دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال پنجم، شماره هجدهم، خرداد و تیر ۱۳۹۸
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
پژوهش‌های نوین در ریاضی

بازبینی یک مدل ریاضی برای حل مساله‌ی برنامه‌ریزی خطی تماماً فازی با اعداد فازی ذوزنقه‌ای

علی ابراهیم‌نژاد*

گروه ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد قائم‌شهر، قائم‌شهر، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۷/۱۲/۱۱ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۸/۰۴/۰۴

چکیده

در این مقاله، مساله‌ی برنامه‌ریزی خطی تماماً فازی (FFLP) با قیود مساوی و نامساوی بررسی می‌شود که در آن تمام پارامترهای مساله با اعداد فازی ذوزنقه‌ای نمایش داده می‌شوند. بر اساس رویکرد جاری مساله‌ی برنامه‌ریزی خطی تماماً فازی با قیود تساوی به یک مساله برنامه‌ریزی خطی چند هدفه (MOLP) تبدیل و سپس روش مقایسه الفبایی برای حل مساله MOLP حاصل، استفاده می‌شود. با این وجود، این رویکرد برای یافتن جواب بهینه‌ی فازی مساله‌ی FFLP با قیود نامساوی فازی نمی‌تواند استفاده شود. هدف این مطالعه، شناسایی و اصلاح برخی اشتباهات در تعاریف، عملیات نمادگذاری و روش مقایسه فازی رویکرد جاری برای حل مساله‌ی FFLP با قیود نامساوی فازی است. بدین‌ترتیب، یک رویکرد اصلاح شده برای حل مساله‌ی FFLP با قیود نامساوی فازی پیشنهاد می‌شود. سرانجام، چندین مثال عددی برای مصور نمودن روش پیشنهادی ارایه می‌شود.

واژه‌های کلیدی: برنامه‌ریزی خطی تماماً فازی، برنامه‌ریزی خطی چندهدفه، مقایسه الفبایی، اعداد فازی ذوزنقه‌ای.

*. عهده‌دار مکاتبات: Email: a.ebrahimnejad@qaemiau.ac.ir

۱- مقدمه

برنامه‌ریزی خطی یک تکنیک ریاضی برای اختصاص بهینه‌ی منابع محدود به فعالیت‌های معلوم برای رسیدن به هدفی مطلوب است. در مسایل برنامه‌ریزی خطی کلاسیک فرض بر این است تمام پارامترهای مساله به طور دقیق مشخص می‌شوند. به هر حال، مقادیر مشاهده شده مسایل جهان واقعی به دلیل اطلاعات ناقص یا غیر قابل دستیابی نادقیق و مبهم می‌باشند. یک روش کارا برای نمایش مقادیر نادقیق و مبهم مساله‌ی برنامه‌ریزی خطی، از طریق توابع عضویت مجموعه‌های فازی است و بدین‌ترتیب یک مساله‌ی برنامه‌ریزی خطی فازی به وجود می‌آید. بر این اساس محقیق زیادی روی حل مساله‌ی برنامه‌ریزی خطی فازی متمرکز شده‌اند.

همان‌طور که توسط ابراهیم‌نژاد و وردگای [۱] مطرح شده است رویکردهای حل مسایل برنامه‌ریزی خطی فازی به دو دسته‌ی کلی رویکرد مبتنی بر سیمپلکس و رویکرد مبتنی بر غیرسیمپلکس تقسیم می‌شوند. در رویکرد مبتنی بر سیمپلکس، الگوریتم‌های سیمپلکس کلاسیک برای یافتن جواب بهینه مساله‌ی برنامه‌ریزی خطی با پارامترهای فازی تعمیم داده می‌شوند. در رویکرد مبتنی بر غیرسیمپلکس، مساله‌ی برنامه‌ریزی خطی فازی تحت بررسی به یک مساله برنامه‌ریزی خطی تک هدفه یا چند هدفه‌ی قطعی تبدیل و با الگوریتم‌های استاندارد حل می‌شود. رویکر پیشنهادی در این مقاله متعلق به دسته رویکرد مبتنی بر غیرسیمپلکس است.

مسایل برنامه‌ریزی خطی با پارامترهای فازی که بر اساس رویکردهای مبتنی بر غیرسیمپلکس حل می‌شوند به هفت گروه کلی زیر طبقه بندی می‌شوند:

- برنامه‌ریزی خطی فازی از نوع اول: در این گروه، سمت راست قیود و ضرایب متغیرهای تصمیم‌گیری در قیود با اعداد فازی نمایش داده می‌شوند.
- برنامه‌ریزی خطی فازی از نوع دوم: در این گروه، ضرایب متغیرهای تصمیم‌گیری در تابع هدف با اعداد فازی نمایش داده می‌شوند.
- برنامه‌ریزی خطی فازی از نوع سوم: در این گروه، ضرایب متغیرهای تصمیم‌گیری در قیود و تابع هدف با اعداد فازی نمایش داده می‌شوند.
- برنامه‌ریزی خطی فازی از نوع چهارم: در این گروه، سمت راست قیود و ضرایب متغیرهای تصمیم‌گیری در قیود و تابع هدف با اعداد فازی نمایش داده می‌شوند.
- برنامه‌ریزی خطی فازی از نوع پنجم: در این گروه، سمت راست قیود و متغیرهای تصمیم‌گیری با اعداد فازی نمایش داده می‌شوند.
- برنامه‌ریزی خطی فازی از نوع ششم: در این گروه، سمت راست قیود، متغیرهای تصمیم‌گیری و ضرایب متغیرهای تصمیم‌گیری در تبع هدف با اعداد فازی نمایش داده می‌شوند.
- برنامه‌ریزی خطی فازی از نوع هفتم: در این گروه، سمت راست قیود، متغیرهای تصمیم‌گیری و ضرایب متغیرهای تصمیم‌گیری در قیود و تابع هدف با اعداد فازی نمایش داده می‌شوند. مساله‌ی متعلق به این گروه را مساله‌ی برنامه‌ریزی خطی تماماً فازی (FFLP) می‌نامند.

در این مقاله مسایل برنامه‌ریزی خطی فازی از نوع هفتم مورد بررسی قرار می‌گیرد. خوانندگان برای مطالعه بیشتر روی مسایل برنامه‌ریزی خطی از نوع اول تا ششم به مراجع [۱۲-۲] رجوع کنند. اکنون، بررسی مختصری بر روی روش‌های حل مسایل برنامه‌ریزی تماماً فازی صورت می‌گیرد. باکلی و فیورینگ [۱۳] مساله‌ی FFLP را با تعریف جدیدی از بیشینه‌کردن یک عدد فازی به یک مساله‌ی برنامه‌ریزی چندهدفه‌ی قطعی تبدیل کردند و یک روش تکاملی برای یافتن مساله‌ی انعطاف‌پذیر فازی ارایه دادند. هاشمی و همکاران [۱۴] یک تکنیک دو مرحله‌ای برای حل مسایل نوع هفتم بر اساس مقایسه مقدار میانگین و انحراف میعار اعداد فازی پیشنهاد داده‌اند. حسین‌زاده لطفی و همکاران [۱۵] یک رویکرد کارا برای حل مساله FFLP با قیود تساوی ارایه داده‌اند که در آن هر عدد فازی مثلثی به نزدیکترین عدد مثلثی تقارن تقریب زده شده است. کومار و همکاران [۱۶]، با بهبود روش حسین‌زاده لطفی و همکاران [۱۵] یک جواب دقیق برای همان مساله به‌دست آوردند. کومار و کیور [۱۷] رویکرد مشابهی برای حل مسایل FFLP پیشنهاد داده‌اند که هم برای قیود تساوی و هم قیود نامساوی کارساز است. عزتی و همکاران [۱۸] رویکرد جدیدی برای حل همین مساله با تبدیل آن به یک مساله‌ی برنامه‌ریزی

خطی چندهدفه قطعی ارایه داده‌اند. چنگ و همکاران [۱۹] مساله‌ی FFLP با قیود تساوی را مطالعه نمودند. آن‌ها قیود تساوی فازی را با استفاده از اندازه تشابه به قیود نامساوی قطعی و تابع هدف فازی را به دو تابع هدف قطعی تبدیل نمودند. از آن‌جا که درجه شدنی بودن قیود با مقدار بهینه‌ی تابع هدف در تعارض است، آن‌ها یک مساله کمکی با سه تابع هدف ساخته و آن را با رویکرد برنامه‌ریزی تقابلی حل کردند. حسین‌زاده و عدالت‌پناه [۲۰] رویکردی مبتنی بر روش الفبایی و روش‌های برنامه‌ریزی خطی برای حل مساله FFLP پیشنهاد داده‌اند. داس و همکاران [۲۱] با تعمیم روش عزتی و همکاران [۱۸] روشی برای حل مساله‌ی برنامه‌ریزی خطی تماماً فازی با قیود تساوی و نامساوی ارایه داده‌اند که در آن تمام پارامترهای مساله با اعداد فازی ذوزنقه‌ای نمایش داده می‌شوند. رویکرد پیشنهادی آن‌ها براساس تبدیل مساله فازی تحت بررسی به مساله برنامه‌ریزی خطی چندهدفه و روش مقایسه الفبایی استوار است. با این وجود، این رویکرد برای یافتن جواب بهینه‌ی فازی مساله‌ی FFLP با قیود نامساوی فازی نمی‌تواند استفاده شود. هدف این مطالعه، شناسایی و اصلاح برخی اشتباهات در تعاریف، عملیات نمادگذاری و روش مقایسه فازی رویکرد جاری برای حل مساله‌ی FFLP با قیود نامساوی فازی است. بدین‌ترتیب، یک رویکرد اصلاح شده برای حل مساله‌ی FFLP با قیود نامساوی فازی پیشنهاد می‌شود.

ادامه این مقاله به صورت زیر سازماندهی شده است. در بخش دوم، مفاهیم اولیه نظریه مجموعه‌های فازی مرور می‌گردد. در بخش سوم، رویکرد جاری برای حل مساله FFLP با قیودتساوی و نامساوی مرور می‌شود. در بخش چهارم، به نقایص و کاستی‌های رویکرد جاری اشاره می‌گردد. در بخش پنجم رویکرد جاری برای حل مساله FFLP با قیود نامساوی فازی اصلاح می شود. در بخش ششم، رویکرد اصلاح شده با چندین مثال عددی تبیین می‌شود. بخش هفتم شامل نتیجه‌گیری و پیشنهادات آتی می‌شود.

۲- نظریه مجموعه‌های فازی

در این بخش، مفاهیم اولیه اعداد فازی، عملیات حساب فازی و مقایسه اعداد فازی آورده می‌شود [۱، ۲۵-۲۲].

تعریف ۱. هر مجموعه فازی محدب و نرمال تعریف شده روی اعداد حقیقی که تابع عضویت آن قطعه‌ای پیوسته باشد یک عدد فازی نامیده می‌شود.

تعریف ۲. عدد فازی $\tilde{A}=(a_1,a_2,a_3,a_4)$ را عدد فازی ذوزنقه‌ای می‌گویند هر گاه تابع عضویت آن به صورت زیر تعریف شود:

$$\mu_{\tilde{A}}(x)=\begin{cases}\dfrac{x-a_1}{a_2-a_1}, & a_1\le x\le a_2,\\ 1, & a_2\le x\le a_3,\\ \dfrac{a_4-x}{a_4-a_3}, & a_3\le x\le a_4.\end{cases} \qquad (۱)$$

تعریف ۳. عدد فازی ذوزنقه‌ای $\tilde{A}=(a_1,a_2,a_3,a_4)$ را مثبت (نامنفی) گویند اگر و فقط اگر $a_1>0$ ($a_1\ge 0$).

تعریف ۳. دو عدد فازی ذوزنقه‌ای $\tilde{A}=(a_1,a_2,a_3,a_4)$ و $\tilde{B}=(b_1,b_2,b_3,b_4)$ را برابر می‌گویند هرگاه $a_1=b_1,\ a_2=b_2,\ a_3=b_3,\ a_4=b_4$.

تعریف ۴. فرض کنید $\tilde{A}=(a_1,a_2,a_3,a_4)$ و $\tilde{B}=(b_1,b_2,b_3,b_4)$ دو عدد فازی ذوزنقه‌ای باشند و $k\in\mathbb{R}$. آنگاه عملیات حسابی جمع، تفریق، ضرب و ضرب اسکالر روی این دو عدد فازی به صورت زیر تعریف می‌گردد:

الف. $\tilde{A}+\tilde{B}=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3,a_4+b_4)$

ب. $\tilde{A}-\tilde{B}=(a_1-b_4,a_2-b_3,a_3-b_2,a_4-b_1)$

ج. $\tilde{A}\otimes\tilde{B}=(t_1,t_2,t_3,t_4)$ که در آن

$$t_1=\min\{a_1b_1,a_1b_4,a_4b_1,a_4b_4\}$$
$$t_2=\min\{a_2b_2,a_2b_3,a_3b_2,a_3b_3\}$$
$$t_3=\max\{a_2b_2,a_2b_3,a_3b_2,a_3b_3\}$$
$$t_4=\max\{a_1b_1,a_1b_4,a_4b_1,a_4b_4\}$$

د. $$k\tilde{A}=\begin{cases}(ka_1,ka_2,ka_3,ka_4), & k\ge 0,\\ (ka_4,ka_3,ka_2,ka_1), & k<0.\end{cases}$$

داس و همکاران [۲۱] تعریف زیر را برای مقایسه دو عدد فازی ذوزنقه‌ای دلخواه براساس روش الفبایی ارایه داده‌اند.

تعریف ۵. فرض کنید $\tilde{A}=(a_1,a_2,a_3,a_4)$ و $\tilde{B}=(b_1,b_2,b_3,b_4)$ دو عدد فازی ذوزنقه‌ای باشند. می‌گوییم $\tilde{A}\prec\tilde{B}$ اگر و فقط اگر

الف. $a_2-a_1>b_2-b_1$، یا

ب. $a_2-a_1=b_2-b_1$ و $a_2<b_2$، یا

ج. $a_2-a_1=b_2-b_1$، $a_2=b_2$ و $\frac{a_2+a_3}{2}<\frac{b_2+b_3}{2}$

د. $a_2-a_1=b_2-b_1$، $a_2=b_2$، $\frac{a_2+a_3}{2}=\frac{b_2+b_3}{2}$ و $a_4-a_3<b_4-b_3$.

نکته ۱. با توجه به تعریف ۶ بدیهی است $a_2-a_1=b_2-b_1$، $a_2=b_2$، $\frac{a_2+a_3}{2}=\frac{b_2+b_3}{2}$ و $a_4-a_3=b_4-b_3$ اگر و فقط اگر $\tilde{A}=\tilde{B}$.

برای این که بتوانیم کاستی‌ها و نواقص روش داس و همکاران [۲۱] را نشان دهیم نیاز است نمایش دیگری از اعداد فازی ذوزنقه‌ای و عملیات حسابی روی آن‌ها را برحسب گستره‌های چپ و راست و هسته بیان کنیم.

نکته ۲. عدد فازی $\tilde{A}=(m_1,n_1,\alpha_1,\beta_1)$ را عدد فازی ذوزنقه‌ای می‌گویند هر گاه تابع عضویت آن به صورت زیر تعریف شود:

$$\mu_{\tilde{A}}(x)=\begin{cases}\dfrac{x-(m_1-\alpha_1)}{\alpha_1}, & m_1-\alpha_1\le x\le m_1,\\ 1, & m_1\le x\le n_1,\\ \dfrac{(n_1+\alpha_2)-x}{\alpha_2}, & n_1\le x\le n_1+\alpha_2.\end{cases} \quad (۲)$$

نکته ۳. عدد فازی ذوزنقه‌ای $\tilde{A}=(m_1,n_1,\alpha_1,\beta_1)$ را عدد فازی مثبت (نامنفی) گویند اگر و فقط اگر $m_1-\alpha_1>0$ $(m_1-\alpha_1\ge 0)$.

نکته ۴. می‌گوییم دو عدد فازی ذوزنقه‌ای $\tilde{A}=(m_1,n_1,\alpha_1,\beta_1)$ و $\tilde{B}=(m_2,n_2,\alpha_2,\beta_2)$ برابرند هرگاه $m_1=m_2,\ n_1=n_2,\ \alpha_1=\alpha_2,\beta_1=\beta_2$.

نکته ۵. فرض کنید $\tilde{A}=(m_1,n_1,\alpha_1,\beta_1)$ و $\tilde{B}=(m_2,n_2,\alpha_2,\beta_2)$ دو عدد فازی ذوزنقه‌ای باشند و $k\in\mathbb{R}$. آنگاه عملیات حسابی جمع، تفریق، ضرب و ضرب اسکالر روی این دو عدد فازی به صورت زیر تعریف می‌گردد:

الف. $\tilde{A}+\tilde{B}=(m_1+m_2\,,n_1+n_2\,,\alpha_1+\alpha_2\,,\beta_1+\beta_2)$

ب. $\tilde{A}-\tilde{B}=(m_1-n_2\,,n_1-m_1,\alpha_1+\beta_2,\beta_1+\alpha_2)$

ج. $\tilde{A}\otimes\tilde{B}=(t_1,t_2,t_3,t_4)$ که $t_1=m_1m_2$، $t_2=n_1n_2$، $t_3=m_1m_2-(m_1-\alpha_1)(m_2-\alpha_2)$ و $t_4=(n_1+\beta_1)(n_2+\beta_2)-n_1n_2$

د. $k\tilde{A}=\begin{cases}(km_1,kn_1,k\alpha_1,k\beta_1), & k\ge 0,\\ (kn_1,km_1,k\beta_1,k\alpha_1), & k<0.\end{cases}$

با توجه به نکات ۲ الی ۴، تعریف ۵ برای مقایسه دو عدد فازی ذوزنقه‌ای دلخواه براساس روش الفبایی به صورت زیر خواهد بود.

نکته ۶. فرض کنید $\tilde{A}=(m_1,n_1,\alpha_1,\beta_1)$ و $\tilde{B}=(m_2,n_2,\alpha_2,\beta_2)$ دو عدد فازی ذوزنقه‌ای باشند. می‌گوییم $\tilde{A}\prec\tilde{B}$ اگر و فقط اگر

الف. $\alpha_1>\alpha_2$، یا

ب. $\alpha_1=\alpha_2$ و $m_1<m_2$، یا

ج. $\alpha_1=\alpha_2$، $m_1=m_2$ و $\frac{m_1+n_1}{2}<\frac{m_2+n_2}{2}$، یا

د. $\alpha_1=\alpha_2$، $m_1=m_2$، $\frac{m_1+n_1}{2}=\frac{m_2+n_2}{2}$ و $\beta_1<\beta_2$.

۳- روش داس و همکاران برای حل FFLP با قیود مساوی

در این بخش روش داس و همکاران [۲۱] برای حل مساله‌ی برنامه‌ریزی خطی تماماً فازی مرور می‌گردد.

مساله برنامه‌ریزی خطی تماماً فازی زیر را در نظر بگیرید که در آن تمامی ضرایب و متغیرهای تصمیم‌گیری با اعداد فازی ذوزنقه‌ای نامنفی نمایش داده می‌شوند:

$$\begin{aligned}&\max \tilde{z}=\sum_{j=1}^{n}\tilde{c}_j\otimes\tilde{x}_j\\ &s.t.\ \sum_{j=1}^{n}\tilde{a}_{ij}\otimes\tilde{x}_j=\tilde{b}_i,\ i=1,2,...,m,\\ &\qquad \tilde{x}_j\succeq\tilde{0},\ j=1,2,....,n.\end{aligned} \quad (۳)$$

فرض کنید در مساله (۳)، $\tilde{c}_j=(c_{1,j},c_{2,j},c_{3,j},c_{4,j})$، بردار هزینه‌ی فازی، $\tilde{a}_{ij}=(a_{1,ij},a_{2,ij},a_{3,ij},a_{4,ij})$، ماتریس ضرایب تکنولوژیکی فازی، $\tilde{x}_j=(x_{1,j},x_{2,j},x_{3,j},x_{4,j})$، بردار متغیرهای تصمیم‌گیری فازی و $\tilde{b}_i=(b_{1,i},b_{2,i},b_{3,i},b_{4,i})$، بردار سمت راست قیود فازی باشند.

اگر $\tilde{a}_{ij}\otimes\tilde{x}_j=\left((ax)_{1,ij},(ax)_{2,ij},(ax)_{3,ij},(ax)_{4,ij}\right)$ و $\tilde{c}_j\otimes\tilde{x}_j=\left((cx)_{1,j},(cx)_{2,j},(cx)_{3,j},(cx)_{4,j}\right)$، مساله (۳) با توجه به تعریف ۴، به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned}
&\max \tilde{z}=\\
&\left(\sum_{j=1}^{n}(cx)_{1,j},\sum_{j=1}^{n}(cx)_{2,j},\sum_{j=1}^{n}(cx)_{3,j},\sum_{j=1}^{n}(cx)_{4,j}\right)\\
&s.t.\left(\sum_{j=1}^{n}(ax)_{1,ij},\sum_{j=1}^{n}(ax)_{2,ij},\sum_{j=1}^{n}(ax)_{3,ij},\sum_{j=1}^{n}(ax)_{4,ij}\right)\\
&=(b_{1,i},b_{2,i},b_{3,i},b_{4,i}),\qquad i=1,2,\dots,m,\\
&x_{1,j}\geq 0,\\
&x_{2,j}-x_{1,j}\geq 0,\\
&x_{3,j}-x_{2,j}\geq 0,\\
&x_{4,j}-x_{3,j}\geq 0,\\
&j=1,2,\dots,n.
\end{aligned}\tag{۴}$$

با توجه به تعریف ۳، مساله (۴) به مساله زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned}
&\max \tilde{z}=\left(\sum_{j=1}^{n}(cx)_{1,j},\sum_{j=1}^{n}(cx)_{2,j},\sum_{j=1}^{n}(cx)_{3,j},\sum_{j=1}^{n}(cx)_{4,j}\right)\\
&s.t.\quad \sum_{j=1}^{n}(ax)_{1,ij}=b_{1,i},\ i=1,2,\dots,m,\\
&\qquad \sum_{j=1}^{n}(ax)_{2,ij}=b_{2,i},\ i=1,2,\dots,m,\\
&\qquad \sum_{j=1}^{n}(ax)_{3,ij}=b_{3,i},\ i=1,2,\dots,m,\\
&\qquad \sum_{j=1}^{n}(ax)_{4,ij}=b_{4,i},\ i=1,2,\dots,m,\\
&\qquad x_{1,j}\geq 0, x_{2,j}-x_{1,j}\geq 0,\\
&\qquad x_{3,j}-x_{2,j}\geq 0,\\
&\qquad x_{4,j}-x_{3,j}\geq 0,\\
&\qquad j=1,2,\dots,n.
\end{aligned}\tag{۵}$$

داس و همکاران [۲۱]، با توجه به تعریف ۵، مساله (۵) را به مساله برنامه‌ریزی خطی چندهدفه قطعی زیر تبدیل کردند:

$$\begin{aligned}
&\min z_1=\left(\sum_{j=1}^{n}(cx)_{2,j}-\sum_{j=1}^{n}(cx)_{1,j}\right)\\
&\max z_2=\sum_{j=1}^{n}(cx)_{2,j}\\
&\max z_3=\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n}(cx)_{2,j}+\sum_{j=1}^{n}(cx)_{3,j}\right)\\
&\max z_4=\left(\sum_{j=1}^{n}(cx)_{4,1}-\sum_{j=1}^{n}(cx)_{3,j}\right)\\
&s.t.\quad \text{Constraints of model (5)}
\end{aligned}\tag{۶}$$

سپس یک رویکرد الفبایی برای یافتن جواب بهینه‌ی مساله (۶) به کار گرفته‌اند. به هر حال، رویکرد آن‌ها در حل مساله FFLP با قیود نامساوی فازی نواقصی دارد که در بخش بعدی به آن اشاره می‌گردد.

۳- کاستی‌های روش داس و همکاران برای حل FFLP با قیود نامساوی

در این بخش، به نقایص و کاستی‌های روش داس و همکارن [۲۱] برای حل مساله برنامه‌ریزی خطی تماماً فازی اشاره می‌گردد.

داس و همکاران [۲۱] اشاره داشته‌اند که رویکرد پیشنهادی در حل مساله برنامه‌ریزی خطی تماماً فازی با قیود مساوی را می‌توان برای قیود نامساوی هم استفاده کرد. به همین منظور، روش رتبه‌بندی زیر را برای مقایسه دو عدد فازی جهت تبدیل هر قید نامساوی فازی به قیود قطعی استفاده کرده‌اند.

تعریف ۶: فرض کنید $\tilde{A}=(a_1,a_2,a_3,a_4)$ و $\tilde{B}=(b_1,b_2,b_3,b_4)$ دو عدد فازی ذوزنقه‌ای باشند. می‌گوییم $\tilde{A}\preceq\tilde{B}$ اگر و فقط اگر $a_2-a_1\leq b_2-b_1, a_2\leq b_2, a_3\leq b_3, a_4-a_3\leq b_4-b_3$.

به طور معادل، نکته ۷ برای نمایش دیگر عدد فازی ذوزنقه‌ای به صورت زیر در می‌آید:

نکته ۷. فرض کنید $\tilde{A}=(m_1,n_1,\alpha_1,\beta_1)$ و $\tilde{B}=(m_2,n_2,\alpha_2,\beta_2)$ دو عدد فازی ذوزنقه‌ای باشند. می‌گوییم $\tilde{A}\prec\tilde{B}$ اگر و فقط اگر $\alpha_1\le\alpha_2, m_1\le m_2, n_1\le n_2, \beta_1\le\beta_2$.

اکنون در شرایطی هستم که به تشریح اشتباهات روش داس و همکاران [۲۱] بپردازیم.

خطای اول: داس و همکاران از روش مقایسه داده شده در نکته‌ی ۶ برای تبدیل هر تابع هدف فازی از نوع ماکسیمم‌سازی به چهار تابع هدف قطعی استفاده کرده‌اند و از روش مقایسه داده شده در نکته‌ی ۷ برای تبدیل هر قید نامساوی فازی به قیود قطعی استفاده نموده‌اند. این نشان می‌دهد که داس و همکاران [۲۱] دو روش مقایسه متفاوت برای مقایسه دو عدد فازی در یک مساله به کار گرفته‌اند که اولین خطای رویکرد آن‌ها را نشان می‌دهد.

خطای دوم: مهمترین اشتباه داس و همکاران [۲۱] این است که از تعریف ۵ و یا به طور معادل از نکته ۶ برای مقایسه دو عدد فازی استفاده کرده‌اند. ولی همان طور که از روش پیشنهادی آن‌ها پیداست این تعریف جهت تبدیل تابع هدف فازی به تابع چند هدفه قطعی به کار گرفته شده است. در واقع، این مطلب باید به این گونه اصلاح شود که برای ماکسیمم کردن عبارت فازی $\tilde{A}=(a_1,a_2,a_3,a_4)$ ابتدا باید گستره چپ a_2-a_1 مینیمم، سپس هسته $[a_2,a_3]$ ماکسیمم و سرانجام گستره راست a_4-a_3 ماکسیمم گردد. همچنین ماکسیمم کردن هسته $[a_2,a_3]$ با ماکسیمم کردن ابتدای بازه و نقطه میانی بازه معادل است. بدیهی است با توجه به نکته ۶، چنین مفهومی برای ماکسیمم کردن عدد فازی $\tilde{A}=(m_1,n_1,\alpha_1,\beta_1)$ با مینیمم کردن α_1 و سپس ماکسیمم کردن m_1، $\frac{1}{2}(m_1+n_1)$ و β_1 معادل است.

خطای سوم: با توجه به توضیحات داده شده در خطای دوم، $\max \tilde{c}_j\otimes\tilde{x}_j=\left((m(x))_j,(n(x))_j,(\alpha(x))_j,(\beta(x))_j\right)$ با چهار تابع هدف زیر معادل است:

$$\begin{aligned}
&\min\sum_{j=1}^{n}(\alpha(x))_j\\
&\max\sum_{j=1}^{n}(m(x))_j\\
&\max\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n}(m(x))_j+\sum_{j=1}^{n}(n(x))_j\right)\\
&\max\sum_{j=1}^{n}(\beta(x))_j
\end{aligned}\qquad(۷)$$

با این وجود، داس و همکاران [۲۱] که در حل مساله برنامه‌ریزی خطی تماماً فازی با قیود نامساوی از نمایش دوم عدد فازی ذوزنقه‌ای استفاده کرده‌اند، تابع هدف فازی $\max \tilde{c}_j\otimes\tilde{x}_j=\left((m(x))_j,(n(x))_j,(\alpha(x))_j,(\beta(x))_j\right)$ را به چهار تابع هدف قطعی زیر تبدیل کرده‌اند:

$$\begin{aligned}
&\min\sum_{j=1}^{n}(n(x))_j-\sum_{j=1}^{n}(m(x))_j\\
&\max\sum_{j=1}^{n}(n(x))_j\\
&\max\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n}(n(x))_j+\sum_{j=1}^{n}(\alpha(x))_j\right)\\
&\max\sum_{j=1}^{n}(\beta(x))_j-\sum_{j=1}^{n}(\alpha(x))_j
\end{aligned}\qquad(۸)$$

که بوضوح با رابطه (۶) متفاوت است. این اشتباه ناشی از آن است که چون این نویسندگان در حل مساله‌ی برنامه‌ریزی خطی تماماً فازی با قیود نامساوی از نمایش دوم عدد فازی ذوزنقه‌ای استفاده کرده‌اند باید از نکته ۶ برای تبدیل تابع هدف فازی به تابع چندهدفه‌ی قطعی استفاده می‌کردند، در حالی که تعریف ۵ برای انجام این تبدیل به کار گرفته شده است. همچنین این نویسندگان به جای به کارگیری عملیات حسابی فازی داده شده در نکته ۵، از عملیات حسابی فازی داده شده در تعریف ۴ استفاده نموده‌اند. بنابراین تمام روند به کار گرفته شده در روش داس و همکاران اشتباه است. به عبارت دیگر آن‌ها ضرب دو عدد فازی ذوزنقه‌ای $\tilde{A}=(m_1,n_1,\alpha_1,\beta_1)$ و $\tilde{B}=(m_2,n_2,\alpha_2,\beta_2)$ را به صورت $\tilde{A}\otimes\tilde{B}=(m_1m_2,n_1n_2,\alpha_1\alpha_2,\beta_1\beta_2)$ بیان کردند که بوضوح با توجه به بند سوم نکته ۵ نادرست است. در بخش بعدی، رویکرد آن‌ها برای حل مساله‌ی برنامه‌ریزی خطی تماماً فازی با قیود نامساوی اصلاح می‌گردد.

۴- روش اصلاح شده برای حل FFLP با قیود نامساوی

در این بخش، روش داس و همکارن [۲۱] برای حل مساله برنامه‌ریزی خطی تماماً فازی با قیود نامساوی اصلاح می‌گردد.

مساله‌ی FFLP با قیود نامساوری زیر را در نظر بگیرید:

$$\max \tilde{z} = \sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_j \otimes \tilde{x}_j$$
$$s.t. \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} \otimes \tilde{x}_j \preceq \tilde{b}_i,\ i=1,2,...,m, \qquad (۸)$$
$$\tilde{x}_j \succeq \tilde{0},\ j=1,2,....,n.$$

جهت تبدیل هر قید نامساوی فازی به قیود قطعی از تعریف زیر که توسط رامیک و ریمانک [۲۶] پیشنهاد شده است برای مقایسه دو عدد فازی استفاده می‌کنیم که نسبت به تعریف ۶ به محاسبات کمتری نیاز دارد.

تعریف ۷: فرض کنید $\tilde{A}=(a_1,a_2,a_3,a_4)$ و $\tilde{B}=(b_1,b_2,b_3,b_4)$ دو عدد فازی ذوزنقه‌ای باشند. می‌گوییم $\tilde{A}\preceq\tilde{B}$ اگر و فقط اگر $a_1 \le b_1, a_2 \le b_2, a_3 \le b_3, a_4 \le b_4$.

با فرض نامنفی بودن پارامترهای، $\tilde{c}_j=(c_{1,j},c_{2,j},c_{3,j},c_{4,j})$ بردار هزینه‌ی فازی، $\tilde{a}_{ij}=(a_{1,ij},a_{2,ij},a_{3,ij},a_{4,ij})$، ماتریس ضرایب تکنولوژیکی فازی، $\tilde{x}_j=(x_{1,j},x_{2,j},x_{3,j},x_{4,j})$، بردار متغیرهای تصمیم‌گیری فازی و $\tilde{b}_i=(b_{1,i},b_{2,i},b_{3,i},b_{4,i})$، بردار سمت راست قیود فازی، مساله‌ی (۸) به صورت زیر در می‌آید:

$$\max \tilde{z} = \left(\sum_{j=1}^{n} c_{1,j}x_{1,j}, \sum_{j=1}^{n} c_{2,j}x_{2,j}, \sum_{j=1}^{n} c_{3,j}x_{3,j}, \sum_{j=1}^{n} c_{4,j}x_{4,j}\right)$$
$$s.t.$$
$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_{1,ij}x_{1,ij}, \sum_{j=1}^{n} a_{2,ij}x_{2,ij}, \sum_{j=1}^{n} a_{3,ij}x_{3,ij},, \sum_{j=1}^{n} a_{4,ij}x_{4,ij},\right) \qquad (۹)$$
$$\preceq (b_{1,i},b_{2,i},b_{3,i},b_{4,i}),\ i=1,2,...,m,$$
$$x_{1,j} \ge 0,\quad x_{2,j}-x_{1,j} \ge 0,\ x_{3,j}-x_{2,j} \ge 0,$$
$$x_{4,j}-x_{3,j} \ge 0,\ j=1,2,....,n.$$

با توجه به تعریف ۷، مساله (۹) به مساله زیر تبدیل می‌شود:

$$\max \tilde{z} = \left(\sum_{j=1}^{n} c_{1,j}x_{1,j}, \sum_{j=1}^{n} c_{2,j}x_{2,j}, \sum_{j=1}^{n} c_{3,j}x_{3,j}, \sum_{j=1}^{n} c_{4,j}x_{4,j}\right)$$
$$s.t.$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{1,ij}x_{1,ij} \trianglelefteq b_{1,i},\ i=1,2,...,m,$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{2,ij}x_{2,ij} \trianglelefteq b_{2,i},\ i=1,2,...,m,$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{3,ij}x_{3,ij} \trianglelefteq b_{3,i},\ i=1,2,...,m,$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{4,ij}x_{4,ij} \trianglelefteq b_{4,i},\ i=1,2,...,m, \qquad (۱۰)$$
$$x_{1,j} \ge 0, x_{2,j}-x_{1,j} \ge 0, x_{3,j}-x_{2,j} \ge 0,$$
$$x_{4,j}-x_{3,j} \ge 0,\ j=1,2,....,n.$$

ادامه روند مشابه روش داس و همکاران [۲۱] است که منجر به مساله برنامه‌ریزی خطی چندهدفه قطعی زیر شده است:

$$\min z_1 = \left(\sum_{j=1}^{n}(cx)_{2,j} - \sum_{j=1}^{n}(cx)_{1,j}\right)$$
$$\max z_2 = \sum_{j=1}^{n}(cx)_{2,j}$$
$$\max z_3 = \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n}(cx)_{2,j} + \sum_{j=1}^{n}(cx)_{3,j}\right) \qquad (۱۱)$$
$$\max z_4 = \left(\sum_{j=1}^{n}(cx)_{4,1} - \sum_{j=1}^{n}(cx)_{3,j}\right)$$
$$s.t.\quad \text{Constraints of model (10)}$$

مساله (۱۱) با رویکرد الفبایی حل خواهد شد.

۵- مثال‌های عددی

در این بخش، مثال‌های عددی حل شده توسط داس و همکارن [۲۱] برای حل مساله برنامه‌ریزی خطی تماماً فازی با قیود نامساوی، با رویکرد اصلاح شده در این مقاله جهت تبیین اشکالات و نقایص رویکرد آن‌ها حل می‌گردد.

مثال ۱: شرکتی در صدد تولید سه محصول P_1، P_2 و P_3 است که با سه ماشین مختلف M_1، M_2 و M_3 پردازش می‌شوند. زمان‌های تقریبی مورد نیاز (بر حسب دقیقه) برای تولید هر واحد از محصول و ظرفیت تقریبی روزانه‌ی هر ماشین (بر حسب دقیقه در روز) در جدول ۱ آمده است. شرکت می‌خواهد که سود حاصل از فروش هر واحد از محصولات P_1، P_2 و P_3 به ترتیب نزدیک به ۱۴، ۱۳ و ۱۶ روپیه را حفظ نماید. فرض بر این است که تمام واحدهای تولید شده فروخته می‌شوند. شرکت می‌خواهد میزان تولید روزانه هر یک از سه محصول را تعیین کند به طوری که سود آن ماکزیمم گردد.

میزان زمان انجام کار ممکن است به دلیل خرابی ماشین‌ها و اضافه‌کاری‌ها روزانه متفاوت باشد. همچنین، سود حاصل از فروش را نمی‌توان به دلیل تغییرات قیمت به طور دقیق پیش‌بینی نمود. چون سود و زمان غیرقطعی می‌باشند، انتظار می‌رود که میزان تولید هر یک از سه محصول نیز غیرقطعی باشد. با در نظر گرفتن عدد فازی ذوزنقه‌ای برای پارامترهای نادقیق داده شده در جدول ۱ و با فرض این که $\tilde{x}_1$، $\tilde{x}_2$ و $\tilde{x}_3$ میزان تقریبی تولیدی روزانه‌ای باشند که به ترتیب از محصولات P_1، P_2 و P_3 تولید می‌شوند، مساله‌ی برنامه‌ریزی خطی فازی زیر باید حل شود:

$$\begin{aligned}
&\max \tilde{z} = (11,13,15,17)\tilde{x}_1 + (9,12,14,17)\tilde{x}_2 + (13,15,17,19)\tilde{x}_3\\
&s.t.\\
&(9,11,13,15)\tilde{x}_1 + (11,12,14,15)\tilde{x}_2\\
&\qquad + (9,11,13,15)\tilde{x}_3 \preceq (469,475,505,511)\\
&(11,12,16,17)\tilde{x}_1 + (11,12,14,15)\tilde{x}_3 \preceq (452,460,480,488)\\
&(9,11,13,15)\tilde{x}_1 + (11,14,16,19)\tilde{x}_2 \preceq (469,475,505,511)\\
&\quad \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3 \succeq \tilde{0}
\end{aligned} \tag{۱۲}$$

مساله (۱۲) را می‌توان با توجه به عملیات حسابی فازی و مقایسه دو عددی فازی بر اساس تعریف ۷ و نیز مساله‌ی (۱۰) به صورت مساله برنامه‌ریزی خطی چند هدفه‌ی زیر نوشت:

$$\begin{aligned}
&\min z_1 = 13x_{2,1} + 12x_{2,2} + 15x_{2,3} - 11x_{1,1} - 9x_{1,2} - 13x_{1,3}\\
&\max z_2 = 13x_{2,1} + 12x_{2,2} + 15x_{2,3}\\
&\max z_3 = \frac{1}{2}\left(13x_{2,1} + 12x_{2,2} + 15x_{2,3} + 15x_{3,1} + 14x_{3,2} + 17x_{3,3}\right)\\
&\max z_4 = \left(17x_{4,1} + 17x_{4,2} + 19x_{4,3} - 15x_{3,1} - 14x_{3,2} - 17x_{3,3}\right)\\
&s.t.\\
&9x_{1,1} + 11x_{1,2} + 12x_{1,3} \le 469,\\
&11x_{2,1} + 12x_{2,2} + 11x_{2,3} \le 475,\\
&13x_{3,1} + 14x_{3,2} + 13x_{3,3} \le 505,\\
&15x_{4,1} + 15x_{4,2} + 15x_{4,3} \le 511,\\
&11x_{1,1} + 11x_{1,3} \le 452,\\
&12x_{2,1} + 12x_{2,3} \le 460,\\
&16x_{3,1} + 14x_{3,3} \le 480,\\
&17x_{4,1} + 15x_{4,3} \le 488,\\
&9x_{1,1} + 11x_{1,2} \le 460,\\
&11x_{2,1} + 14x_{2,2} \le 465,\\
&13x_{3,1} + 16x_{3,2} \le 495,\\
&15x_{4,1} + 19x_{4,2} \le 500,\\
&x_{1,1} \ge 0, x_{2,1} - x_{1,1} \ge 0, x_{3,1} - x_{2,1} \ge 0, x_{4,1} - x_{3,1} \ge 0,\\
&x_{1,2} \ge 0, x_{2,2} - x_{1,2} \ge 0, x_{3,2} - x_{2,2} \ge 0, x_{4,2} - x_{3,2} \ge 0,\\
&x_{1,3} \ge 0, x_{2,3} - x_{1,3} \ge 0, x_{3,3} - x_{2,3} \ge 0, x_{4,3} - x_{3,3} \ge 0.
\end{aligned} \tag{۱۳}$$

اکنون روش الفبایی برای حل مساله‌ی (۱۳) به کار گرفته می‌شود. نخست مساله‌ی زیر حل می‌شود:

$$\begin{aligned}
&\min z_1 = 13x_{2,1} + 12x_{2,2} + 15x_{2,3} - 11x_{1,1} - 9x_{1,2} - 13x_{1,3}\\
&s.t.\\
&\text{Constraints of problem (13).}
\end{aligned} \tag{۱۴}$$

جدول ۱: داده‌های مساله‌ی ترکیب تولید

ماشین‌ها		زمان تقریبی		ظرفیت
	P_1	P_2	P_3	
M_1	۱۲	۱۳	۱۲	۴۹۰
M_2	۱۴	–	۱۳	۴۷۰
M_3	۱۲	۱۵	–	۴۸۰

با توجه به مقدار بهینه‌ی مساله‌ی (۱۴)، $z_1^* = 0$، مساله‌ی زیر حل می‌شود:

$$\begin{aligned} &\max z_2 = 13x_{2,1} + 12x_{2,2} + 15x_{2,3} \\ &s.t. \\ &13x_{2,1} + 12x_{2,2} + 15x_{2,3} - 11x_{1,1} - 9x_{1,2} - 13x_{1,3} = 0, \\ &\text{Constraints of problem (13).} \end{aligned} \qquad (۱۵)$$

با توجه به مقدار بهینه‌ی مساله‌ی (۱۵)، $z_2^* = 0$، مساله‌ی زیر حل می‌شود:

$$\begin{aligned} &\max z_3 = \frac{1}{2}\left(13x_{2,1} + 12x_{2,2} + 15x_{2,3} + 15x_{3,1} + 14x_{3,2} + 17x_{3,3}\right) \\ &s.t.\ \ 13x_{2,1} + 12x_{2,2} + 15x_{2,3} = 0 \\ &13x_{2,1} + 12x_{2,2} + 15x_{2,3} - 11x_{1,1} - 9x_{1,2} - 13x_{1,3} = 0 \\ &\text{Constraints of problem (13).} \end{aligned} \qquad (۱۶)$$

با توجه به مقدار بهینه‌ی مساله‌ی (۱۷)، $z_3^* = 574.5334$، مساله‌ی زیر حل می‌شود:

$$\begin{aligned} &\max z_4 = \left(17x_{4,1} + 17x_{4,2} + 19x_{4,3} - 15x_{3,1} - 14x_{3,2} - 17x_{3,3}\right) \\ &s.t. \\ &\frac{1}{2}\left(13x_{2,1} + 12x_{2,2} + 15x_{2,3} + 15x_{3,1} + 14x_{3,2} + 17x_{3,3}\right) = 574.5334 \\ &13x_{2,1} + 12x_{2,2} + 15x_{2,3} = 0 \\ &13x_{2,1} + 12x_{2,2} + 15x_{2,3} - 11x_{1,1} - 9x_{1,2} - 13x_{1,3} = 0 \\ &\text{Constraints of problem (13).} \end{aligned} \qquad (۱۷)$$

جواب بهینه‌ی مساله‌ی (۱۷) و مقدار بهینه‌ی آن به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} &x_{1,1}^* = 0, x_{2,1}^* = 0, x_{3,1}^* = 0, x_{4,1}^* = 0, \\ &x_{1,2}^* = 0, x_{2,2}^* = 0, x_{3,2}^* = 0, x_{4,2}^* = 1.5333, \\ &x_{1,3}^* = 0, x_{2,3}^* = 0, x_{3,3}^* = 0, x_{4,3}^* = 32.5333. \\ &z_4^* = 644.2. \end{aligned} \qquad (۱۸)$$

بنابراین جواب بهینه‌ی و مقدار بهینه‌ی مساله‌ی (۱۲) برابر است با:

$$\begin{aligned} &\tilde{x}_1^* = (x_{1,1}^*, x_{2,1}^*, x_{3,1}^*, x_{4,1}^*) = (0,0,0,0), \\ &\tilde{x}_2^* = (x_{1,2}^*, x_{2,2}^*, x_{3,2}^*, x_{4,2}^*) = (0,0,0,1.5333), \\ &\tilde{x}_3^* = (x_{1,3}^*, x_{2,3}^*, x_{3,3}^*, x_{4,3}^*) = (0,0,0,32.5333). \\ &\tilde{z}^* = (0,0,0,644.2). \end{aligned} \qquad (۱۹)$$

قابل ذکر است که جواب بهینه‌ی فازی بدست آمده از روش داس و همکاران [۲۱] برای مساله‌ی (۱۲) نشدنی است.

مثال۲: مساله‌ی FFLP با قیود نامساوی زیر که مربوط به مساله‌ی رژیم غذایی است در نظر بگیرید. جزییات آن توسط داس و همکاران [۲۱] بیان شده است.

$$\begin{aligned} &\max \tilde{z} = (7,10,14,17)\tilde{x}_1 + (8,13,15,20)\tilde{x}_2 \\ &s.t. \\ &(11,13,15,17)\tilde{x}_1 + (9,11,13,17)\tilde{x}_2 \preceq (96,100,102,108) \\ &(12,14,16,18)\tilde{x}_1 + (8,12,14,18)\tilde{x}_3 \preceq (104,112,114,118) \\ &\quad \tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \succeq \tilde{0}. \end{aligned} \qquad (۲۰)$$

مساله‌ی (۲۰) را می‌توان با توجه به عملیات حسابی فازی و مقایسه دو عددی فازی بر اساس تعریف ۷ و نیز مساله‌ی (۱۰) به صورت مساله برنامه‌ریزی خطی چند هدفه‌ی زیر نوشت:

$$\begin{aligned} &\min z_1 = 10x_{2,1} + 13x_{2,2} - 7x_{1,1} - 8x_{1,2} \\ &\max z_2 = 10x_{2,1} + 13x_{2,2} \\ &\max z_3 = \frac{1}{2}\left(10x_{2,1} + 13x_{2,2} + 14x_{3,1} + 15x_{3,2}\right) \\ &\max z_4 = \left(17x_{4,1} + 20x_{4,2} - 14x_{3,1} - 15x_{3,2}\right) \\ &s.t. \\ &11x_{1,1} + 9x_{1,2} \le 96, \\ &13x_{2,1} + 11x_{2,2} \le 100, \\ &14x_{3,1} + 9x_{3,2} \le 102, \\ &17x_{4,1} + 17x_{4,2} \le 108, \\ &12x_{1,1} + 8x_{1,2} \le 104, \\ &14x_{2,1} + 12x_{2,2} \le 112, \\ &16x_{3,1} + 14x_{1,2} \le 114, \\ &18x_{4,1} + 18x_{1,2} \le 119, \\ &x_{1,1} \ge 0, x_{2,1} - x_{1,1} \ge 0, \\ &x_{3,1} - x_{2,1} \ge 0, x_{4,1} - x_{3,1} \ge 0, \\ &x_{1,2} \ge 0, x_{2,2} - x_{1,2} \ge 0, \\ &x_{3,2} - x_{2,2} \ge 0, x_{4,2} - x_{3,2} \ge 0. \end{aligned} \qquad (۲۱)$$

با استفاده از روش الفبایی، جواب بهینه‌ی مساله‌ی (۲۱) و مقدار بهینه‌ی آن به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} &\tilde{x}_1^* = (x_{1,1}^*, x_{2,1}^*, x_{3,1}^*, x_{4,1}^*) = (0,0,0,0), \\ &\tilde{x}_2^* = (x_{1,2}^*, x_{2,2}^*, x_{3,2}^*, x_{4,2}^*) = (0,0,0,6.1111), \\ &\tilde{z}^* = (0,0,0,132.2222). \end{aligned} \qquad (۲۲)$$

قابل ذکر است که با توجه به به کارگیری عملیات حساب فازی نادرست، جواب بهینه‌ی فازی بدست آمده از روش

داس و همکاران [۲۱] برای مساله‌ی (۲۱) نشدنی است.

مثال۳: مساله‌ی FFLP با قیود نامساوی زیر که مربوط به مساله‌ی برنامه‌ریزی تولید یک شرکت است را در نظر بگیرید. جزییات این مساله توسط داس و همکاران [۲۱] بیان شده است.

$$\begin{aligned}
&\max \tilde{z} = (6,8,12,14)\tilde{x}_1 + (4,5,7,8)\tilde{x}_2\\
&s.t.\\
&(0,1,2,3)\tilde{x}_1 + (4,5,7,8)\tilde{x}_2 \preceq (44,46,52,54)\\
&(1,3,5,7)\tilde{x}_1 + (-1,1,3,5)\tilde{x}_3 \preceq (38,42,48,52)\\
&\quad \tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \succeq \tilde{0}.
\end{aligned} \tag{۲۳}$$

مساله‌ی (۲۳) را می‌توان با توجه به عملیات حسابی فازی و مقایسه دو عددی فازی بر اساس تعریف ۷ و نیز مساله‌ی (۱۰) به صورت مساله برنامه‌ریزی خطی چند هدفه‌ی زیر نوشت:

$$\begin{aligned}
&\min z_1 = 8x_{2,1} + 5x_{2,2} - 6x_{1,1} - 4x_{1,2}\\
&\max z_2 = 8x_{2,1} + 5x_{2,2}\\
&\max z_3 = \frac{1}{2}\left(8x_{2,1} + 5x_{2,2} + 12x_{3,1} + 7x_{3,2}\right)\\
&\max z_4 = \left(14x_{4,1} + 8x_{4,2} - 12x_{3,1} - 7x_{3,2}\right)\\
&s.t.\\
&0x_{1,1} + 4x_{1,2} \le 44,\\
&x_{2,1} + 5x_{2,2} \le 46,\\
&2x_{3,1} + 7x_{3,2} \le 52,\\
&3x_{4,1} + 8x_{4,2} \le 54,\\
&x_{1,1} - x_{4,2} \le 38,\\
&3x_{2,1} + x_{2,2} \le 42,\\
&5x_{3,1} + 3x_{1,2} \le 48,\\
&7x_{4,1} + 5x_{4,2} \le 52,\\
&x_{1,1} \ge 0, x_{2,1} - x_{1,1} \ge 0,\\
&x_{3,1} - x_{2,1} \ge 0, x_{4,1} - x_{3,1} \ge 0,\\
&x_{1,2} \ge 0, x_{2,2} - x_{1,2} \ge 0,\\
&x_{3,2} - x_{2,2} \ge 0, x_{4,2} - x_{3,2} \ge 0.
\end{aligned} \tag{۲۴}$$

با استفاده از روش الفبایی، جواب بهینه‌ی مساله‌ی (۲۴) و مقدار بهینه‌ی آن به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
&\tilde{x}_1^* = (x_{1,1}^*, x_{2,1}^*, x_{3,1}^*, x_{4,1}^*) = (0,0,0,7.428571),\\
&\tilde{x}_2^* = (x_{1,2}^*, x_{2,2}^*, x_{3,2}^*, x_{4,2}^*) = (0,0,0,0),\\
&\tilde{z}^* = (0,0,0,104).
\end{aligned} \tag{۲۵}$$

قابل ذکر است که با توجه به به کارگیری عملیات حساب فازی نادرست، جواب بهینه‌ی فازی بدست آمده از روش داس و همکاران [۲۱] برای مساله‌ی (۲۴) نشدنی است.

۶- نتیجه‌گیری

تاکنون، محققین مدل‌های مختلفی از برنامه‌ریزی خطی فازی ارایه و بر حسب آن رویکردهای جواب بسیاری پیشنهاد داده‌اند. در این مقاله، نوع خاصی از مساله برنامه‌ریزی خطی فازی موسوم به مساله‌ی برنامه‌ریزی خطی تماماً فازی مورد بررسی قرار گرفت که در آن تمام پارامترهای مساله با اعداد فازی ذوزنقه‌ای نامنفی بیان شده‌اند. پس از مروری بر رویکرد پیشنهادی توسط داس و همکاران [۲۱] برای حل مساله‌ی برنامه‌ریزی خطی تماماً فازی با قیود مساوی، به نواقص و کاستی‌های روش پیشنهادی توسط همین نویسندگان در حل مساله‌ی برنامه‌ریزی خطی تماماً فازی با قیود نامساوی اشاره گردید. سپس رویکرد اصلاح‌شده‌ای برای حل مساله FFLP با قیود نامساوی پیشنهاد گردید که نواقص رویکرد جاری را برطرف می‌کند. رویکرد اصلاح شده با حل سه مثال عددی تشریح گردید و نتایج بدست آمده مزیت روش پیشنهادی را نسبت به روش جاری در یافتن جواب بهینه مساله FFLP با قیود نامساوی تایید می‌کند. تعمیم رویکرد پیشنهادی برای حل مسایل برنامه‌ریزی خطی با پارامترهای فازی بازه‌ای مقدار [۲۷، ۲۸] و فازی شهودی [۲۹، ۳۰] می‌تواند زمینه تحقیقات جدیدی برای کارهای آتی باشد.

فهرست منابع

[1] Ebrahimnejad, A., & Verdegay, J. L. (2018). Fuzzy Sets-Based Methods and Techniques for Modern Analytics. Studies in Fuzziness and Soft Computing, vol. 364. Springer, Cham.

[2] Tanaka, H., Ichihashi, H., & Asai, K. (1984). A formulation of fuzzy linear programming problems based on comparison of fuzzy numbers. Control and Cybernetics, 13, 186–194.

[3] Lai, Y.J., & Hwang, C.L. (1992). A new approach to some possibilistic linear programming problem. Fuzzy Sets and Systems, 49(2), 121–133.

[4] Wan, S.P., & Dong, J.Y. (2014). Possibility linear programming with trapezoidal fuzzy numbers. Applied Mathematical Modeling, 38, 1660–1672.

[5] Zimmerman, H.J. (1987). Fuzzy programming and linear programming with several objective functions. Fuzzy Sets and Systems, 1(1), 45–55.

[6] Delgado, M., Verdegay, J.L., & Vila, M.A. (1987). Imprecise costs in mathematical programming problems. Control and Cybernetics, 16(2), 113–121.

[7] Maeda, T. (2001). Fuzzy linear programming problems as bi-criteria optimization problems. Applied Mathematics and Computation, 120(1–3), 109–121.

[8] Zhang, G., Wu, Y.H., Remias, M., & Lu, J. (2003). Formulation of fuzzy linear programming problems as four-objective constrained optimization problems. Applied Mathematics and Computation, 139(2–3), 383–399.

[9] Cai, Q., Hao, Z., & Pan, S. (2007). The solution of linear programming with LR-fuzzy numbers in objective function. In: Fuzzy Information and Engineering (ICFIE), pp. 988–999. Springer, Berlin.

[10] Negi, D.S., & Lee, E.S. (1993). Possibility programming by the comparison of fuzzy numbers. Computers & Mathematics with Applications, 25(9), 43–50.

[11] Fullér, R. (1989). On stability in fuzzy linear programming problems. Fuzzy Sets and Systems 30(3), 339–344.

[12] Hatami-Marbini, A., Agrell, P.J., Tavana, M., & Emrouznejad, A. (2013). A stepwise fuzzy linear programming model with possibility and necessity relations. Journal of Intelligence and Fuzzy Systems, 25(1), 81–93.

[13] Buckley, J.J., & Feuring, T. (2000). Evolutionary algorithm solution to fuzzy problems: fuzzy linear programming. Fuzzy Sets and Systems, 109(1), 35–53.

[14] Hashemi, S.M., Modarres, M., Nasrabadi, E., & Nasrabadi, M.M. (2006). Fully fuzzified linear programming, solution and duality. Journal of Intelligence and Fuzzy Systems, 17(1), 253–261.

[15] Hosseinzadeh Lotfi, F., Allahviranloo, T., Alimardani Jondabeh, M., & Alizadeh, L. (2009). Solving a full fuzzy linear programming using lexicography method and fuzzy approximate solution. Applied Mathematical Modelling, 33(7), 3151–3156.

[16] Kumar, A., Kaur, J., & Singh, P. (2011). A new method for solving fully fuzzy linear programming problems. Applied Mathematical Modelling, 35, 817–823.

[17] Kumar, A., & Kaur, J. (2014). Fuzzy optimal solution of fully fuzzy linear

programming problems using ranking function. Journal of Intelligent & Fuzzy Systems, 16(1), 337-344.

[18] Ezzati, R., Khorram, E., & Enayati, R. (2015). A new algorithm to solve fully fuzzy linear programming problems using the MOLP problem. Applied Mathematical Modelling, 39, 3183–3193.

[19] Cheng, H., Huang, W., & Cai, J. (2013). Solving a fully fuzzy linear programming problem through compromise programming. Journal of Applied Mathematics, Art. ID 726296, 10.

[20] Hosseinzadeh, A., & Edalatpanah, S.A. (2016). A new approach for solving fully fuzzy linear programming by using the lexicography method. Advances in Fuzzy Systems, Art. ID 1538496, 6.

[21] Das, S.K., Mandal, T., & Edalatpanah, S.A. (2017). A mathematical model for solving fully fuzzy linear programming problem with trapezoidal fuzzy numbers. Applied Intelligence 46(3), 509–519.

[22] Ebrahimnejad, A., & Tavana, M. (2014). A novel method for solving linear programming problems with symmetric trapezoidal fuzzy numbers. Applied Mathematical Modelling, 37(17-18), 4388-4395.

[23] Ebrahimnejad, A., (2015). A duality approach for solving bounded linear programming problems with fuzzy variables based on ranking functions and its application in bounded transportation problems. International Journal of Systems Science, 46(11), 2048-2060.

[24] Ebrahimnejad, A. (2016). New method for solving Fuzzy transportation problems with LR flat fuzzy numbers. Information Sciences, 37, 108-124.

[25] Kumar, A., & Kaur, A. (2014). Optimal way of selecting cities and conveyances for supplying coal in uncertain environment. Sadhana, 39(1), 165-187.

[26] Ramik, J., & Rimanek, J. (1985). Inequality relation between fuzzy numbers and its use in fuzzy optimization. Fuzzy Sets and Systems 16(2), 123–138.

[27] Ebrahimnejad, A. (2016). Fuzzy linear programming approach for solving transportation problems with interval-valued trapezoidal fuzzy numbers. Sadhana, 41(3), 299-316.

[28] Ebrahimnejad, A. (2018). A method for solving linear programming with interval-valued trapezoidal fuzzy variables. RAIRO - Operations Research, 52(3), 955-979.

[29] Ebrahimnejad, A., Verdegay, J. L. (2016). An efficient computational approach for solving type-2 intuitionistic fuzzy numbers based transportation problems. International Journal of Computational Intelligence Systems, 9(6), 1154-1173.

[30] Ebrahimnejad, A., Verdegay, J. L. (2018). A new approach for solving fully intuitionistic fuzzy transportation problems. Fuzzy Optimization and Decision Making, 17(4), 447-474.