

دسترسی در سایت <http://jnrm.srbiau.ac.ir>

سال پنجم، شماره نوزدهم، مرداد و شهریور ۱۳۹۸

شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸۸



پژوهش‌های نوین در ریاضی



دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

آنتروپی تیسالیس و آنتروپی تیسالیس شرطی افرازهای فازی

محمدحسین زارع‌نژاد^{۱*}، ابوالفضل ابراهیم‌زاده^۲

^(۲و۱) گروه ریاضی، واحد زاهدان، دانشگاه آزاد اسلامی، زاهدان، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۶/۱۱/۰۹ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۷/۰۷/۱۷

چکیده

هدف این پژوهش این است که مفاهیم آنتروپی تیسالیس و آنتروپی تیسالیس شرطی افرازهای فازی را تعریف کرده و نتایجی در مورد این نوع آنتروپی بدست آوریم. نشان می‌دهیم آنتروپی تیسالیس افرازهای فازی دارای ویژگی‌های زیرجمعی و تقعر می‌باشد. این اندازه اطلاعات را تحت روابط نظریف و زیرمجموعه به مد صفر مورد مطالعه قرار می‌دهیم. قوانین زنجیره‌ای را برای این اندازه اطلاعات بررسی کرده و خواصی در مورد آنتروپی افرازهای فازی مستقل اثبات می‌نماییم. نتایجی درباره‌ی رابطه‌ی بین آنتروپی تیسالیس و آنتروپی تیسالیس شرطی افرازهای فازی بدست آورده و به کمک آنتروپی تیسالیس شرطی افرازهای فازی، نشان می‌دهیم که ویژگی زیرجمعی برای آنتروپی تیسالیس افرازهای فازی در حالتی که پارامتر این آنتروپی از یک کوچکتر است، برقرار نمی‌باشد. به طور کلی، آنتروپی تیسالیس افرازهای فازی در حالتی که پارامتر آنتروپی تیسالیس از یک بزرگتر است دارای خواصی شبیه به آنتروپی شانون افرازهای فازی می‌باشد و بنابراین می‌تواند علاوه بر آنتروپی شانون، برای اندازه‌گیری مقدار اطلاعات مستخرج از یک آزمایش فازی مورد استفاده قرار گیرد.

واژه‌های کلیدی: افراز فازی، آنتروپی تیسالیس، آنتروپی تیسالیس شرطی.

۱. مقدمه

رویکرد کلاسیک در نظریه اطلاعات [۳۵] روی آنتروپی شانون پایه‌گذاری شده است و برای اندازه‌گیری مقدار اطلاعاتی که از یک آزمایش بدست می‌آید مناسب می‌باشد. با استفاده از آنتروپی شانون، کولموگروف و سینای [۳۶، ۳۷] آنتروپی سیستم دینامیکی را تعریف کردند. از آنجایی که آنتروپی دو سیستم دینامیکی یکرخت با هم برابر است آن‌ها ابزاری را برای تشخیص سیستم‌های دینامیکی غیریکرخت پیدا نمودند. آنتروپی در بسیاری از علوم مانند نظریه اطلاعات، سیستم‌های دینامیکی، فیزیک، شیمی، علوم کامپیوتر، آمار، حسابداری، اقتصاد، زیست‌شناسی، جامعه‌شناسی، نظریه سیستم‌های عمومی و غیره کاربرد دارد. بنابراین مطالعه آنتروپی دارای اهمیت زیادی در رشته‌های علمی مدرن می‌باشد. فرض کنید $P = (p_1, \dots, p_n)$ یک توزیع احتمال باشد در این صورت آنتروپی شانون P به صورت $H_F(A) = \sum_{i=1}^n F(p_i)$ تعریف می‌شود که تابع $F: [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ تابع آنتروپی شانون) با ضابطه‌ی $F(x) = -x \log x$ اگر $x \in (0, 1]$ و $F(0) = 0$ معرفی می‌گردد. لازم به ذکر است که فرمول آنتروپی منطقی توزیع احتمال $H_L(P) = \sum_{i=1}^n L(p_i)$ به صورت $P = (p_1, \dots, p_n)$ است که تابع آنتروپی منطقی $L: [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ با ضابطه‌ی $L(x) = x(1-x)$ تعریف می‌شود. آنتروپی منطقی توسط جینی [۲۰] در سال ۱۹۱۲ به عنوان ابزار اندازه‌گیری میزان بی‌ثباتی استفاده شد. آنتروپی منطقی حالت خاصی از آنتروپی مربعی راتو [۳۱] و همچنین آنتروپی تیسالیس [۳۸] می‌باشد. در سال ۱۹۸۲ گود، پاتیل و تایلی ایده‌ی آنتروپی منطقی را مورد مطالعه قرار دادند [۲۱، ۲۷]. الرمان در سال ۲۰۱۳ تاریخچه‌ی آنتروپی منطقی را به صورت عمیق‌تری مورد بررسی قرار داد و او رابطه‌ی آنتروپی منطقی و آنتروپی شانون را بررسی نمود [۱۶]. اخیراً مقالاتی در مورد آنتروپی منطقی روی ساختارهای جبری مختلف چاپ شده است [۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۷، ۲۷].

بعد از مقاله‌ی پایه‌ی شانون [۳۵] چندین پژوهشگر اصلاحیه‌هایی از آنتروپی شانون ارائه دادند از جمله رنی

[۳۳]، آرمیتو [۲]، داروکزی [۶]، هارودا، چاروات و تیسالیس [۲۲، ۳۸] و غیره.

آنتروپی تیسالیس در فیزیک آماری قبلاً توسط هارودا و چاروات در [۲۲] معرفی شده بود. اگر $P = (p_1, \dots, p_n)$ یک توزیع احتمال باشد آنتروپی تیسالیس P از مرتبه‌ی q به صورت:

$$S_q(P) = \sum_{i=1}^n I_q(p_i)$$

تعریف می‌شود که $q \in (0, 1) \cup (1, \infty)$. ضابطه‌ی تابع آنتروپی تیسالیس $I_q: [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ به صورت:

$$I_q(x) = -x^q \ln_q x$$

می‌باشد. تابع q -لگاریتم به صورت $\ln_q x = \frac{x^{1-q} - 1}{1-q}$ برای هر $x \in (0, \infty)$ تعریف می‌گردد. بنابراین بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} S_q(P) &= -\sum_{i=1}^n p_i^q \frac{p_i^{1-q} - 1}{1-q} \\ &= \frac{1}{q-1} \left(1 - \sum_{i=1}^n p_i^q \right). \end{aligned} \quad (1)$$

توجه کنید که آنتروپی منطقی، حالت $q = 2$ از آنتروپی تیسالیس است و آنتروپی تیسالیس توسیعی از آنتروپی شانون نیز می‌باشد [۱۸]. آنتروپی تیسالیس توزیع‌های احتمال در مقالاتی از جمله [۱، ۶، ۱۸، ۱۹، ۲۴، ۲۵، ۳۸] مورد مطالعه قرار گرفته است. آنتروپی تیسالیس شرطی یک توزیع احتمال با رویکردهایی متفاوت در [۱، ۱۸] تعریف و مطالعه شده است. در این مقاله، رویکرد ارائه شده در [۱] را به افرازش‌های فازی توسیع خواهیم داد. در [۱] نویسندگان نشان دادند که آنتروپی تیسالیس شرطی در زمینه‌ی کوانتوم، برای تفکیک‌پذیری ماتریس چگالی جهت اعتبارسنجی واقع‌گرایی موضعی کاربرد دارد و به کمک این آنتروپی، قویترین محدودیت روی اعتبار واقع‌گرایی موضعی را می‌توان با شیوه‌ای جدید بدست آورد. همچنین آنتروپی تیسالیس به عنوان یک متریک جدید رتبه‌بندی قدرتمند کلمه برای استخراج کلمات کلیدی یک سند، کاربرد پیدا کرده است [۲۳]. در [۳۹]

۲. افزایش فازی

در این بخش، ابتدا به یادآوری مفهوم فضای احتمال فازی می‌پردازیم و سپس افزایش متناهی فازی، نظریه، الحاق و زیرمجموعه به مد صفر معرفی می‌گردد. فرض کنید X یک مجموعه‌ی ناتهی باشد. یک مجموعه فازی یک نگاشت $f: X \rightarrow [0,1]$ است. برای دو مجموعه‌ی فازی f, g عملگرهای \vee, \wedge به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f \vee g = \sup\{f, g\},$$

$$f \wedge g = \inf\{f, g\}.$$

تعریف ۱، ۲. $M \subseteq [0,1]^X$ را یک σ -جبر گویند اگر:

$$1_X \in M \quad (۱)$$

$$f \in M \text{ اگر } f' = 1_X - f \in M \quad (۲)$$

(۳) اگر برای هر $n \in \mathbb{N}$ $f_n \in M$ آن‌گاه

$$\bigvee_{i=1}^{\infty} f_n := \sup_n f_n \in M$$

مجموعه M را یک مجموعه بطور جزئی مرتب در نظر می‌گیرند که ترتیب جزئی آن به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$f \leq g \text{ اگر و فقط اگر برای هر } x \in X \text{ داشته باشیم}$$

$$f(x) \leq g(x)$$

تعریف ۲، ۲. فرض کنید X یک مجموعه‌ی غیر تهی، M یک σ -جبر و $m: M \rightarrow [0,1]$ تابعی باشد که در شرایط زیر صدق کند:

$$(۱) \text{ برای هر } f \in M, m(f \vee f') = 1$$

(۲) اگر $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از عناصر دو به دو متعامد

$$M \text{ باشد آن‌گاه } m\left(\bigvee_{i=1}^{\infty} f_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m(f_i)$$

سه تایی (X, m, M) را فضای احتمال فازی نامند.

قضیه ۳، ۲. تابع $m: M \rightarrow [0,1]$ دارای خواص زیر می‌باشد:

نویسندگان، تعدادی نامساوی در نظریه اطلاعات را با استفاده از آنتروپی تیسالیس ثابت کرده‌اند. اهمیت تعریف و مطالعه‌ی این نوع آنتروپی، در [۱] مورد بحث واقع شده است. یک مدل ریاضی معمولی از یک آزمایش تصادفی در نظریه اطلاعات، یک افزایش پذیر از فضای اندازه احتمال است. برای حل مسائل واقعی، افزایش‌های تعریف شده توسط مجموعه‌های فازی (افزایش‌های فازی) از افزایش‌های اندازه‌پذیر مجموعه‌های کلاسیک مناسب‌تر می‌باشد و این انگیزه‌ی تعریف افزایش فازی بود. افزایش فازی می‌تواند به عنوان یک مدل ریاضی از یک آزمایش تصادفی که نتایج آن آزمایش، وقایع مبهم (وقایع فازی) باشد به کار برده شود. مفهوم آنتروپی فازی، در نظریه ارگودیک کلاسیک با جایگزین کردن افزایش‌های فازی به جای افزایش‌های اندازه‌پذیر بول، تولید شد. از آنجایی که تعاریف متفاوتی از افزایش‌های فازی وجود دارد [۴، ۷، ۲۹] تعاریف زیادی از آنتروپی شانون افزایش‌های فازی ارائه شده است [۵، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۲۸، ۳۲، ۳۴]. اخیراً آنتروپی منطقی افزایش‌های فازی در [۲۷]، تعریف شده و مورد بررسی قرار گرفته است. ابراهیم‌زاده و جمال‌زاده در [۲۸]، آنتروپی منطقی و آنتروپی منطقی شرطی سیگماجرهای فازی را تعریف کرده و خواصی از آن‌ها را اثبات نموده‌اند. در این پژوهش، می‌خواهیم آنتروپی تیسالیس و آنتروپی تیسالیس شرطی توزیع‌های احتمال را به فضای اندازه احتمال فازی تعمیم دهیم. با جایگزین کردن تابع آنتروپی تیسالیس به جای تابع آنتروپی شانون و تابع آنتروپی منطقی، رویکردی جدید در نظریه اطلاعات فازی خواهیم داشت. در بخش ۲، تعاریف مقدماتی ارائه می‌شود. در بخش ۳ آنتروپی تیسالیس افزایش‌های فازی را تعریف کرده و خواصی از این اندازه اطلاعات اثبات می‌نماییم. به ویژه، خواص زیرجمعی (در حالت $q > 1$) و تقعر را برای این آنتروپی نشان داده می‌شود. در بخش ۴، به تعریف آنتروپی تیسالیس شرطی افزایش‌های فازی می‌پردازیم و قوانین زنجیره‌ای را برای این آنتروپی مورد مطالعه قرار می‌دهیم. با استفاده از آنتروپی تیسالیس شرطی افزایش‌های مستقل فازی نشان می‌دهیم که ویژگی زیرجمعی برای آنتروپی تیسالیس افزایش‌های فازی در حالت $q < 1$ برقرار نیست.

$$f_i \wedge g_j \leq (1-f_k) \wedge (1-g_l) \\ = 1 - (f_k \vee g_l) \leq 1 - (f_k \wedge g_l).$$

تعریف ۶،۲. برای دو افراز فازی A, B گویند $A < B$ هرگاه برای هر $g \in B$ وجود داشته باشد $f \in A$ به طوری که $g \leq f$. در این حالت افراز B را تطرفی از افراز A گوئیم. واضح است که $A, B < A \amalg B$.

$A \subseteq B$ (A زیرمجموعه B به مد صفر است) است اگر برای هر f_i وجود داشته باشد g_j به طوری که

$$m(f_i \wedge g'_j) = m(f'_i \wedge g_j) = 0.$$

تعریف ۷،۲. گویند دو افراز فازی $A = \{f_1, \dots, f_n\}$ و $B = \{g_1, \dots, g_m\}$ مستقل‌اند هرگاه برای هر i, j ، $m(f_i \wedge g_j) = m(f_i) m(g_j)$.

۳. آنتروپی تیسالیس افرازی فازی

در این بخش، آنتروپی تیسالیس افرازی فازی را تعریف می‌کنیم و این اندازه اطلاعات را تحت روابط تطرف و زیرمجموعه به مد صفر بررسی می‌نماییم. مثالی عددی از محاسبه‌ی آنتروپی تیسالیس افراز فازی ارائه می‌دهیم و نشان می‌دهیم این آنتروپی در حالت $q > 1$ ویژگی زیرجمعی دارد. همچنین ویژگی تقعر را برای آنتروپی تیسالیس افرازی فازی ثابت می‌کنیم.

تعریف ۱،۳.

آنتروپی تیسالیس افراز فازی $A = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ از فضای احتمال فازی (X, m, M) از مرتبه $1 \neq q > 0$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$S_q(A) := \frac{1}{q-1} \left(1 - \sum_{i=1}^n (m(f_i))^q \right).$$

در زیر یک مثال عددی از آنتروپی تیسالیس افرازی فازی ارائه می‌شود.

$$(۱) \text{ برای هر } f \in M, m(f') = 1 - m(f)$$

$$(۲) \text{ اگر } f \leq g \text{ آن‌گاه } m(f) \leq m(g)$$

$$(۳) \text{ اگر } f \leq 1 - g \text{ آن‌گاه } m(f \wedge g) = 0$$

$$(۴) \text{ اگر و فقط اگر برای هر } f \in M, m(g) = 1 \\ m(f \wedge g) = m(f)$$

تعریف ۴،۲. فرض کنید $A = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ زیر مجموعه‌ای از M باشد و برای $i \neq j$ داشته باشیم $f_i \leq 1 - f_j$. در این صورت A یک افراز فازی است هرگاه

$$m \left(\bigvee_{i=1}^n f_i \right) = 1.$$

اگر تعریف شود $\bigwedge_i f_i := \inf f_i$ ، آن‌گاه لم زیر را داریم.

لم ۵،۲.

اگر $A = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ و $B = \{g_1, g_2, \dots, g_m\}$ دو افراز فازی باشند آن‌گاه $A \amalg B$ پیوند دو افراز فازی A, B که با نماد $A \amalg B$ نمایش داده می‌شود به صورت

$$A \amalg B = \{f_i \wedge g_j : i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m\},$$

تعریف می‌گردد، یک افراز فازی است و به آن افراز مشترک نیز گویند.

اثبات: واضح است که

$$\bigvee_{j=1}^m \bigvee_{i=1}^n (f_i \wedge g_j) = \bigvee_{j=1}^m \left(\bigvee_{i=1}^n f_i \right) \wedge g_j \\ = \bigvee_{j=1}^m g_j = 1.$$

کافیست ثابت کنیم برای $(i, j) \neq (k, l)$ رابطه‌ی $f_i \wedge g_j \leq 1 - f_k \wedge g_l$ برقرار است.

اگر $i \neq k$ و $j = l$ آن‌گاه $f_i \leq 1 - f_k$ و داریم

$$f_i \wedge g_j \leq (1 - f_k) \wedge g_j \leq 1 - (f_k \wedge g_l) \\ = 1 - (f_k \wedge g_l).$$

اگر $i \neq k$ و $j \neq l$ آن‌گاه $f_i \leq 1 - f_k$ و $g_j \leq 1 - g_l$ و این نتیجه می‌دهد

اگر $f_i \in A$ و $g_j \in B$ وجود دارد به طوری که
 $m(g_j) \leq m(f_i)$

اگر $q < 1$ آن گاه $\sum_{j=1}^m m(g_j)^q \geq \sum_{i=1}^n m(f_i)^q$ از آنجایی که $q-1 < 0$ داریم

$$S_q(A) = \frac{1}{q-1} \left(1 - \sum_{i=1}^n (m(f_i))^q \right) \\ \leq \frac{1}{q-1} \left(1 - \sum_{i=1}^n (m(g_j))^q \right) = S_q(B).$$

اکنون اگر $q > 1$ آن گاه $\sum_{j=1}^m m(g_j)^q \leq \sum_{i=1}^n m(f_i)^q$ از آنجایی که $q-1 > 0$ داریم

$$S_q(A) = \frac{1}{q-1} \left(1 - \sum_{i=1}^n (m(f_i))^q \right) \\ \leq \frac{1}{q-1} \left(1 - \sum_{i=1}^n (m(g_j))^q \right) = S_q(B).$$

قضیه ۵.۳. فرض کنید A افزایشی فازی باشد. در این صورت

$$S_q(\{1_X\}) = 0 \quad (۱)$$

$$S_q(A) \geq 0 \quad (۲)$$

اثبات:

(۱) طبق تعریف و قضیه ۳.۲، قسمت ۴، حکم واضح است.

(۲) از آنجایی که $A \prec \{1\}$ ، با توجه به قسمت اول این قضیه و قضیه ۴.۳ بدست می آوریم

$$S_q(A) \geq S_q(\{1\}) = 0.$$

قضیه ۶.۳. فرض کنید A و B دو افزایش فازی باشند

به طوری که $A \subseteq B$ در این صورت
 $S_q(A) \leq S_q(B)$

اثبات: فرض کنید $A = \{f_1, \dots, f_n\}$ و

$B = \{g_1, \dots, g_k\}$ از آنجایی که $A \subseteq B$ برای هر

f_i وجود دارد g_j به طوری که

$$m(f_i \wedge g_j) = m(f_i' \wedge g_j) = 0.$$

مثال ۲.۳. فرض کنید $X = [0,1]$ و $f : X \rightarrow [0,1]$ با ضابطه $f(x) = x$ برای هر $x \in X$

$$M = \{f, 1_X - f, f \vee (1_X - f), f \wedge (1_X - f), 0_X, 1_X\}.$$

اگر نگاشت $m : M \rightarrow [0,1]$ را به صورت

$$m(f \vee (1_X - f)) = m(1_X) = 1,$$

$$m(f \wedge (1_X - f)) = m(0_X) = 0,$$

$$m(f) = m(1_X - f) = \frac{1}{2}$$

تعریف کنیم آن گاه سه تایی (X, m, M) یک فضای احتمال فازی خواهد بود. سیستم های $A = \{f, 1_X - f\}$ و $B = \{f \vee (1_X - f)\}$ افزایشی فازی از (X, m, M) هستند به طوری که $B \prec A$. با محاسباتی ساده آنتروپی تیسالیس افزایشی A و B را بدست می آوریم:

$$S_q(B) = 0. \quad S_q(A) = \frac{2^{1-q}}{1-q}$$

مطابق با الزامات طبیعی، هر آزمایشی که نتیجه آن یک رخداد قطعی است، دارای آنتروپی صفر می باشد.

اکنون به بیان یک کران بالا برای این آنتروپی می پردازیم.

توجه ۳.۳. برای توزیع یکنواخت $p_i = m(A_i) = \frac{1}{n}$ که $A = \{f_1, \dots, f_n\}$ روی افزایش فازی $i = 1, 2, \dots, n$ آنتروپی تیسالیس $S_q(A)$ بیشترین مقدار را دارد. بنابراین

$$S_q(A) \leq \frac{1}{q-1} (1 - n^{1-q}).$$

قضیه ۴.۳. فرض کنید A و B دو افزایش فازی باشند به طوری که $A \prec B$ در این صورت

$$S_q(A) \leq S_q(B)$$

اثبات: فرض کنید $A = \{f_1, \dots, f_n\}$ و

$B = \{g_1, \dots, g_k\}$ از آنجایی که $A \prec B$ برای هر

توزیع احتمال باشند. طبق قضیه ۷ در [۶] داریم

$$\sum_{j=1}^k p_j^q S_q(q_{1_j}, \dots, q_{n_j}) \leq S_q\left(\sum_{j=1}^k p_j q_{1_j}, \dots, \sum_{j=1}^k p_j q_{n_j}\right).$$

اگر برای $j=1, \dots, k$ ، قرار دهیم $p_j = m(g_j)$ و برای هر $i=1, \dots, n$ و $j=1, \dots, k$ ، قرار دهیم $q_{i_j} = \frac{m(f_i \wedge g_j)}{m(g_j)}$ آن‌گاه با توجه به رابطه‌ی بالا و

نامساوی فوق، به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} S_q(A \amalg B) &= \frac{1}{q-1} \left(1 - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k (m(f_i \wedge g_j))^q \right) = \\ &= \frac{1}{q-1} \left(1 - \sum_{j=1}^k (m(g_j))^q \sum_{i=1}^n \left(\frac{m(f_i \wedge g_j)}{m(g_j)} \right)^q \right) \\ &= \frac{1}{q-1} \left(1 - \sum_{j=1}^k (m(g_j))^q + \sum_{j=1}^k (m(g_j))^q - \sum_{j=1}^k (m(g_j))^q \sum_{i=1}^n \left(\frac{m(f_i \wedge g_j)}{m(g_j)} \right)^q \right) \\ &= \frac{1}{q-1} \left(1 - \sum_{j=1}^k (m(g_j))^q \right) + \sum_{j=1}^k (m(g_j))^q \frac{1}{q-1} \left(1 - \sum_{i=1}^n \left(\frac{m(f_i \wedge g_j)}{m(g_j)} \right)^q \right) \\ &= S_q(B) + \sum_{j=1}^k (m(g_j))^q S_q\left(\frac{m(f_1 \wedge g_j)}{m(g_j)}, \dots, \frac{m(f_n \wedge g_j)}{m(g_j)}\right) \\ &\leq S_q(B) + S_q\left(\sum_{j=1}^k m(f_1 \wedge g_j), \dots, \sum_{j=1}^k m(f_n \wedge g_j)\right) \\ &= S_q(A) + S_q(B). \end{aligned}$$

گزاره ۸.۳. فرض کنید m_1 و m_2 دو اندازه فازی باشند. در این صورت برای هر $r \in [0, 1]$ ، $rm_1 + (1-r)m_2$ نیز یک اندازه فازی است.

بنابراین $m(f_i) = m(g_j)$ در نتیجه اگر $q < 1$ آن‌گاه $\sum_{j=1}^m m(g_j)^q \geq \sum_{i=1}^n m(f_i)^q$ از آن‌جایی که $q < 1$ داریم

$$\begin{aligned} S_q(A) &= \frac{1}{q-1} \left(1 - \sum_{i=1}^n (m(f_i))^q \right) \\ &\leq \frac{1}{q-1} \left(1 - \sum_{i=1}^n (m(g_j))^q \right) = S_q(B). \end{aligned}$$

اکنون اگر $q > 1$ آن‌گاه $\sum_{j=1}^m m(g_j)^q \leq \sum_{i=1}^n m(f_i)^q$ از آن‌جایی که $q > 1$ داریم

$$\begin{aligned} S_q(A) &= \frac{1}{q-1} \left(1 - \sum_{i=1}^n (m(f_i))^q \right) \\ &\leq \frac{1}{q-1} \left(1 - \sum_{i=1}^n (m(g_j))^q \right) = S_q(B). \end{aligned}$$

در قضیه‌ی زیر، ویژگی زیرجمعی را برای آنتروپی تیسالیس افزایش فازی ثابت می‌نماییم.

قضیه ۷.۳. فرض کنید A و B دو افزایش فازی باشند و

$$S_q(A \amalg B) \leq S_q(A) + S_q(B). \text{ در این صورت } q > 1$$

اثبات: فرض کنید $A = \{f_1, \dots, f_n\}$ و

$$B = \{g_1, \dots, g_k\}$$

داریم $\sum_{j=1}^k m(f_i \wedge g_j) = m(f_i)$ همچنین

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k m(f_i \wedge g_j) = 1 \quad \text{و} \quad \sum_{i=1}^n \frac{m(f_i \wedge g_j)}{m(g_j)} = 1$$

بنابراین به کمک (۱) بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned} S_q\left(\sum_{j=1}^k m(f_1 \wedge g_j), \dots, \sum_{j=1}^k m(f_n \wedge g_j)\right) &= \frac{1}{q-1} \left(1 - \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^k m(f_i \wedge g_j) \right)^q \right) \\ &= \frac{1}{q-1} \left(1 - \sum_{i=1}^n (m(f_i))^q \right) = S_q(A). \end{aligned}$$

فرض کنید (p_1, \dots, p_k) و (q_1, \dots, q_{n_j}) دو افزایش

$$\begin{aligned} &\geq \frac{1}{q-1} r \left(1 - \sum_{i=1}^n (m_1(f_i))^q \right) + \\ &\frac{1}{q-1} (1-r) \left(1 - \sum_{i=1}^n (m_2(f_i))^q \right) \\ &= rS_{q,m_1}(A) + (1-r)S_{q,m_2}(A). \end{aligned}$$

حال اگر $q > 1$ با توجه به این که تابع $f(x) = x^q$ وقتی $q > 1$ تابعی محدب است برای اعداد حقیقی a, b داریم

$$(ra + (1-r)b)^q \leq ra^q + (1-r)b^q.$$

بنابراین با قرار دادن $a = m_1(f_i)$ و $b = m_2(f_i)$ رابطه‌ی فوق به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} &(rm_1(f_i) + (1-r)m_2(f_i))^q \leq \\ &r(m_1(f_i))^q + (1-r)(m_2(f_i))^q. \end{aligned}$$

در نتیجه می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^n (rm_1(f_i) + (1-r)m_2(f_i))^q \leq \\ &r \sum_{i=1}^n (m_1(f_i))^q + (1-r) \sum_{i=1}^n (m_2(f_i))^q. \end{aligned}$$

بنابراین با توجه به آخرین نامساوی فوق و تعریف ۱،۳ از آن جایی که $\frac{1}{q-1} > 0$ بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned} &S_{q,m_1+(1-r)m_2}(A) = \\ &\frac{1}{q-1} \left(1 - \sum_{i=1}^n (rm_1(f_i) + (1-r)m_2(f_i))^q \right) \\ &\geq \frac{1}{q-1} r \left(1 - \sum_{i=1}^n (m_1(f_i))^q \right) + \\ &\frac{1}{q-1} (1-r) \left(1 - \sum_{i=1}^n (m_2(f_i))^q \right) \\ &= rS_{q,m_1}(A) + (1-r)S_{q,m_2}(A). \end{aligned}$$

در نتیجه حکم ثابت شد.

۴. آنتروپی تیسالیس شرطی افرازهای فازی
در این بخش، آنتروپی تیسالیس شرطی توزیع‌های

اکنون نشان می‌دهیم آنتروپی تیسالیس افرازهای فازی دارای ویژگی تقعر می‌باشد.

قضیه ۹،۳. فرض کنید A افرازی فازی متناظر با دو اندازه فازی m_1 و m_2 باشد. در این صورت برای هر $r \in [0, 1]$ داریم

$$\begin{aligned} &rS_{q,m_1}(A) + (1-r)S_{q,m_2}(A) \\ &\leq S_{q,m_1+(1-r)m_2}(A). \end{aligned}$$

اثبات: طبق گزاره‌ی قبل $rm_1 + (1-r)m_2$ یک اندازه فازی است. فرض کنید $A = \{f_1, \dots, f_n\}$. از آن جایی که m_1 و m_2 اندازه فازی هستند داریم

$$\sum_{i=1}^n m_2(f_i) = 1 \quad \text{و} \quad \sum_{i=1}^n m_1(f_i) = 1$$

$$\sum_{i=1}^n (rm_1 + (1-r)m_2(f_i)) = 1$$

یعنی این A متناظر با اندازه فازی $rm_1 + (1-r)m_2$ نیز است. با توجه به این که تابع $f(x) = x^q$ وقتی $q < 1$ تابعی مقعر است برای اعداد حقیقی a, b داریم

$$(ra + (1-r)b)^q \geq ra^q + (1-r)b^q.$$

بنابراین با قرار دادن $a = m_1(f_i)$ و $b = m_2(f_i)$ رابطه‌ی فوق بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned} &(rm_1(f_i) + (1-r)m_2(f_i))^q \geq \\ &r(m_1(f_i))^q + (1-r)(m_2(f_i))^q. \end{aligned}$$

در نتیجه می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^n (rm_1(f_i) + (1-r)m_2(f_i))^q \geq \\ &r \sum_{i=1}^n (m_1(f_i))^q + (1-r) \sum_{i=1}^n (m_2(f_i))^q. \end{aligned}$$

بنابراین با توجه به آخرین نامساوی فوق و طبق تعریف

$$۱،۳ \text{ از آن جایی که } \frac{1}{q-1} < 0 \text{ داریم:}$$

$$\begin{aligned} &S_{q,m_1+(1-r)m_2}(A) = \\ &\frac{1}{q-1} \left(1 - \sum_{i=1}^n (rm_1(f_i) + (1-r)m_2(f_i))^q \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{q-1} \left(1 - \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k (m(f_i \wedge g_j))^q}{\sum_{j=1}^k (m(g_j))^q} \right) \\
 &+ \frac{1}{q-1} \left(1 - \sum_{j=1}^k (m(g_j))^q \right) \\
 &+ (1-q) \left(\frac{1}{q-1} \right)^2 \\
 &\left(\frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k (m(f_i \wedge g_j))^q}{\sum_{j=1}^k (m(g_j))^q} - \left(1 - \sum_{j=1}^k (m(g_j))^q \right) \right) \\
 &= \frac{1}{q-1} \left(2 - \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k (m(f_i \wedge g_j))^q + \left(\sum_{j=1}^k (m(g_j))^q \right)^2}{\sum_{j=1}^k (m(g_j))^q} \right) \\
 &+ \frac{1}{q-1} \left(-1 + \sum_{j=1}^k (m(g_j))^q + \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k (m(f_i \wedge g_j))^q}{\sum_{j=1}^k (m(g_j))^q} \right) \\
 &= \frac{1}{q-1} \left(1 - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k (m(f_i \wedge g_j))^q \right) \\
 &= S_q(A \amalg B).
 \end{aligned}$$

نتیجه ۴.۴. فرض کنید A و B افزایشی فازی

باشند. در این صورت

$$S_q(A|B) = \frac{S_q(A \amalg B) - S_q(B)}{1 + (1-q)S_q(B)} \quad (۱)$$

آن‌گاه اگر $q < 1$ (۲)

$$S_q(A|B) \leq S_q(A \amalg B) - S_q(B)$$

آن‌گاه اگر $q > 1$ (۳)

$$S_q(A|B) \geq S_q(A \amalg B) - S_q(B)$$

(۴) برای هر $1 \neq q > 0$ داریم $S_q(A|B) \geq 0$.

احتمال را به افزایشی فازی توسعه می‌دهیم و خواصی از آن را بررسی می‌نماییم. به ویژه، قوانین زنجیره‌ای را برای این آنتروپی مطالعه می‌کنیم. قضایایی در مورد آنتروپی تیسالیس افزایشی فازی مستقل ثابت می‌کنیم و با استفاده از این قضایا، نشان می‌دهیم این اندازه اطلاعات دارای ویژگی زیرجمعی برای حالت $q < 1$ نمی‌باشد.

تعریف ۱.۴. فرض کنید $A = \{f_1, \dots, f_n\}$ و $B = \{g_1, \dots, g_k\}$ دو افزایشی فازی باشند. آنتروپی تیسالیس شرطی A به شرط B از مرتبه $1 \neq q > 0$ به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\begin{aligned}
 S_q(A|B) &:= \\
 &\frac{1}{q-1} \left(1 - \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k (m(f_i \wedge g_j))^q}{\sum_{j=1}^k (m(g_j))^q} \right).
 \end{aligned}$$

توجه ۲.۴.

$$\begin{aligned}
 S_q(A|\{1\}) &= \\
 &\frac{1}{q-1} \left(1 - \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k (m(f_i \wedge 1))^q}{(m(1))^q} \right) \\
 &= S_q(A).
 \end{aligned}$$

قضیه ۳.۴. فرض کنید A و B دو افزایشی فازی باشند. آن‌گاه داریم

$$\begin{aligned}
 S_q(A \amalg B) &= \\
 S_q(A|B) + S_q(B) + (1-q)S_q(A|B)S_q(B).
 \end{aligned}$$

اثبات: فرض کنید $A = \{f_1, \dots, f_n\}$ و $B = \{g_1, \dots, g_k\}$ می‌توانیم بنویسیم

$$\begin{aligned}
 S_q(A|B) + S_q(B) + \\
 (1-q)S_q(A|B)S_q(B) =
 \end{aligned}$$

داریم $S_q(C) \leq S_q(B \amalg C)$. بنابراین

با توجه به این که $1-q < 0$ داریم

$$1 + (1-q)S_q(B \amalg C) \leq 1 + (1-q)S_q(C).$$

طبق نتیجه ۴،۴ می‌توانیم بنویسیم

$$S_q(A|C) - S_q(B|C) =$$

$$\frac{S_q(A \amalg C) - S_q(C)}{1 + (1-q)S_q(C)}$$

$$\frac{S_q(B \amalg C) - S_q(C)}{1 + (1-q)S_q(C)}$$

$$= \frac{S_q(A \amalg C) - S_q(B \amalg C)}{1 + (1-q)S_q(C)}$$

$$\leq \frac{S_q(A \amalg C) - S_q(B \amalg C)}{1 + (1-q)S_q(B \amalg C)}$$

$$= S_q(A \amalg C | B \amalg C).$$

نتیجه ۶،۴. فرض کنید A و B افرازهایی فازی

باشند. در این صورت

(۱) اگر $q < 1$ آن‌گاه $S_q(A|B) \leq S_q(A) - S_q(B)$

(۲) اگر $q < 1$ آن‌گاه $S_q(A|B) \leq S_q(A)$

(۳) اگر $q > 1$ آن‌گاه $S_q(A|B) \geq S_q(A) - S_q(B)$

اثبات: طبق تعریف داریم $A \amalg \{1\} = A$ و

$$B \amalg \{1\} = B$$

نتیجه‌ی ۵،۴، طبق توجه ۲،۴ حکم بدست می‌آید.

نتیجه ۷،۴. فرض کنید A و B دو افراز فازی باشند.

در این صورت اگر $A \subseteq B$ و $q < 1$ آن‌گاه $S_q(A|B) = 0$

اثبات: با توجه به قضیه ۶،۳ و نتیجه ۶،۴ قسمت (۱)

داریم

$$0 \leq S_q(A|B) \leq S_q(A) - S_q(B) \leq 0.$$

بنابراین $S_q(A|B) = 0$

اثبات: از آنجایی که حالت‌های $1-q > 0$ و

$1-q < 0$ را داریم، با توجه به قضیه ۳،۴، حکم برای (۱)

و (۲) ثابت است.

(۴) طبق قضایای ۴،۳ و ۵،۳ قسمت (۲)، از آنجایی که

$$B < A \amalg B \text{ بدست می‌آوریم}$$

$$0 \leq S_q(B) \leq S_q(A \amalg B)$$

از آنجایی که $S_q(B) \geq 0$ و $1-q > 0$ ، با توجه به

قسمت‌های قبلی این نتیجه، حکم ثابت است. اما اگر

$q > 1$ در این صورت طبق قسمت سوم این نتیجه

می‌توانیم بنویسیم

$$S_q(A|B) \geq S_q(A \amalg B) - S_q(B) \geq 0.$$

نتیجه ۵،۴. فرض کنید A و B و C افرازهایی

فازی باشند. در این صورت

(۱) اگر $q < 1$ آن‌گاه

$$S_q(A \amalg C | B \amalg C) \leq S_q(A|C) - S_q(B|C)$$

(۲) اگر $q > 1$ آن‌گاه

$$S_q(A \amalg C | B \amalg C) \geq S_q(A|C) - S_q(B|C)$$

اثبات:

(۱) از آنجایی که $C < B \amalg C$ طبق قضیه ۴،۳ داریم

$$S_q(C) \leq S_q(B \amalg C)$$

از آنجایی که $1-q > 0$ داریم

$$1 + (1-q)S_q(B \amalg C) \geq 1 + (1-q)S_q(C).$$

طبق نتیجه ۴،۴ می‌توانیم بنویسیم

$$S_q(A|C) - S_q(B|C) =$$

$$\frac{S_q(A \amalg C) - S_q(C)}{1 + (1-q)S_q(C)}$$

$$\frac{S_q(B \amalg C) - S_q(C)}{1 + (1-q)S_q(C)}$$

$$= \frac{S_q(A \amalg C) - S_q(B \amalg C)}{1 + (1-q)S_q(C)}$$

$$\geq \frac{S_q(A \amalg C) - S_q(B \amalg C)}{1 + (1-q)S_q(B \amalg C)}$$

$$= S_q(A \amalg C | B \amalg C).$$

از آنجایی که $C < B \amalg C$ طبق قضیه ۴،۳

$$S_q(A \amalg B) = S_q(A) + S_q(B) + \frac{S_q(A)S_q(B)}{(1-q)}$$

آن‌گاه اگر $q < 1$ اگر $S_q(A \amalg B) \geq S_q(A) + S_q(B)$

اثبات:

(۱) طبق قضایای ۳،۴ و ۸،۴ بدست می‌آید.
 (۲) با توجه به قسمت اول این قضیه، حکم به دست می‌آید.
 (۳)

توجه ۱۰،۴. در مقابل، در حالت آنتروپی شانون برای افرازهای فازی مستقل A, B داریم:
 $H(A \amalg B) = H(A) + H(B)$.

توجه ۱۱،۴. در حالت کلی، ویژگی زیرجمعی فقط برای حالت $q > 1$ (همان‌طور که در قضیه ۷،۳ ثابت شد) برقرار است زیرا در حالت $q < 1$ طبق نتیجه‌ی ۹،۴ برای دو افراز مستقل A, B نشان داده شد:
 $S_q(A \amalg B) \geq S_q(A) + S_q(B)$.

بنابراین آنتروپی تیسالیس افرازهای فازی دارای ویژگی زیرجمعی در حالت $q < 1$ نمی‌باشد.

۵. نتیجه‌گیری

هدف مطالعه‌ی حاضر، تعریف مفاهیم آنتروپی تیسالیس و آنتروپی تیسالیس شرطی افرازهای فازی بود. نتایج این مقاله در بخش‌های ۳ و ۴ آورده شده است. در بخش ۳، آنتروپی تیسالیس افرازهای فازی را تعریف کردیم و این آنتروپی را تحت روابط نظریف و زیرمجموعه به مد صفر بررسی نمودیم. مثالی از محاسبه‌ی آنتروپی تیسالیس افراز فازی ارائه دادیم و ویژگی زیرجمعی را برای این اندازه اطلاعات در حالت $q > 1$ اثبات کردیم (قضیه ۷،۳). در انتهای این بخش، نشان داده شد که آنتروپی تیسالیس افرازهای فازی، ویژگی تقعر دارد (قضیه ۹،۳).

قضیه ۸،۴. دو افراز فازی A و B مستقل‌اند اگر و تنها اگر $S_q(A|B) = S_q(A)$.
اثبات: فرض کنید $A = \{f_1, \dots, f_n\}$ و $B = \{g_1, \dots, g_k\}$ مستقل باشند. در این صورت طبق تعریف داریم

$$S_q(A|B) = \frac{1}{q-1} \left(1 - \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k (m(f_i \wedge g_j))^q}{\sum_{j=1}^k (m(g_j))^q} \right)$$

$$= \frac{1}{q-1} \left(1 - \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k (m(f_i))^q (m(g_j))^q}{\sum_{j=1}^k (m(g_j))^q} \right)$$

$$= \frac{1}{q-1} \left(1 - \frac{\sum_{i=1}^n (m(f_i))^q \sum_{j=1}^k (m(g_j))^q}{\sum_{j=1}^k (m(g_j))^q} \right)$$

$$= \frac{1}{q-1} \left(1 - \sum_{i=1}^n (m(f_i))^q \right) = S_q(A).$$

برعکس اگر $S_q(A|B) = S_q(A)$ آن‌گاه طبق فوق، به دست می‌آوریم

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k (m(f_i \wedge g_j))^q = \sum_{i=1}^n (m(f_i))^q \sum_{j=1}^k (m(g_j))^q$$

و این یعنی برای هر i, j

$$m(f_i \wedge g_j) = m(f_i) m(g_j).$$

و بنابراین حکم ثابت است.

نتیجه ۹،۴. فرض کنید دو افراز فازی A و B مستقل باشند. در این صورت داریم

در بخش ۴، آنتروپی تیسالیس شرطی توزیع‌های احتمال را که در [۱] تعریف شده بود به افزایش فازی توسعه دادیم و خواصی از آن را بررسی کردیم. از جمله، قوانین زنجیره‌ای را برای این اندازه اطلاعات مطالعه کرده و نتایجی در مورد آنتروپی تیسالیس افزایش فازی مستقل بدست آوردیم و با حالت آنتروپی شانون مقایسه نمودیم. در نتیجه‌ی ۹،۴ نشان دادیم که ویژگی زیرجمعی برای حالت $q < 1$ برقرار نیست (توجه ۱۱،۴ را نیز ببینید). دلیل پرداختن به مطالعه‌ی خواص آنتروپی تیسالیس افزایش فازی این بود که با توجه به این که در فرمول آنتروپی تیسالیس از لگاریتم استفاده نمی‌شود و در نتیجه محاسبات با آنتروپی تیسالیس نسبت به آنتروپی شانون راحت‌تر و دقیق‌تر است، در صورت داشتن خواصی مشابه آنتروپی شانون، جایگزین مناسبی به جای آنتروپی شانون جهت اندازه‌گیری مقدار اطلاعات مستخرج از یک آزمایش فازی خواهد بود. با اثبات قضایایی در این پژوهش نشان دادیم آنتروپی تیسالیس افزایش فازی در حالت $q > 1$ ، خواصی شبیه به خواص آنتروپی شانون و آنتروپی منطقی افزایش فازی دارد و بنابراین از آن جایی که در فرمول آنتروپی تیسالیس از لگاریتم استفاده نمی‌شود، محاسبات با استفاده از فرمول آنتروپی تیسالیس نسبت به آنتروپی شانون، راحت‌تر و با تقریب بهتری انجام می‌شود و در نتیجه کارکردن با این اندازه‌ی اطلاعات نسبت به آنتروپی شانون ساده‌تر است و به این دلیل، پیشنهاد می‌شود که پژوهشگران در رشته‌های مختلف، این آنتروپی را به جای آنتروپی شانون مورد استفاده قرار دهند و حتی نتایج تحلیل را با حالت آنتروپی شانون مقایسه نمایند. بنابراین آنتروپی تیسالیس در حالت $q > 1$ می‌تواند به عنوان یک جایگزین مناسب و بهتر به جای آنتروپی شانون، جهت اندازه‌گیری مقدار اطلاعات مستخرج از یک آزمایش فازی مورد استفاده قرار گیرد.

فهرست منابع

- [11] Dumitrescu, D., Entropy of a fuzzy process, *Fuzzy Sets Syst.* 55 (1993) 169–177.
- [12] Dumitrescu, D., Hierarchical pattern classification, *Fuzzy Sets Syst.* 28 (1998) 145–162.
- [13] Ebrahimzadeh, A., Logical entropy of quantum dynamical systems, *Open Physics*, 14 (2016) 1-5.
- [14] Ebrahimzadeh, A., Eslami Giski Z., and Markechova, D., logical Entropy of Dynamical Systems - A General Model, *Mathematics*, 5(1) (2017), DOI:10.3390/math5010006.
- [15] Ebrahimzadeh A., Jamalzadeh J., Conditional logical entropy of fuzzy σ -algebras, *Journal of intelligent and fuzzy systems*, 33 (2017) 1019-1026.
- [16] Ellerman D., An introduction to logical entropy and its relation to Shannon Entropy. *Int. J. Semantic Comput.* 7 (2013) 121–145.
- [17] Eslami Giskia, Z., Ebrahimzadeh, A., An introduction of logical entropy on sequential effect algebra, *Indagationes Mathematicae* 28 (2017) 928-937.
- [18] Furuichi, S., Information theoretical properties of Tsallis entropies, *Journal of Mathematical Physics*, 47 (2006), DOI: 10.1063/1.2165744.
- [19] Furuichi, S., On uniqueness theorem for Tsallis entropy and Tsallis relative entropy, *IEEE Trans. on Information Theory* 51 (2005) 3638-3645.
- [1] Abe, S., Rajagopal, K., Nonadditive Conditional Entropy and Its Significance for Local Realism, *Physica A*, 289, 157 (2001).
- [2] Arimoto, S., Information-theoretical considerations on estimation problems, *Inf. and Control* 19, 181 (1971).
- [3] Asadian, M.H., Ebrahimzadeh A., Entropy of Dynamical Systems from the Observer's Viewpoint, with Countable sigma-algebras, *Journal of Uncertain Systems*, 11(3) (2017) 197-204.
- [4] Butnariu, D., Additive fuzzy measures and integrals, *J. Math. Anal. Appl.* 93 (1983) 436-452.
- [5] Bertoluzza, C., Viviana, V., Naval, G., Uncertainty measure on fuzzy partitions, *Fuzzy Sets Syst.* 142 (2004) 105–116.
- [6] Daroczy, Z., General information functions, *Information and Control*, 16 (1970) 36-51.
- [7] Dubois, D., Prade, H., The logical view of conditioning and its application to possibility and evidence theories, *Int. J Approx. Reason.* 4 (1990) 23–46.
- [8] Dumitrescu, D., A note on fuzzy information theory, *Stud. Univ. Babeş-Bolyai, Math.* 33 (1988) 65–69.
- [9] Dumitrescu, D., Measure-preserving transformation and the entropy of a fuzzy partition, in: *13th Linz Seminar on Fuzzy Set Theory*, Linz, (1991) 25–27.
- [10] Dumitrescu, D., Fuzzy measures and the entropy of fuzzy partitions, *J. Math. Anal. Appl.* 176 (1993) 359–373.

- [30] Patil G.P., Taillie, C., Diversity as a concept and its measurement, *Journal of the American Statistical Association* 77 (1982) 548-561.
- [31] Rao, C.R., Diversity and dissimilarity coecients: A unified approach, *Theoretical Population Biology* 21 (1982) 24-43.
- [32] Rahimi, M., Riazi, A., On local entropy of fuzzy partitions. *Fuzzy Sets Syst.* 234 (2014) 97-108.
- [33] Rényi, A., On measures of entropy and information, in: *Proceedings of the 4th Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, University of California Press, 1 (1961) 547-561.
- [34] Riečan, B., Markechová, D., The entropy of fuzzy dynamical systems, general scheme and generators, *Fuzzy Sets Syst.* 96 (1998) 191-199.
- [35] Shannon, C.E., *A Mathematical Theory of Communication*. *Bell Syst. Tech. J.*, 27 (1948). 379-423.
- [36] Sinai, Y.G., *Ergodic Theory with Applications to Dynamical Systems and Statistical Mechanics*; Springer: Berlin/Heidelberg, Germany, (1990).
- [37] Sinai, Y.G., On the Notion of Entropy of a Dynamical System. *Dokl. Russ. Acad. Sci.* 124 (1959) 768-771.
- [38] Tsallis, C., Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics, *J.Stat.Phys.*, 52 (1988) 479-487.
- [39] Wondie, L., Kumar, S., Some Inequalities in Information Theory Using Tsallis Entropy, *International Journal of*
- [20] Gini, C., *Variabilita e Mutabilita*, Tipograa di Paolo Cuppini, Bologna, (1912).
- [21] Good, I. J., Comment (on Patil and Taillie: Diversity as a concept and its measurement). *Journal of the American Statistical Association.* 77 (1982) 561-563.
- [22] Havrda, J., Charvat, F., Quantification methods of classification processes: Concept of structural alpha-entropy, *Kybernetika*, 3, 30 (1967).
- [23] Jamaati, M., Mehri, A., Text mining by Tsallis entropy, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 490 (2018) 1368-1376.
- [24] Khosravi Tanak, A., Mohtashami Borzadaran G.R., Ahmadi J., Maximum Tsallis entropy with generalized Gini and Gini mean difference indices constraints, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 471 (2017) 554-560.
- [25] Kumar, V., Some results on Tsallis entropy measure and k-record values, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 462 (2016) 667-673.
- [26] Markechová, D., Entropy and mutual information of experiments in the fuzzy case, *Neural Network World*, 23 (2013) 339-349.
- [27] Markechova, D., Logical entropy of fuzzy dynamical systems, *Entropy*, 18 (2016) 157-171.
- [28] Mesiar, R., Rybárik, J., Entropy of fuzzy partitions: a general model, *Fuzzy Sets Syst.* 99 (1998) 73-79.
- [29] Nguyen, H.T., Walker, E.A., *A First Course in Fuzzy Logic*, CRC Press, Boca Raton, FL, 1997.

