به دست می‌آوریم. برای اندازه‌گیری بازده به مقیاس هر واحد DMU ناکارا ابتدا به کمک فرمول (۲۱) یک نقطه در درون نسبی وجه می‌نیمم مربوط به خودش به دست می‌آوریم و سپس با به کار بردن روش دو مرحله‌ای بنکر - ترال بازده به مقیاس هر واحد ناکارا را در نقطه درون نسبی به دست آمده محاسبه می‌کنیم. بازده به مقیاس واحد ناکارا، با بازده به مقیاس نقطه درون نسبی وجه مینیمم بدست آمده برابر است. نتایج در جدول (۳) و (۴) آمده است.

در میان دوازده مدرسه کارا، ۹ مدرسه دارای بازده به مقیاس ثابت و ۳ مدرسه دارای بازده به مقیاس افزایشی است. در میان ۸ مدرسه ناکارا، همگی دارای بازده به مقیاس ثابت هستند.

جدول ۲. مجموعه‌های مرجع متناظر با مدارس ناکارا و وزن‌های مربوط به آنها

مجموعه‌های مرجع و وزن‌های آنها				واحدهای ناکارا			
			(0.397)	DMU <sub>20</sub>	(0.603)	DMU <sub>12</sub>	DMU <sub>8</sub>
			(0.312)	DMU <sub>20</sub>	(0.688)	DMU <sub>4</sub>	DMU <sub>11</sub>
		(0.407)	DMU <sub>20</sub>	(0.086)	DMU <sub>12</sub>	(0.507)	DMU <sub>4</sub>
			(0.103)	DMU <sub>20</sub>	(0.897)	DMU <sub>12</sub>	DMU <sub>14</sub>
			(0.249)	DMU <sub>20</sub>	(0.751)	DMU <sub>4</sub>	DMU <sub>15</sub>
(0.182)	DMU <sub>20</sub>	(0.089)	DMU <sub>12</sub>	(0.055)	DMU <sub>10</sub>	(0.674)	DMU <sub>4</sub>
		(0.61)	DMU <sub>20</sub>	(0.323)	DMU <sub>5</sub>	(0.068)	DMU <sub>4</sub>
		(0.347)	DMU <sub>20</sub>	(0.238)	DMU <sub>6</sub>	(0.415)	DMU <sub>5</sub>

جدول ۳. بازده به مقیاس مدارس کارا با مدل RAM

U+	U-	واحد
Unb.	-0.631	DMU <sub>1</sub>
5.37	-0.656	DMU <sub>2</sub>
-0.657	-0.958	DMU <sub>3</sub>
5.493	-0.772	DMU <sub>4</sub>
0.478	-1	DMU <sub>5</sub>
3.258	-0.578	DMU <sub>6</sub>
-0.582	-1	DMU <sub>7</sub>
-0.208	-1	DMU <sub>9</sub>
2.948	-0.169	DMU <sub>10</sub>
Unb.	-0.399	DMU <sub>12</sub>
0.279	-0.652	DMU <sub>17</sub>
4.747	-1	DMU <sub>20</sub>

جدول ۴. بازده به مقیاس مدارس ناکارا با مدل RAM

$u^+$	$u^-$	$y_2$	$y_1$	$x_4$	$x_3$	$x_2$	$x_1$	
2.942	-0.447	3.63	326.19	3.278	2.801	5.467	7.75	DMU <sub>8</sub>
0.201	-0.814	3.266	437	2.999	3.226	6.56	7.183	DMU <sub>11</sub>
0.202	-0.432	3.32	387	3.029	3.05	6.022	7.178	DMU <sub>13</sub>
2.484	-0.41	3.8	410.31	3.457	3.059	6.477	8.375	DMU <sub>14</sub>
0.198	-0.805	3.265	463	3.008	3.313	6.85	7.249	DMU <sub>15</sub>
0.194	-0.117	3.34	460	3.076	3.306	6.989	7.399	DMU <sub>16</sub>
0.039	-0.867	3.127	290	2.78	2.784	4.866	6.948	DMU <sub>18</sub>
0.041	-0.601	3.137	365	2.9	3.103	5.444	7.341	DMU <sub>19</sub>

شده است.

اطلاعات جدول (۵) نشان می‌دهد که از میان بیست مدرسه مورد ارزیابی توسط مدل BCC، ۱۲ مدرسه کارا و ۸ مدرسه ناکار می‌باشد. در جدول (۶) مجموعه‌های مرجع و وزن‌های مربوط به آنها آمده است.

### ۳-۵ - اجرای الگوریتم در مدل BCC بر روی داده‌های مدارس

از آنجایی که الگوریتم پیشنهادی در هر مدل DEA شعاعی مانند BCC قابل اجراست، لذا با برخی تغییرات جزئی این روش را در مدل BCC اجرا می‌کنیم. نتایج بدست آمده از مدل BCC در جداول (۵)، (۶)، (۷) ارائه

جدول ۵. نمره کارایی و الگوی (تصاویر ورودی‌ها و خروجی‌ها) متناظر با دبیرستان‌ها حاصل از مدل BCC

$y_2$	$y_1$	$x_4$	$x_3$	$x_2$	$x_1$	Slack	$\rho_o$	DMU
3.8	632	3.67	3.34	12	13.196	0	1	DMU <sub>1</sub>
3.31	586	3.3	3.39	8	9.418	0	1	DMU <sub>2</sub>
2.76	416	2.76	3.61	7.277	7.011	0	1	DMU <sub>3</sub>
3.26	566	3.04	3.66	8	7.51	0	1	DMU <sub>4</sub>
2.81	491	2.48	3.57	7	7.744	0	1	DMU <sub>5</sub>
3.5	454	3.62	3.5	5.722	7.915	0	1	DMU <sub>6</sub>
2.43	265	2.77	3.1	4.22	6.786	0	1	DMU <sub>7</sub>
3.743	339.591	3.403	2.907	6.444	7.945	4.144	0.97	DMU <sub>8</sub>
2.61	267	2.77	3.58	3.944	7.023	0	1	DMU <sub>9</sub>
3.68	210	3.35	2.66	6.778	7.204	0	1	DMU <sub>10</sub>
3.314	481.183	3.03	3.29	7.872	9.178	2.907	0.908	DMU <sub>11</sub>
3.86	440	3.52	3.15	6.833	8.595	0	1	DMU <sub>12</sub>
3.676	428.524	3.34	3.14	6.703	8.423	2.811	0.903	DMU <sub>13</sub>
3.86	440	3.52	3.15	6.833	8.595	74.708	0.984	DMU <sub>14</sub>
3.416	570.895	3.206	3.557	8.755	8.777	0.371	0.811	DMU <sub>15</sub>
3.354	461.89	3.123	3.36	7.278	7.399	0.197	0.996	DMU <sub>16</sub>
3.11	426	2.74	3.52	7.278	7.399	0	1	DMU <sub>17</sub>
2.848	327.763	2.78	3.31	4.944	7.144	0	0.885	DMU <sub>18</sub>
3.356	390.278	3.29	3.17	5.444	7.656	0.849	0.935	DMU <sub>19</sub>
3.28	153	2.91	2.27	3.389	6.464	0	1	DMU <sub>20</sub>

جدول ۶. مجموعه مرجع مدارس ناکارا و وزن‌های مربوط به آنها حاصل از مدل BCC

مجموعه‌های مرجع واحدهای ناکارا و وزن‌های آنها											واحدهای ناکارا	
				(0.109)		(0.108)	DMU <sub>20</sub>	(0.59)	DMU <sub>12</sub>	(0.302)	DMU <sub>10</sub>	DMU <sub>8</sub>
				(0.079)	DMU <sub>20</sub>	(0.187)	DMU <sub>12</sub>	(0.445)	DMU <sub>5</sub>	(0.26)	DMU <sub>1</sub>	DMU <sub>11</sub>
					DMU <sub>20</sub>	(0.768)	DMU <sub>12</sub>	(0.13)	DMU <sub>5</sub>	(0.023)	DMU <sub>1</sub>	DMU <sub>13</sub>
										(1)	DMU <sub>12</sub>	DMU <sub>14</sub>
				(0.077)		(0.071)	DMU <sub>12</sub>	(0.72)	DMU <sub>4</sub>	(0.209)	DMU <sub>1</sub>	DMU <sub>15</sub>
				(0.068)	DMU <sub>20</sub>	(0.183)	DMU <sub>10</sub>	(0.063)	DMU <sub>6</sub>	(0.677)	DMU <sub>4</sub>	DMU <sub>16</sub>
(0.182)	DMU <sub>20</sub>	(0.405)	DMU <sub>9</sub>	(0.265)	DMU <sub>7</sub>	(0.038)	DMU <sub>6</sub>	(0.234)	DMU <sub>5</sub>	(0.074)	DMU <sub>4</sub>	DMU <sub>18</sub>
					DMU <sub>20</sub>	(0.542)	DMU <sub>6</sub>	(0.098)	DMU <sub>5</sub>	(0.095)	DMU <sub>2</sub>	DMU <sub>19</sub>

خروجی خود را به  $0.209y_1 + 0.72y_2 + 0.071y_3$  برساند. حال به اندازه‌گیری بازده به مقیاس واحدهای کارا و ناکارا در مدل BCC می‌پردازیم. همانطور که در جدول (۷) دیده می‌شود، از میان ۱۲ مدرسه کارا ۳ مدرسه دارای بازده به مقیاس افزایشی و ۹ مدرسه دارای بازده به مقیاس ثابت می‌باشند.

از جدول (۸) مشاهده می‌شود که از میان ۸ واحد ناکارا ۴ مدرسه دارای بازده به مقیاس افزایشی و ۴ مدرسه دارای بازده به مقیاس ثابت است.

جالب توجه هست که مدارس ناکارای به دست آمده از مدل BCC همان مدارس ناکارای شناسایی شده در مدل RAM هستند. و ناکارترین مدرسه در هر دو مدل RAM و BCC مدرسه شماره ۱۵ (DMU<sub>15</sub>) معرفی شده است. اما مجموعه‌های مرجع معرفی شده برای DMU<sub>15</sub> در مدل BCC، واحدهای DMU<sub>1</sub>، DMU<sub>4</sub> و DMU<sub>12</sub> با وزن‌های  $0.209$ ،  $0.72$  و  $0.071$  می‌باشند. یعنی مدرسه شماره ۱۵ برای اینکه کارا شود باید با استفاده از  $0.209x_1 + 0.72x_2 + 0.071x_3$

جدول ۷. بازده به مقیاس مدارس کارا در مدل BCC

u+	u-	DMU
Unb.	-0.631	DMU <sub>1</sub>
5.37	-0.656	DMU <sub>2</sub>
-0.657	-0.958	DMU <sub>3</sub>
5.493	-0.772	DMU <sub>4</sub>
0.478	-1	DMU <sub>5</sub>
3.258	-0.578	DMU <sub>6</sub>
-0.582	-1	DMU <sub>7</sub>
-0.208	-1	DMU <sub>9</sub>
2.948	-0.169	DMU <sub>10</sub>
Unb.	-0.399	DMU <sub>12</sub>
0.279	-0.652	DMU <sub>17</sub>
4.747	-1	DMU <sub>20</sub>

جدول ۸. بازده به مقیاس مدارس ناکارا در مدل BCC

u <sup>+</sup>	u <sup>-</sup>	y <sub>2</sub>	y <sub>1</sub>	x <sub>4</sub>	x <sub>3</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>1</sub>	DMU
1.435	-0.117	3.743	339.591	3.403	2.907	6.444	7.945	DMU <sub>8</sub>
-0.131	-0.28	3.314	481.183	3.03	3.29	7.872	9.178	DMU <sub>11</sub>
-0.123	-0.274	3.676	428.524	3.34	3.14	6.703	8.423	DMU <sub>13</sub>
Unb.	-0.399	3.86	440	3.52	3.15	6.833	8.595	DMU <sub>14</sub>
3.556	-0.29	3.416	570.895	3.206	3.557	8.755	8.777	DMU <sub>15</sub>
0.193	0.178	3.354	461.89	3.123	3.36	7.278	7.399	DMU <sub>16</sub>
-0.575	-0.575	2.848	327.763	2.78	3.31	4.944	7.144	DMU <sub>18</sub>
-0.13	-0.552	3.356	390.278	3.29	3.17	5.444	7.656	DMU <sub>19</sub>



### ۶- نتیجه‌گیری

در این تحقیق برای یافتن همه مجموعه‌های مرجع کارا برای واحدهای تحت ارزیابی در DEA غیر شعاعی ابتدا هر واحد را با استفاده از مدل غیر شعاعی RAM ارزیابی کردیم. از آنجایی که در مدل‌های DEA غیر شعاعی مجموعه‌های مرجع چندگانه برای واحد تصمیم‌گیرنده وجود دارد، در گام اول به تعریف سه نوع مجموعه مرجع می‌پردازیم. ابتدا مفهوم مجموعه مرجع یگانی (URS) مربوط به تصویر DMU<sub>o</sub> تحت ارزیابی را معرفی کردیم. URS شامل DMUهای کارایی می‌باشند که در ترکیب محدب خاص تولید‌کننده تصویر فعال هستند. به علت وقوع URSهای چندگانه، مفهوم مجموعه مرجع ماکزیمال (MRS) را معرفی کردیم و آنرا به صورت اجتماع همه URSهای متناظر با تصویر داده شده تعریف می‌کنیم. چون در مدل‌های DEA غیر شعاعی امکان وقوع تصویرهای چندگانه وجود دارد، اجتماع MRSهای متناظر با همه تصاویر را به عنوان مجموعه مرجع کلی منحصر به فرد (GRS) تعریف می‌کنیم.

در گام دوم، یک رویکرد مبتنی بر برنامه‌ریزی خطی برای تعیین GRS مطرح می‌کنیم. چون تعیین GRS از طریق اجرای یک مدل برنامه‌ریزی خطی اولیه - دوگان منحصر به فرد است، کارایی محاسباتی آن در کاربردهای عملی از روش‌های موجود بیشتر است.

در گام آخر به اندازه‌گیری بازده به مقیاس در مدل DEA غیر شعاعی می‌پردازیم. بالاخره روش مطرح شده را بر روی داده‌های مربوط به بیست دبیرستان دخترانه ناحیه یک شیراز اجرا کرده و برای واحدهای ناکارایی بدست آمده الگو مناسب و کلاس بازده به مقیاس را معرفی کردیم. به عنوان کارهای آتی می‌توانیم روش ارائه شده را برای سایر داده‌ها نظیر داده‌های مربوط به بانک و بیمه بکار ببریم.

of Operational Research, 181 (2007) 549-570.

## فهرست منابع

[9] V. E Krivonozhko, F. R. Forsung, A. V. Lynchev, Measurement of returns to scale using non-radial DEA models, *European Journal of Operation Research*, 232 (2014) 664-670.

[10] W. W. Cooper, L. M. Seiford, K. Tone, *Data Envelopment Analysis: A Comprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver Software*, Boston: Kluwer Academic Publishers, (2007).

[11] W.L. Winston, *Operations Research: Applications and Algorithms*, Boston: Duxbury Press, (2003).

[12] A. Charnes, W. W. Cooper, B. Golany, L. Seiford, J. Stutz, Foundations of data envelopment analysis for Pareto-Koopmans efficient empirical productions functions, *Journal of Econometrics*, 30 (1985) 91-107.

[13] K. Aida, W. W. Cooper, J.T. Pator, T. Sueyoshi, Evaluation water supply services in Japan with Ram: A range-adjusted measure of inefficiency, *Omega*, 26 (1998) 207-232.

[14] G. R. Jahanshahloo, F. Hosseinzadeh Lotfi, M. Mehdillozad, I. Roshdi, connected directional slack-based measure of efficiency in DEA, *Applied Mathematical Sciences*, 6 (2012) 237-246.

[15] M. Mehdiloozad, B. K. Sahoo, A generalized multiplicative directional distance function for efficiency measurement in DEA, *European Journal of Operational Research*, 214 (2014) 679-688.

[16] R. D. Banker, A. Charnes, W. W. Cooper, Some models for the estimation of technical and scale inefficiencies in

[۱] م. ر. مهرگان، مدل‌های کمی در ارزیابی عملکرد سازمان‌ها، تهران، دانشکده مدیریت دانشگاه تهران، چاپ دوم نشر کتاب دانشگاهی، ۱۳۹۱.

[2] A. Charnes, W. W. Cooper, E. Rhodes, Measuring the efficiency of decision making units, *European Journal of Operation Research*, 2 (6) (1978) 429-441.

[3] A. Charnes, W. W. Cooper, E. Rhodes, Short Communication: Measuring the efficiency of decision making units, *European Journal of Operational Research*, 3 (1979) 339.

[4] M.J. Farrell, The Measurement of Productive Efficiency, *Journal of the Royal Statistical Society. Series A (General)* 120 (3) (1957) 253-290.

[5] W. W. Cooper, K. S. Park, J. T. Pastor, RAM: A range adjusted measure of inefficiency for use with additive models and relations to other models and measures in DEA. *Journal of productivity Analysis*, 11 (1999) 5-42.

[6] T. Sueyoshi, K. Sekitani, Measurement of returns to scale using a non-radial DEA model: A range-adjusted measure approach, *European Journal Operational Research*, 176 (2007) 1918-1946.

[7] V. E. Krivonozhko, F. R. Forsund, A. V. Lychev, A note on imposing strong complementary slackness conditions in DEA, *European Journal of Operational Research*, 220 (2012) 716-721.

[8] T. Sueyoshi, K. Sekitani, The measurement of returns to scale under a simultaneous occurrence of multiple solutions in a reference set and a supporting hyper plane, *European Journal*

- [24] A. Charnes, W. W. Cooper, B. Golany, L. Seiford, J. Stutz, Foundations of data envelopment analysis for Pareto-Koopmans efficient empirical productions functions. *Journal of Econometrics*, 30 (1985) 91–107.
- [25] W. W. Cooper, J. T. Pastor, F. Borrás, J. Aparicio, D. Pastor, BAM: A bounded adjusted measure of efficiency for use with bounded additive models, *Journal of Productivity Analysis*, 35 (2011) 85–94.
- [26] J. T. Pastor, New additive models for handling zero and negative data (Working Paper). Spain: Universidad de Alicante, Departamento de Estadística e Investigación Operativa. (1994).
- [27] J. T. Pastor, J. L. Ruiz, Variables with negative values in DEA. In W. D. Cook, & J. Zhu (Eds.), *Modeling data irregularities and structural complexities in data envelopment analysis* (pp. 63–84). New York: Springer. (2007).
- [28] M. C. A. Silva Portela, E. Thanassoulis, Malmquist-type indices in the presence of negative data: An application to bank branches, *Journal of Banking & Finance*, 34 (2010) 1472–1483.
- [29] A. Charnes, W. W. Cooper, B. Golany, L. Seiford, J. Stutz, data envelopment analysis, *Management science*, 30 (1984) 1078-1092.
- [17] J. T. Pastor, J. L. Ruiz, Variables with Negative in DEA, In W. D. Cook, & Zhu (Eds.), *Modeling data irregularities and structural complexities in data envelopment analysis* (pp. 63-84). New York: Springer, (2007).
- [18] O. B. Olesen, N. C. Petersen, Identification and use of efficient faces and facets in DEA. *Journal of productivity Analysis*, 20 (1996) 323-360.
- [19] O. B. Olesen, N. C. Peterson, Indicators of ill-conditioned data sets and model misspecification in data envelopment analysis: An extended facet approach, *Management Science*, 42 (1996) 205-219.
- [20] R. D. Banker, W. W. Cooper, Seiford, L. M., Thrall, R. M., & Zhu, J. (2004). Returns to scale in different DEA models. *European Journal of Operational Research*, 154-345-362.
- [21] P. L. Brockett, W. W. Cooper, L.L. Golden, J. J. Rousseau, Y. Wang, Evaluating solvency versus efficiency performance and different forms of organization and marketing in US property-liability insurance companies, *European Journal Operational Research*, 154 (2004) 492-514.
- [22] K. Tone, On returns to scale under weights restrictions in data envelopment analysis, *Journal of Productivity Analysis*, 16 (2001) 31–47.
- [23] K. Tone, A simple characterization of return to scale in DEA, *Journal of Operations Research Society of Japan*, 39 (1996) 604–613.

۸- چه تعداد فوق لیسانس و دکترا در کادر آموزشی مشغول به کار هستند؟

ت: لطفاً در ارتباط با کیفیت تحصیلی سال قبل آموزشگاه به سؤالات زیر پاسخ دهید.

- ۱- تعداد دانش آموزان پایه‌های اول و دوم و سوم در سال قبل چند نفر بوده است؟
- ۲- تعداد قبول شدگان پایه های اول و دوم و سوم در سال قبل چند نفر بوده است؟
- ۳- تعداد دانش آموزان پیش دانشگاهی در سال قبل چند نفر بوده است؟
- ۴- تعداد قبول شدگان دانش آموزان پیش دانشگاهی در سال قبل چند نفر بوده است؟

ث: لطفاً در ارتباط با تعداد دانش آموزان به سؤالات زیر پاسخ دهید.

- ۱- تعداد کل دانش آموزان مدرسه چند نفر است؟
- ۲- تراکم دانش آموزان در کلاسها چقدر است؟ (تقسیم تعداد دانش آموزان بر تعداد کلاسها)
- ۳- توزیع دانش آموزان پایه دوم چگونه است؟ (تقسیم تعداد دانش آموزان هر رشته در پایه دوم به تعداد کل دانش آموزان)
- توزیع در رشته ریاضی-----
- توزیع در رشته تجربی-----
- توزیع در رشته انسانی و معارف اسلامی-----

ج: لطفاً در ارتباط با کیفیت تحصیلی سال تحصیلی جاری آموزشگاه به سؤالات زیر پاسخ دهید.

- ۱- تعداد دانش آموزان پایه های اول و دوم و سوم در سال تحصیلی جاری چند نفر بوده است؟
- ۲- تعداد قبول شدگان پایه‌های اول و دوم و سوم در سال تحصیلی جاری چند نفر بوده است؟
- ۳- تعداد دانش آموزان پیش دانشگاهی در سال تحصیلی جاری چند نفر بوده است؟

### پیوست ۱: پرسش نامه

پرسش نامه ارائه شده به ناحیه ۱ آموزش و پرورش شیراز جهت جمع آوری اطلاعات قبلاً از اینکه در نهایت بردباری با دقت این پرسش نامه را تکمیل می‌کنید نهایت سپاس‌گذاری را دارم.

الف: لطفاً در ارتباط با فضای آموزشی آموزشگاه به سؤالات زیر پاسخ دهید.

- ۱- این آموزشگاه چند نوبته است؟  
یک نوبته  دو نوبته
- ۲- تعداد غیر کلاس در آموزشگاه چند تا است؟
- ۳- تعداد کلاس چند تا است؟
- ۴- مساحت کل مدرسه چقدر است؟
- ۵- مساحت زیر بنا ی مدرسه چقدر است؟

ب: لطفاً در ارتباط با کادر اداری آموزشگاه به سؤالات زیر پاسخ دهید.

- ۱- چند نفر دیپلم هستند؟
- ۲- چند نفر فوق دیپلم هستند؟
- ۳- چند نفر لیسانس یا فوق لیسانس هستند؟
- ۴- چه تعداد دفتر دار (معاون اجرایی) در مدرسه مشغولند؟
- ۵- تعداد خدمت گذاران مدرسه چند نفر است؟

پ: لطفاً در ارتباط با کادر آموزشی آموزشگاه به سؤالات زیر پاسخ دهید.

- ۱- میانگین گروه معلمین چند نفر است؟
- ۲- به طور میانگین سابقه کار معلمین چقدر است؟
- ۳- تعداد متخصصین که در رشته خود کار می‌کنند چند نفر است؟
- ۴- تعداد کل معلمین مدرسه چند نفر است؟
- ۵- چه تعداد از معلمین دیپلم هستند؟
- ۶- چه تعداد از معلمین فوق دیپلم هستند؟
- ۷- چه تعداد از معلمین لیسانس هستند؟

- ۲- تعداد قبول شدگان لیسانس چند نفر است؟  
۳- تعداد قبول شدگان فوق لیسانس و دکترا چند نفر است؟  
۴- تعداد قبول شدگان مراکز تربیت معلم چند نفر است؟  
۵- تعداد قبول شدگان دانشگاه پیام نور و شبانه چند نفر است؟  
۶- تعداد قبول شدگان در مراکز روزانه دانشگاه‌ها چند نفر است؟

با تشکر مجدد از همکاری صمیمانه شما

- ۴- تعداد قبول شدگان دانش آموزان پیش دانشگاهی در سال تحصیلی جاری چند نفر بوده است؟  
۵- میانگین نمره دانش آموزان پایه دوم چقدر است؟ (میانگین نمره از تقسیم مجموع نمرات سالیانه دانش آموزان شرکت کننده در امتحانات بر تعداد دانش آموزان شرکت کننده در امتحان به دست می‌آید).  
۶- میانگین نمره دانش آموزان پایه سوم چقدر است؟  
۷- میانگین نمره دانش آموزان پیش دانشگاهی چقدر است؟

د: لطفاً در ارتباط با راهیابی دانش آموزان آموزشگاه به دانشگاه به سوالات زیر پاسخ دهید.  
۱- تعداد قبول شدگان فوق دیپلم چند نفر است؟

## پیوست ۲: داده‌های مربوط به بیست دبیرستان دخترانه ناحیه یک شیراز

جدول ۹. اطلاعاتی ورودی  $x_1$  (فضای آموزشی)

نام مدرسه	چند نوبته ضریب ۲	تعداد غیر کلاس ضریب ۳	تعداد کلاس ضریب ۵	مساحت کل ضریب ۲	مساحت زیر بنا ضریب ۳	ورودی $x_1$ (فضای آموزشی)
DMU <sub>1</sub>	1	15	24	4100	3500	13.196
DMU <sub>2</sub>	1	10	17	2500	2000	9.418
DMU <sub>3</sub>	1	6	17	2000	1800	7.011
DMU <sub>4</sub>	1	3	16	1795	1879	7.51
DMU <sub>5</sub>	1	8	14	2030	1071	7.744
DMU <sub>6</sub>	1	9	11	3150	1485	7.915
DMU <sub>7</sub>	1	8	10	2000	1285	6.786
DMU <sub>8</sub>	1	8	12	2406	1999	7.945
DMU <sub>9</sub>	1	5	9	2500	2520	7.023
DMU <sub>10</sub>	1	3	6	2021	5137	7.204
DMU <sub>11</sub>	1	5	15	6000	5750	11.125
DMU <sub>12</sub>	1	7	14	3897	1871	8.595
DMU <sub>13</sub>	1	10	15	5010	4000	10.882
DMU <sub>14</sub>	1	11	13	4319	1531	9.149
DMU <sub>15</sub>	1	7	15	4000	1767	8.777
DMU <sub>16</sub>	2	8	14	975	1063	7.399
DMU <sub>17</sub>	2	8	14	975	1063	7.399
DMU <sub>18</sub>	1	7	10	3110	1201	7.144
DMU <sub>19</sub>	1	8	12	3012	2135	8.218
DMU <sub>20</sub>	1	2	8	5000	1400	6.464

جدول ۱۰. اطلاعاتی ورودی  $x_2$  (کادر اداری)

نام مدرسه	تعداد دبیر ضریب ۲	تعداد فوق دبیر ضریب ۳	تعداد لیسانس و فوق لیسانس ضریب ۵	تعداد معاون اجرایی ضریب ۲	تعداد خدمتگذار ضریب ۳	ورودی $x_2$ : کادر اداری
DMU <sub>1</sub>	4	0	18	4	3	12
DMU <sub>2</sub>	2	1	9	2	2	8
DMU <sub>3</sub>	3	0	10	2	2	7.277
DMU <sub>4</sub>	2	1	9	2	2	8
DMU <sub>5</sub>	3	0	9	2	2	7
DMU <sub>6</sub>	2	0	8	1	2	5.722
DMU <sub>7</sub>	1	0	8	1	1	4.22
DMU <sub>8</sub>	1	1	7	1	2	6.444
DMU <sub>9</sub>	1	0	7	1	1	3.944
DMU <sub>10</sub>	2	1	10	1	1	6.778
DMU <sub>11</sub>	3	0	12	4	2	8.833
DMU <sub>12</sub>	2	0	12	1	2	6.833
DMU <sub>13</sub>	2	0	11	2	2	7.055
DMU <sub>14</sub>	1	0	15	1	2	7.167
DMU <sub>15</sub>	1	2	10	3	1	8.778
DMU <sub>16</sub>	1	1	10	3	1	7.278
DMU <sub>17</sub>	1	1	10	3	1	7.278
DMU <sub>18</sub>	0	1	7	1	1	4.944
DMU <sub>19</sub>	2	0	7	1	2	5.444
DMU <sub>20</sub>	1	0	5	1	1	3.389

جدول ۱۱. اطلاعاتی ورودی x3 (هیئت مدرسین تمامی مدارس)

نام مدرسه	میانگین گروه معلمان	میانگین سابقه کار	تعداد کل معلمان	تعداد دبیران	تعداد فوق دیپلم	تعداد لیسانس	تعداد فوق لیسانس و دکترا	ورودی x3: هیات مدرسین مدارس پیش دانشگاهی	تعداد کلاس	ورودی x3: هیات مدرسین تمام مدارس
DMU <sub>1</sub>	2.6	20.9	34	0	0	20	14	3.34	19	3.25
DMU <sub>2</sub>	2.38	20.9	31	0	0	22	9	3.39	12	3.29
DMU <sub>3</sub>	2.87	21.9	45	0	0	32	13	3.61	17	3.5
DMU <sub>4</sub>	2.4	23.7	35	0	0	36	14	3.66	16	3.53
DMU <sub>5</sub>	2.46	21.8	32	0	0	22	14	3.57	14	3.45
DMU <sub>6</sub>	2.46	22.8	27	0	0	17	9	3.5	11	3.39
DMU <sub>7</sub>	1.92	23.6	25	0	0	23	2	3.1	10	3.03
DMU <sub>8</sub>	2.09	20.4	23	0	0	17	6	3.23	9	3.14
DMU <sub>9</sub>	1.87	22.9	30	0	0	20	10	3.58	9	3.45
DMU <sub>10</sub>	1.25	13.6	15	0	0	11	4	2.66	6	2.57
DMU <sub>11</sub>	2.4	22	36	0	0	29	7	3.29	15	3.2
DMU <sub>12</sub>	2.25	19.03	26	0	0	20	7	3.15	12	3.05
DMU <sub>13</sub>	2	19.43	26	0	0	20	7	3.14	11	3.04
DMU <sub>14</sub>	2.23	17.81	33	0	0	14	15	3.49	11	3.36
DMU <sub>15</sub>	2.92	21.68	38	0	0	28	10	3.61	14	3.5
DMU <sub>16</sub>	3	20.11	42	0	0	32	10	3.52	16	3.41
DMU <sub>17</sub>	3	20.11	42	0	0	32	10	3.52	16	3.41
DMU <sub>18</sub>	1.63	18.55	18	0	0	11	7	3.31	8	3.18
DMU <sub>19</sub>	2.06	20.74	31	0	0	25	6	3.17	12	3.08
DMU <sub>20</sub>	0.91	14.79	11	0	0	10	1	2.27	6	2.22

جدول ۱۲. اطلاعاتی ورودی x4 (کیفیت تحصیلی سال ۹۳-۹۲)

نام مدرسه	تعداد دانش آموزان سال سوم	تعداد قبول شدگان پایه سوم	تعداد دانش آموزان پیش دانشگاهی	تعداد قبولی پیش دانشگاهی	ورودی x4: کیفیت تحصیلی سال ۹۳-۹۲
DMU <sub>1</sub>	117	113	122	110	3.67
DMU <sub>2</sub>	169	153	178	142	3.3
DMU <sub>3</sub>	93	50	292	216	2.76
DMU <sub>4</sub>	167	115	121	95	3.04
DMU <sub>5</sub>	136	92	83	50	2.48
DMU <sub>6</sub>	136	128	104	93	3.62
DMU <sub>7</sub>	42	22	80	60	2.77
DMU <sub>8</sub>	81	75	85	81	3.78
DMU <sub>9</sub>	64	33	105	79	2.77
DMU <sub>10</sub>	27	23	30	25	3.35
DMU <sub>11</sub>	119	115	316	218	3.03
DMU <sub>12</sub>	152	150	110	93	3.52
DMU <sub>13</sub>	106	102	92	73	3.34
DMU <sub>14</sub>	80	74	80	74	3.7
DMU <sub>15</sub>	94	86	129	111	3.5
DMU <sub>16</sub>	93	75	94	74	3.16
DMU <sub>17</sub>	117	87	54	36	2.74
DMU <sub>18</sub>	80	48	73	51	2.78
DMU <sub>19</sub>	68	58	194	158	3.29
DMU <sub>20</sub>	27	15	28	22	2.91

جدول ۱۳. اطلاعاتی خروجی  $\gamma_1$  (تعداد دانش آموزان سال ۹۳-۹۴)

نام مدرسه	تعداد دانش آموزان سال ۹۴-۹۵	خروجی ۱: تعداد دانش آموزان سال ۹۳-۹۴
DMU <sub>1</sub>	527	632
DMU <sub>2</sub>	401	586
DMU <sub>3</sub>	500	416
DMU <sub>4</sub>	442	566
DMU <sub>5</sub>	400	491
DMU <sub>6</sub>	305	454
DMU <sub>7</sub>	261	265
DMU <sub>8</sub>	219	326
DMU <sub>9</sub>	213	267
DMU <sub>10</sub>	120	210
DMU <sub>11</sub>	432	437
DMU <sub>12</sub>	309	440
DMU <sub>13</sub>	266	387
DMU <sub>14</sub>	274	361
DMU <sub>15</sub>	405	463
DMU <sub>16</sub>	465	460
DMU <sub>17</sub>	0	426
DMU <sub>18</sub>	151	290
DMU <sub>19</sub>	264	365
DMU <sub>20</sub>	92	153

جدول ۱۴. اطلاعاتی ورودی و خروجی  $\gamma_2$  (تعداد دانش آموزان سال ۹۳-۹۴)

نام مدرسه	تعداد دانش آموزان سال سوم	تعداد قبولی سال سوم	تعداد دانش آموزان پیش دانشگاهی	تعداد قبولی پیش دانشگاهی	خروجی ۲: کیفیت تحصیلی سال ۹۳-۹۴
DMU <sub>1</sub>	126	118	116	111	3.8
DMU <sub>2</sub>	136	127	190	151	3.31
DMU <sub>3</sub>	124	78	229	163	2.76
DMU <sub>4</sub>	135	119	145	115	3.26
DMU <sub>5</sub>	135	93	103	73	2.81
DMU <sub>6</sub>	115	107	126	108	3.5
DMU <sub>7</sub>	34	21	71	43	2.43
DMU <sub>8</sub>	86	82	75	67	3.63
DMU <sub>9</sub>	69	45	72	47	2.61
DMU <sub>10</sub>	47	39	21	20	3.68
DMU <sub>11</sub>	127	121	269	185	3.01
DMU <sub>12</sub>	111	111	134	128	3.86
DMU <sub>13</sub>	106	88	101	84	3.32
DMU <sub>14</sub>	86	83	77	73	3.8
DMU <sub>15</sub>	96	88	95	59	2.77
DMU <sub>16</sub>	68	59	69	57	3.34
DMU <sub>17</sub>	160	128	92	71	3.11
DMU <sub>18</sub>	62	37	28	18	2.52
DMU <sub>19</sub>	54	36	178	131	2.87
DMU <sub>20</sub>	28	20	14	12	3.28



جدول ۱۵. اطلاعاتی ورودی و خروجی دبیرستان‌ها

خروجی $y_2$ : کیفیت تحصیلی سال ۹۳-۹۴	خروجی $y_1$ : تعداد دانش آموزان سال ۹۳-۹۴	ورودی $x_4$ : کیفیت تحصیلی سال ۹۲-۹۳	ورودی $x_3$ : هیات مدرسین مدارس پیش دانشگاهی	ورودی $x_2$ : کادر اداری	ورودی $x_1$ (فضای آموزشی)	نام مدرسه
3.8	632	3.67	3.34	12	13.196	DMU <sub>1</sub>
3.31	586	3.3	3.39	8	9.418	DMU <sub>2</sub>
2.76	416	2.76	3.61	7.277	7.011	DMU <sub>3</sub>
3.26	566	3.04	3.66	8	7.51	DMU <sub>4</sub>
2.81	491	2.48	3.57	7	7.744	DMU <sub>5</sub>
3.5	454	3.62	3.5	5.722	7.915	DMU <sub>6</sub>
2.43	265	2.77	3.1	4.22	6.786	DMU <sub>7</sub>
3.63	326	3.78	3.23	6.444	7.945	DMU <sub>8</sub>
2.61	267	2.77	3.58	3.944	7.023	DMU <sub>9</sub>
3.68	210	3.35	2.66	6.778	7.204	DMU <sub>10</sub>
3.01	437	3.03	3.29	8.833	11.125	DMU <sub>11</sub>
3.86	440	3.52	3.15	6.833	8.595	DMU <sub>12</sub>
3.32	387	3.34	3.14	7.055	10.882	DMU <sub>13</sub>
3.8	361	3.7	3.49	7.167	9.149	DMU <sub>14</sub>
2.77	463	3.5	3.61	8.778	8.777	DMU <sub>15</sub>
3.34	460	3.16	3.52	7.278	7.399	DMU <sub>16</sub>
3.11	426	2.74	3.52	7.278	7.399	DMU <sub>17</sub>
2.52	290	2.78	3.31	4.944	7.144	DMU <sub>18</sub>
2.87	365	3.29	3.17	5.444	8.218	DMU <sub>19</sub>