دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال پنجم، شماره نوزدهم، مرداد و شهریور ۱۳۹۸
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

نتایجی پیرامون مسئله‌ی مکمل مجموعه-مقدار

خدیجه بای‌پور[1]، مهدی روحی[2]*

[1و2] گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه گلستان، گرگان، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۷/۰۶/۲۴ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۸/۰۱/۱۸

چکیده

در این مقاله، ضمن مقایسه‌ی مسئله‌ی مکمل مجموعه-مقدار با مسئله‌ی مکمل تک‌مقدار، ساختار مجموعه‌ی جواب مسئله‌ی مکمل مجموعه-مقدار و شرایط لازم و کافی برای کرانداری و تحدب آن بررسی می‌شود. با معرفی رده‌ی جدیدی از ماتریس‌ها شرط لازم و کافی برای شدنی بودن مسئله‌ی مکمل خطی مجموعه-مقدار به‌دست می‌آید. همچنین چند کاربرد از مسئله ارائه می‌گردد.

واژه‌های کلیدی: مسئله‌ی مکمل، مسئله‌ی مکمل مجموعه-مقدار، مسئله‌ی مکمل تک‌مقدار.

---

*. عهده‌دار مکاتبات: Email: m.roohi@gu.ac.ir

۱- مقدمه

مسئله‌ی مکمل مجموعه-مقدار[1] عبارت است از یافتن $x \in \mathbb{R}^n$ به‌طوری‌که

$$x \geq 0, y \geq 0, \langle x, y \rangle = 0, \qquad (1.1)$$

برای بعضی $y \in \Theta(x)$ که $\Theta: \mathbb{R}^n{}_+ \multimap \mathbb{R}^n$ یک نگاشت مجموعه-مقدار است.

مسئله‌ی مکمل مجموعه-مقدار در تحلیل حساسیت مسائل مکمل و مسائل تعادل اقتصادی نقش مهمی بازی می‌کند [۱۶و ۸]. با این‌حال مطالعه‌ی بسیار کمی درباره‌ی مسائل مکمل مجموعه-مقدار صورت گرفته است.

در واقع، (1.1) می‌تواند به‌صورت زیر بازنویسی شود، که با نماد $\mathrm{SVNCP}(F, \Omega)$ نشان داده می‌شود و عبارت است از یافتن $x \in \mathbb{R}^n$ به‌طوری‌که

$$x \geq 0, F(x, w) \geq 0,$$
$$\langle x, F(x, w) \rangle = 0, \qquad (2.1)$$

برای بعضی $w \in \Omega(x)$ که $F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ و $\Omega: \mathbb{R}^n \multimap \mathbb{R}^m$ مجموعه-مقدار است. برای دیدن این مطلب، با فرض $\Theta(x) = \bigcup_{w \in \Omega(x)} \{F(x, w)\}$ (1.1) به (2.1) تقلیل می‌یابد. بالعکس، اگر $F(x, w) = w$ و $\Omega(x) = \Theta(x)$ آن‌گاه (2.1) به فرم (1.1) در می‌آید.

$\mathrm{SVNCP}(F, \Omega)$ بیان‌گر **مسئله‌ی مکمل غیر خطی مجموعه-مقدار** است. هنگامی‌که $F(x, w) = M(w)x + q(w)$، که در آن $M : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{n \times n}$ و $q : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$، مسئله‌ی (2.1) **مسئله‌ی مکمل خطی مجموعه-مقدار** نامیده می‌شود و با نماد $\mathrm{SVLCP}(M, q, \Omega)$ نشان داده می‌شود.

مسئله‌ی $\mathrm{SVNCP}(F, \Omega)$ ارائه شده با (2.1) مسائل مهم و جالب بسیاری در حوزه بهینه‌سازی مثل مسئله‌ی مکمل خطی [۷ و ۵]، مسئله‌ی مکمل خطی توسعه‌یافته[2] [۱۲و۱۰]، مسئله‌ی مکمل غیرخطی [۸]، مسئله‌ی مکمل ضمنی[3] [۱۵]، نامساوی تغییراتی[4] [۲]، مسئله‌ی تعادل[5] [۴]، برنامه‌ریزی مینی ماکس[6] [۱۷] را شامل می‌شود. در اینجا به دو مورد از مسائل هم ارز با مسئله‌ی (2.1) اشاره می‌شود.

به‌ازای $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$، $q \in \mathbb{R}^n$ مسئله‌ی مکمل خطی عبارت است از یافتن $z, w \in \mathbb{R}^n$ که در شرایط زیر صدق کنند:

$$w = Mz + q,$$
$$z \geq 0, w \geq 0, \langle z, w \rangle = 0, \qquad (3.1)$$

و با نماد $\mathrm{LCP}(M, q)$ نشان داده می‌شود.

با فرض

$$\Omega(x) = \{w : w = Mx + q\}$$

و

$$F(x, w) = w$$

مسئله‌ی (2.1) به مسئله‌ی (3.1) تقلیل می‌یابد.

مسئله‌ی مکمل خطی ساده‌ترین مسئله‌ی مکمل است که به طور گسترده مطالعه شده است. به دلیل اینکه شرایط بهینه‌ی ضروری مرتبه اول برنامه‌ریزی درجه دوم شامل قیود نامساوی با متغیرهای نامنفی تشکیل مسئله‌ی مکمل خطی می‌دهد.

شرایط بهینگی برنامه‌ریزی درجه دوم:

مسئله‌ی برنامه‌ریزی درجه دوم

$$\begin{array}{lll} \min & C^T x + \frac{1}{2} x^T D x & \\ \text{subject to} & Ax \geq 0 & (4.1) \\ & x \geq 0 & \end{array}$$

را در نظر بگیرید که $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$، $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ و $b \in \mathbb{R}^m$. مطابق [۱۳، نتیجه ۱،۱]، اگر بردار $\bar{x}$ جواب بهینه‌ی (4.1) باشد، آن‌گاه بردار $\bar{y} \in \mathbb{R}^m$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$C + D\bar{x} - A^T\bar{y} \geq 0, \ \bar{y} \geq 0,$$
$$\bar{y}^T(A\bar{x} - b) = 0,$$
$$\bar{x}^T(C + D\bar{x} - A^T\bar{y}) = 0.$$

1. Set-valued complementarity problem
2. Extended linear complementarity problem
3. Implicit complementarity problem
4. Variational inequality
5. Equilibrium problem
6. Min-max programming

اگر این شرایط به همراه شرط شدنی‌بودن بردار x، گردآوری شود، $LCP(M,q)$ به‌دست می‌آید که

$$z = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$
$$M = \begin{pmatrix} D & -A^T \\ A & 0 \end{pmatrix}, q = \begin{pmatrix} C \\ -b \end{pmatrix}.$$

به ازای نگاشت $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$، مسئله‌ی مکمل غیرخطی عبارت است از یافتن $z \in \mathbb{R}^n$ به‌طوری‌که

$$z \geq 0, F(z) \geq 0,$$
$$\langle z, F(z) \rangle = 0. \qquad (5.1)$$

اگر

$$F(x,w) = F(x) + w$$

و

$$\Omega(x) = \{0\}$$

آن‌گاه (2.1) به فرم (5.1) تبدیل می‌شود.

در سراسر این مقاله، فرض می‌شود که تابع مجموعه–مقدار $\Omega : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ دارای مقادیر بسته است، یعنی، به‌ازای هر $x \in \mathbb{R}^n$ مجموعه‌ی $\Omega(x)$ بسته است. همچنین مجموعه‌ی ماتریس‌های $m \times n$ با درایه‌های حقیقی با $\mathbb{R}^{m \times n}$ نشان داده می‌شود.

توجه شود که به ازای $x \in \mathbb{R}^n$، $x \geq 0$ به معنی $x_i \geq 0$ به ازای هر $1 \leq i \leq n$ است.

۲– پیشنیاز

به‌ازای نگاشت $M : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^m$، تعریف می‌کنیم:

$$\lim_{x \to \bar{x}} \sup M(x) := \{u : \lim_{x \to \bar{x}} \inf \operatorname{dist}(u, M(x)) = 0\},$$
$$\lim_{x \to \bar{x}} \inf M(x) := \left\{u : \lim_{x \to \bar{x}} \operatorname{dist}(u, M(x)) = 0\right\}.$$

گوییم M در $\bar{x}$ **نیم‌پیوسته‌ی بیرونی**[1] است، هرگاه

$$\lim_{x \to \bar{x}} \sup M(x) \subseteq M(\bar{x}),$$

و در $\bar{x}$ **نیم‌پیوسته‌ی درونی**[2] است، هرگاه

$$\lim_{x \to \bar{x}} \inf M(x) \supseteq M(\bar{x}).$$

گوییم M در $\bar{x}$ پیوسته است هرگاه در $\bar{x}$ هم نیم‌پیوسته‌ی بیرونی و هم نیم‌پیوسته‌ی درونی باشد [۱].

نتایجی که در ادامه بیان می‌شود در بخش بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند.

لم زیر، به لم فارکاس[3] معروف است.

لم ۲–۱:[۵، قضیه ۲،۷،۷] فرض کنید $b \in \mathbb{R}^m$ و $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. آن‌گاه دقیقاً یکی از عبارات زیر برقرار است:

الف) $x \in \mathbb{R}^n$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$x \geq 0, Ax = b.$$

ب) $y \in \mathbb{R}^n$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$y^T A \geq 0, y^T b < 0.$$

قضیه زیر به قضیه وایلی[4] معروف است.

قضیه ۲–۲:[۵، قضیه ۲،۷،۱۱] فرض کنید $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ دستگاه $Ax > 0, x > 0,$ جواب دارد اگر و فقط اگر دستگاه $y^T A \leq 0, y \geq 0, y \neq 0,$ جوابی نداشته باشد.

۳– تفاوت مسئله‌ی مکمل مجموعه–مقدار با مسئله‌ی مکمل تک‌مقدار

رده‌های متنوع ماتریس‌ها در نظریه‌ی مسئله‌ی مکمل خطی نقش‌های متفاوتی بازی می‌کنند. به‌عنوان مثال، P-ماتریس، S-ماتریس و ....، برای جزئیات بیشتر به [۵و۸] مراجعه کنید.

تعریف ۳–۱: ماتریس $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ یک **S-ماتریس** است اگر $x \in \mathbb{R}^n$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $x > 0, \ Mx > 0$ به‌علاوه، بنابر [۹، تذکر ۲،۲]

1. Outer semicontinuous
2. Inner semicontinuous
3. Farkas’s lemma
4. Ville’s theorem

شرط فوق با شرط زیر معادل است:

$$x \geq 0, Mx > 0.$$

با این‌حال، چنین هم‌ارزی برای حالت متناظر در مسئله‌ی مکمل مجموعه–مقدار برقرار نیست، یعنی، برای بعضی $w \in \Omega(x)$

$$x > 0, M(w)x > 0, \qquad (1.3)$$

هم‌ارز با

$$x \geq 0, M(w)x > 0, \qquad (2.3)$$

نیست. واضح است که (1.3) شرط (2.3) را نتیجه می‌دهد. اما عکس آن برقرار نیست.

مثال ۳–۲: فرض کنید

$$\Omega(x) = \begin{cases} \{0,1\}, & x = (1,0) \in \mathbb{R}^2 \\ \{0\}, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

$$M(w) = \begin{bmatrix} w & 0 \\ 0 & w \end{bmatrix}.$$

اگر $M(w)x > 0$ آن‌گاه $w = 1$، و چنین حالتی تنها زمانی رخ می‌دهد که $x = (1,0)$. بنابراین، (2.3) برقرار است اما (1.3) برقرار نیست.

توجه کنید که نگاشت Ω در مثال ۱ نیم‌پیوسته‌ی بیرونی است. بنابر [۱۸، قضیه ۴] اگر Ω نیم‌پیوسته‌ی درونی و $M(w)$ پیوسته باشد، آن‌گاه (1.3) و (2.3) معادل هستند.

بنابر [۵، گزاره ۳،۱،۵] ماتریس $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ یک S–ماتریس است اگر و فقط اگر $LCP(M, q)$ به‌ازای هر $q \in \mathbb{R}^n$ شدنی باشد. نتیجه‌ی مشابهی برای مسئله‌ی مکمل خطی مجموعه–مقدار برقرار است. بنابر [۱۸، قضیه ۵] اگر $x \in \mathbb{R}^n$ وجود داشته باشد، به‌طوری‌که برای بعضی $w \in \bigcap_{\bar{N}\in N_\infty} \bigcup_{n\in\bar{N}} \Omega(nx)$ داشته باشیم:

$$x \geq 0, M(w)x > 0,$$

که در آن

$$N_\infty := \{N : N = \{n, n+1, \dots\}, n \geq 1\},$$

آن‌گاه به‌ازای هر $q: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ از پایین کراندار، $SVLCP(M, q, \Omega)$ شدنی است.

تعریف ۳–۳: ماتریس $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ یک **P-ماتریس** گفته می‌شود هرگاه دترمینان همه‌ی زیرماتریس‌های اصلی آن مثبت باشند.

با استفاده از [۵، قضیه ۳،۳،۴] مشخصه‌ی

$$\forall x \neq 0, \exists k \in \{1,2,\dots,n\},$$
$$s.t \;\; x_k(Mx)_k > 0, \qquad (3.3)$$

برای P-ماتریس‌ها به‌دست می‌آید. بنابر [۵، نتیجه ۳،۳،۵] هر P-ماتریس یک S-ماتریس است. به‌عبارت دیگر، اگر M در (3.3) صدق کند، آن‌گاه دستگاه زیر جواب دارد:

$$x \geq 0, \quad Mx > 0. \qquad (4.3)$$

برای بعضی $w \in \Omega(x)$ شرایط متناظر در مسئله‌ی مکمل مجموعه–مقدار

$$\forall x \neq 0, \exists k \in \{1,2,\dots,n\},$$
$$s.t \;\; x_k(M(w)x)_k > 0, \quad (5.3)$$

و

$$x \geq 0, M(w)x > 0. \qquad (6.3)$$

هستند.

مثال زیر نشان می‌دهد که شمول بیان‌شده در [۵، نتیجه ۳،۳،۵]، برای مسئله‌ی مکمل مجموعه–مقدار برقرار نیست.

مثال ۳–٤: فرض کنید

$$\Omega(x) = \begin{cases} -1, & x_1 = 0 \\ 1, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

$$M(w) = \begin{bmatrix} w & 0 \\ 0 & -w \end{bmatrix}.$$

به‌ازای $x_1 \neq 0$، داریم:

$$M(w)x = (x_1, -x_2).$$

بنابراین $x_1(M(w)x)_1 = {x_1}^2 > 0$.

به‌ازای $x_1 = 0$، $x_2 \neq 0$ (چون $x \neq 0$)، پس $M(w)x = (-x_1, x_2)$ و در نتیجه

$$x_2(M(w)x)_2 = {x_2}^2 > 0.$$

بنابراین، شرط (5.3) برقرار است. اما شرط (6.3) برقرار نیست چون $M(w)x = (x_1, -x_2)$ یا $M(w)x = (-x_1, x_2)$. پس $M(w)x > 0$ نتیجه می‌دهد $x_1 < 0$ یا $x_2 < 0$ که متناقض با $x \geq 0$ است.

تعریف ۳–۵: ماتریس $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ **نیمه‌یکنوا**[1] گفته می‌شود هرگاه به‌ازای هر $x \geq 0$ ناصفر،
$\exists\, x_k > 0 \quad s.t. \quad (Mx)_k \geq 0.$

بنابر[۵، قضیه ۳،۹،۳]، M نیمه‌یکنواست اگر و فقط اگر صفر، جواب یکتای LCP(M, q) با $q > 0$ باشد. این نتیجه برای حالت مجموعه–مقدار هم برقرار است. قبل از آن، نیاز داریم تعمیم ویژگی نیمه‌یکنوایی را به حالت مجموعه–مقدار تعریف کنیم.

تعریف ۳–٦: مجموعه‌ی ماتریس‌های
$\{M(w) : w \in \Omega(x)\}$

(الف) **نیمه‌یکنوای قوی**[2] گفته می‌شود هرگاه به‌ازای هر $x \geq 0$ ناصفر، به‌ازای هر $w \in \Omega(x)$
$\exists\, x_k > 0 \quad s.t. \quad (M(w)x)_k \geq 0.$

(ب) **نیمه‌یکنوای ضعیف**[3] گفته می‌شود هرگاه به‌ازای هر $x \geq 0$ ناصفر، برای بعضی $w \in \Omega(x)$
$\exists\, x_k > 0 \quad s.t. \quad (M(w)x)_k \geq 0.$

مشابه مسئله‌ی مکمل خطی تک‌مقداری، نتایجی برای مسئله‌ی مکمل خطی مجموعه–مقدار به‌دست آمده است که در آن نیمه‌یکنوایی نقش ایفا می‌کند.

قضیه ۳–۷: [۱۸، قضیه ۱۰] برای SVLCP(M,q, Ω) عبارات زیر برقرار هستند:

(الف) اگر مجموعه‌ی ماتریس‌های
$\{M(w) : w \in \Omega(x)\}$
نیمه‌یکنوای قوی باشد، آن‌گاه به‌ازای هر نگاشت مثبت q، (یعنی $q(w) > 0$ به‌ازای هر w) صفر، جواب یکتای SVLCP(M,q, Ω) است.

(ب) اگر صفر، جواب یکتای SVLCP(M,q, Ω) با $q(w) > 0$ باشد، آن‌گاه مجموعه‌ی ماتریس‌های $\{M(w) : w \in \Omega(x)\}$ نیمه‌یکنوای ضعیف است.

قسمت دوم قضیه‌ی ۳–۷ بیان می‌کند که نیمه‌یکنوایی ضعیف یک شرط لازم است برای اینکه صفر، جواب یکتای SVLCP(M,q, Ω) باشد. اگرچه این شرط، یک شرط کافی برای یکتایی جواب نیست.

مثال ۳–۸: فرض کنید

$$M(w) = \begin{bmatrix} -w & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$
$$\Omega(x) = \{0,1\}.$$

به‌ازای هر $x = (x_1, x_2, x_3)$ ناصفر داریم:
$M(0)x = (x_2, x_3, x_1)$

اگر $q = (1, 1, 1)$ را در نظر بگیریم، آن‌گاه با محاسبات ساده، $x = (1, 0, 0)$ در
$$x \geq 0, M(1)x + q \geq 0, \langle x, M(1) + q \rangle = 0,$$

صدق می‌کند، یعنی SVLCP(M,q, Ω) جواب ناصفر دارد.

توجه کنید که نگاشت مجموعه–مقدار در مثال ۳–۸ پیوسته است.

تا اینجا، بعضی تفاوت‌های مهم بین مسئله‌ی مکمل تک‌مقداری و مسئله‌ی مکمل مجموعه–مقدار را بیان کردیم. چنین تفاوت‌هایی، بدون شک، مطالعه‌ی مسئله‌ی مکمل مجموعه–مقدار را به موضوعی چالش برانگیز و جالب تبدیل می‌کند.

1. Semimonotone
2. Strongly semimonotone
3. Weakly semimonotone

۴- شرط لازم و کافی برای شدنی بودن مسئله‌ی مکمل خطی مجموعه-مقدار

به‌ازای $\mathrm{SVLCP}(M,q,\Omega)$ مجموعه‌های

$$\mathrm{FEA}(M,q,\Omega)=\{x:\ \exists w\in\Omega(x),\ x\geq 0, M(w)x+q(w)\geq 0\}$$

و

$$\mathrm{SOL}(M,q,\Omega)=\{x: x\in \mathrm{FEA}(M,q,\Omega), \langle x, M(w)x+q(w)\rangle=0\}$$

به ترتیب **مجموعه‌ی شدنی**[1] و **مجموعه‌ی جواب**[2] نامیده می‌شوند. به‌وضوح، برای هر مسئله‌ی مکمل خطی مجموعه–مقدار، شمول

$$\mathrm{SOL}(M,q,\Omega)\subseteq \mathrm{FEA}(M,q,\Omega)$$

برقرار است اما عکس مطلب در کل درست نیست. به ازای مسئله مکمل خطی مجموعه–مقدار داده شده، اگر مجموعه‌ی شدنی(به ترتیب، مجموعه‌ی جواب) ناتهی باشد، مسئله را **شدنی**[3] (به ترتیب، **حل‌پذیر**[4]) می‌نامند. در ادامه با تعریف رده‌ی جدیدی از ماتریس‌ها، شرط لازم و کافی برای شدنی بودنمسئله مکمل خطی مجموعه–مقدار ارائه می‌دهیم.

تعریف ٤–١: مجموعه‌ی ماتریس‌های $\{M(w): w\in\Omega(x)\}$

(الف) **C–ماتریس** گفته می‌شود هرگاه به‌ازای هر $w\in\Omega(x)$ داشته باشیم:

$$x^T M(w)x\geq 0, \forall x\geq 0,$$

(ب) **C_+-ماتریس** گفته می‌شود هرگاه C–ماتریس باشد و به‌ازای هر $w\in\Omega(x)$ رابطه‌ی زیر برقرار باشد:

$$[x^T M(w)x=0, x\geq 0] \Rightarrow [(M+M^T)(w)x=0]$$

قضیه ٤–٢: فرض کنید $q:\mathbb{R}^m\longrightarrow\mathbb{R}^n$، و مجموعه‌ی ماتریس‌های $\{M(w): w\in\Omega(x)\}$ C_+-ماتریس باشد. آن‌گاه $\mathrm{SVLCP}(M,q,\Omega)$ شدنی است اگر و فقط اگر برای بعضی $w\in\Omega(x)$ رابطه‌ی زیر برقرار باشد:

$$[x\geq 0, M(w)x\geq 0, x^T M(w)x=0] \Longrightarrow [x^T q(w)\geq 0] \qquad (1.4)$$

برهان. فرض کنید (1.4) برقرار باشد. اگر مسئله، شدنی نباشد، آن‌گاه به ازای هر $w\in\Omega(x)$ بنابر لم ۱، بردار $v\geq 0$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$v^T M(w)\leq 0, v^T q(w)<0.$$

چون مجموعه‌ی ماتریس‌های$\{M(w): w\in\Omega(x)\}$ C–ماتریس است، داریم $v^T M(w)v=0$ و چون مجموعه‌ی ماتریس‌های $\{M(w): w\in\Omega(x)\}$ C_+-ماتریس است، $M(w)v=-M^T(w)v\geq 0,$ که متناقض با رابطه‌ی (1.4) است. بنابراین مسئله باید شدنی باشد.

بالعکس، اگر مسئله شدنی باشد و اگر v برداری باشد به‌طوری‌که برای بعضی $w\in\Omega(x)$ در $v^T M(w)v=0, M(w)v\geq 0$ صدق کند، آن‌گاه

$$M^T(w)v=-M(w)v\leq 0,$$

چون $M(w)$ یک C_+- ماتریس است. در نتیجه چون $v^T q(w)\geq 0$ $\mathrm{SVLCP}(M,q,\Omega)$ شدنی است.■

۵- بررسی ساختار مجموعه‌ی جواب مسئله‌ی مکمل مجموعه-مقدار

مجموعه‌ی جواب $\mathrm{SVNCP}(F,\Omega)$ را با $\mathrm{SOL}(F,\Omega)$ نشان می‌دهیم، و نماد $\mathrm{SOL}(F_w)$ برای نشان دادن مجموعه‌ی جواب $\mathrm{NCP}(F_w)$ به‌کار می‌رود. در ادامه مشخصه‌ای برای مجموعه‌ی جواب مسئله‌ی مکمل مجموعه–مقدار بیان می‌کنیم.

1. Feasiable set
2. Solution set
3. Feasiable
4. Solvable

یادآوری می‌کنیم که واروننگاشت مجموعه–مقدار $M: \mathbb{R}^n \multimap \mathbb{R}^m$ به‌صورت $M^{-1}(y) := \{x: y \in M(x)\}$ تعریف می‌شود.

قضیه ۵–۱: برای $SVNCP(F, \Omega)$، داریم:

$$SOL(F, \Omega) = \bigcup_{w\in\mathbb{R}^m}[SOL(F_w) \cap \Omega^{-1}(w)].$$

برهان. در واقع، نتیجه‌ی مورد نظر از

$$SOL(F, \Omega) = \{x: \exists w \in \mathbb{R}^m, x \in SOL(F_w), w \in \Omega(x)\} = \{x: \exists w \in \mathbb{R}^m, x \in SOL(F_w), x \in \Omega^{-1}(x)\} = \bigcup_{w\in\mathbb{R}^m}[SOL(F_w) \cap \Omega^{-1}(w)].$$

به‌دست می‌آید، که تساوی دوم از تعریف نگاشت وارون حاصل می‌شود. ■

حالت خاصی که نگاشت مجموعه–مقدار Ω فرم ضمنی دارد، را در نظر می‌گیریم، برای مثال،

$$\Omega(x) = \{w: H(x,w) = 0, G(x,w) \geq 0\},$$

که در آن $H: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{l_1}$ و همچنین $G: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{l_2}$. در این حالت مشخصه‌ی زیر برای مجموعه‌ی جواب به‌دست می‌آید.

قضیه ۵–۲: اگر

$$\Omega(x) = \{w: H(x,w) = 0, G(x,w) \geq 0\},$$

آن‌گاه

$$SOL(F, \Omega) = \bigcup_{w\in\mathbb{R}^m}\{x: (x, 0, \alpha)^T \in SOL(\Theta_w), \alpha \in \mathbb{R}^{l_2}{}_{++}, 0 \in \mathbb{R}^{l_1}\},$$

که $\Theta_w: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+l_1+l_2}$ به‌صورت

$$\Theta_w(x) := (F(x,w), G(x,w), H(x,w))^T$$

تعریف می‌شود.

برهان. با توجه به اینکه مسئله‌ی (2.1) عبارت است از یافتن $x \in \mathbb{R}^n$ و $w \in \mathbb{R}^m$ به‌طوری‌که

$$x \geq 0, F(x,w) \geq 0, \langle x, F(x,w)\rangle = 0,$$
$$G(x,w) \geq 0, H(x,w) = 0,$$

که معادل است با یافتن $x \in \mathbb{R}^n$ و $w \in \mathbb{R}^m$ که در

$$x \geq 0, F(x,w) \geq 0, \langle x, F(x,w)\rangle = 0,$$
$$0 \geq 0, G(x,w) \geq 0, \langle 0, G(x,w)\rangle = 0,$$
$$\alpha \geq 0, H(x,w) \geq 0, \langle \alpha, H(x,w)\rangle = 0,$$

صدق کنند. به عبارت دیگر

$$\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} \geq 0, \begin{pmatrix} F(x,w) \\ G(x,w) \\ H(x,w) \end{pmatrix} \geq 0,$$
$$\left\langle \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} F(x,w) \\ G(x,w) \\ H(x,w) \end{pmatrix} \right\rangle = 0,$$

که نتیجه‌ی مورد نظر است. ■

نتیجه‌ی قبل مشخص می‌کند که مسئله‌ی مکمل مجموعه–مقدار متفاوت از مسئله‌ی مکمل تک‌مقداری است، چون محدود است به اینکه بعضی مولفه‌های جواب باید مثبت یا صفر باشند، که در حالت تک‌مقداری، چنین محدودیتی مورد نیاز نیست.

زمانی‌که بردار صفر تنها جواب $LCP(M, 0, \Omega)$ باشد، آن‌گاه (1.4) به‌وضوح برقرار است. ماتریس‌ها با این ویژگی با نماد مشخصی نشان داده می‌شوند.

تعریف ۵–۳: مجموعه‌ی ماتریس‌های $\{M(w): w \in \Omega(x)\}$ **R_0-ماتریس** نامیده می‌شود هرگاه $SOL(M, 0, \Omega) = \{0\}$ رده‌ی چنین ماتریس‌هایی با نماد R_0 نشان داده می‌شود.

نتیجه‌ی بعدی ارتباط رده‌ی R_0 با کرانداری مجموعه‌ی جواب مسئله‌ی مکمل خطی مجموعه–مقدار به علاوه کرانداری مجموعه‌های تراز[1] برنامه‌ریزی درجه دوم را نشان می‌دهد.

قضیه ۵–٤: برای مجموعه‌ی ماتریس‌های $\{M(w): w \in \Omega(x)\}$ عبارات زیر معادل هستند:

1. Level sets

(الف) مجموعه‌ی ماتریس‌های $\{M(w): w \in \Omega(x)\}$ R_0-ماتریس است.

(ب) به‌ازای هر $q: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ از پایین کراندار و هر $s, t \in \mathbb{R}$ با $s > 0$ مجموعه‌ی تراز

$$L(s,t) = \{z \geq 0 : \exists w \in \Omega(x), M(w)z + q(w) \geq 0, \; sz^T M(w)z + z^T q(w) \leq t\}$$

کراندار است.

(ج) به‌ازای هر $q: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ از پایین کراندار، مجموعه‌ی $SOL(M, q, \Omega)$ کراندار است.

برهان. (الف) $\Longleftarrow$ (ب). فرض کنید مجموعه‌ی ماتریس‌های $\{M(w): w \in \Omega(x)\}$ R_0-ماتریس باشد اما مجموعه‌ی $L(s,\ t)$ برای بعضی $q: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$، $s > 0$، t بی‌کران باشد. فرض کنید $\{z^k\}$ دنباله‌ای بی‌کران از بردارها در $L(s,\ t)$ باشد. به‌آسانی می‌توان نشان داد که هر نقطه‌ی حدی دنباله‌ی $\frac{z^k}{\|z^k\|}$ (که کراندار است) جواب ناصفری از $SVLCP(M, 0, \Omega)$ است.

(ب) $\Longleftarrow$ (ج). کافیست توجه کنید که $SOL(M, q, \Omega)$ برابر با مجموعه‌ی تراز $L(1,0)$ است.

(ج) $\Longleftarrow$ (الف). اگر z جواب ناصفری از $SVLCP(M, 0, \Omega)$ باشد، آن‌گاه هر مضرب ناصفری از z نیز جوابی از آن می‌باشد. ■

تعریف ۵–۵: مجموعه‌ی ماتریس‌های $\{M(w): w \in \Omega(x)\}$ را یکنوا گویند، هرگاه به ازای هر $x \in \mathbb{R}^n$ و $x^T M(w)x \geq 0, \forall w \in \Omega(x)$.

قضیه‌ی زیر ویژگی مجموعه‌ی جواب $SVLCP(M, q, \Omega)$ با مجموعه‌ی ماتریس‌های یکنوا را بیان می‌کند.

قضیه ۵–٦: فرض کنید $q: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ و مجموعه‌ی ماتریس‌های $\{M(w): w \in \Omega(x)\}$ یکنوا باشد. اگر x و y دو جواب $SVLCP(M, q, \Omega)$ باشند به‌طوری که $\Omega(x) \cap \Omega(y) \neq \emptyset$ آن‌گاه به‌ازای $w \in \Omega(x) \cap \Omega(y)$ داریم:

$$x^T\big(M(w)y + q(w)\big) = y^T(M(w)x + q(w)) = 0\,. \qquad (1.5)$$

برهان. بنابر یکنوایی $\{M(w): w \in \Omega(x)\}$ و با توجه به اینکه $x, y \in SOL(M, q, \Omega)$ به‌ازای $w \in \Omega(x) \cap \Omega(y)$ داریم:

$$\begin{aligned} 0 &\leq (x - y)^T M(w)(x - y) \\ &= x^T(M(w)x + q(w)) - x^T\big(M(w)y + q(w)\big) \\ &\quad y^T(M(w)x + q(w)) + y^T\big(M(w)y + q(w)\big) \\ &= -x^T(M(w)y + q(w)) - y^T\big(M(w)x + q(w)\big) \leq 0. \end{aligned}$$

چون مجموع دو عبارت نامنفی برابر صفر شده است در نتیجه باید (1.5) برقرار باشد. ■

قضیه‌ی۵–۶ نشان می‌دهد که $SOL(M, q, \Omega)$ با مجموعه‌ی ماتریس‌های یکنوا، محدب است. به علاوه، اگر مجموعه‌ی ماتریس‌های $\{M(w): w \in \Omega(x)\}$ یکنوا باشد، آن‌گاه (1.5) به ازای هر دو جواب x و y از $SVLCP(M, q, \Omega)$ برقرار است. در حقیقت، شرط (1.5) تحدب مجموعه‌ی جواب یک $SVL.CP(M, q, \Omega)$ دلخواه را مشخص می‌کند.

قضیه ۵–۷: فرض کنید $q: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. به ازای مجموعه‌ی ماتریس‌های $\{M(w): w \in \Omega(x)\}$ موارد زیر معادل هستند:

(الف) مجموعه‌ی $SOL(M, q, \Omega)$ محدب است.

(ب) به ازای هر $x, y \in SOL(M, q, \Omega)$ که $\Omega(x) \cap \Omega(y) \neq \emptyset$ رابطه‌ی (1.5) برقرار است.

برهان. (الف) $\Longleftarrow$ (ب). فرض کنید x و y جواب‌هایی از $SVLCP(M, q, \Omega)$ باشند به طوری که $\Omega(x) \cap \Omega(y) \neq \emptyset$ بنابر فرض محدب بودن مجموعه‌ی جواب، به‌ازای هر $0 < \lambda < 1$ بردار $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$ همچنین جواب $SVLCP(M, q, \Omega)$ است. بنابراین به ازای

$w \in \Omega(x) \cap \Omega(y)$ داریم:

$$
\begin{aligned}
0 &= z^T(M(w)z + q(w)) \\
&= (\lambda x + (1-\lambda)y)^T(M(w)\lambda x + (1-\lambda)y + q(w)) \\
&= (\lambda x + (1-\lambda)y)^T \Big(\lambda\big(M(w)x + q(w)\big) + \big((1-\lambda)\big)\big(M(w)y + q(w)\big)\Big) \\
&= \lambda(1-\lambda)\Big(x^T\big(M(w)y + q(w)\big) + y^T\big(M(w)x + q(w)\big)\Big)
\end{aligned}
$$

مجموع دو عبارت نامنفی برابر صفر شده است. بنابراین باید (1.5) برقرار باشد.

(ب) $\Longleftarrow$ (الف). به آسانی با معکوس بحث قسمت نخست، نتیجه‌ی مورد نظر به‌دست می‌آید.■

۶- کاربرد

۶-۱- مدل برنامه‌ریزی درجه دوم محدب

چون شرایط بهینه‌ی برنامه‌ریزی درجه دوم محدب تشکیل مسئله‌ی مکمل خطی می‌دهد، هر کاربرد شامل برنامه‌ریزی درجه دوم محدب یک کاربرد برای مسئله‌ی مکمل خطی ارائه می‌دهد. در اینجا، یک کاربرد توصیف شده توسط مورتی [۱۴]، در مدیریت زنجیره‌ای موجودیبیان می‌شود.

یک موضوع مهم در مدیریت زنجیره‌ای موجودی، پیش‌بینی تقاضا برای هر آیتم و تعیین زمان برای قرار دادن سفارشات و مقدار سفارشات می‌باشد. توزیع تقاضا به‌طور معمول توزیع نرمال فرض می‌شود. این فرض، مزیت‌های نظری زیادی دارد. مهمترین مزیت این است که توزیع نرمال به‌وسیله‌ی تنها دو پارامتر، میانگین[1] و انحراف استاندارد[2] کاملاً مشخص می‌شود. بنابراین، زمانی که توزیع تغییر می‌کند، فقط نیاز است مقادیر این دو پارامتر در مدل‌ها تغییر یابد.

یک استراتژی این است که توزیع تقاضا را با استفاده از نمودار هیستوگرام داده‌های قبلی تقریب می‌زنند. در این تقریب که توزیع تقاضای گسسته نامیده می‌شود، دامنه‌ی تغییرات تقاضا، به تعدادی بازه‌های تقاضا تقسیم می‌شود (در عمل حدود ۱۰ تا ۲۵)، و احتمال مربوط به هر بازه در توزیع آغازین، فراوانی نسبی در طی آن بازه در نظر گرفته می‌شود.

فرض کنید $I_1, \dots, I_n$ بازه‌های تقاضا و $p=(p_1, \dots, p_n)$ بردار احتمال‌های مربوط به آن‌ها در توزیع کنونی باشد. برای هر $i = 1, \dots, n$ فرض کنید r_i فراوانی نسبی در I_i روی k دوره‌ی اخیر در زمان به‌روزرسانی باشد (اگر دوره یک روز است، برای مثال k می‌تواند حدود ۵۰ باشد). فرض کنید $x=(x_1, \dots, x_n)$ نشان‌دهنده‌ی بردار احتمال به‌روز شده باشد. $r=(r_1, \dots, r_n)$ یک تقریب x است، اما براساس تنها k مشاهده می‌باشد. می‌توانید یک تقریب x را $\bar{y}$ در نظر بگیرید که جواب بهینه‌ی مسئله‌ی درجه دوم زیر است:

$$
\begin{aligned}
&\min \\
&\beta \sum_{i=1}^{n}(p_i - y_i)^2 + (1-\beta)\sum_{i=1}^{n}(r_i - y_i)^2 \\
&\text{subject to} \qquad \sum_{i=1}^{n} y_i = 1, y_i \geq 0, \\
&\forall\, 1 \leq i \leq n,
\end{aligned}
$$

که β یک وزن است. معمولاً $0 < \beta < 1$ عملکرد خوبی دارد. دلیل اینکه وزن برای عبارت دوم در تابع هدف طوری انتخاب می‌شود که تابع هدف کوچک شود، این است که بردار فراوانی نسبی r براساس تعداد کمی از مشاهدات به‌دست آمده است. چون تابع هدف درجه دوم در این مدل، مجموع وزن‌دار مربع خطاهای پیش‌بینی شده روی همه‌ی بازه‌های تقاضا است، ردیابی تغییرات رشد در توزیع تقاضا تاثیرگذار است، زمانی که در هر دوره سفارش استفاده شود. روش‌های سفارش بهینه بر پایه‌ی توزیع‌های تقاضای گسسته در [۱۴] بحث شده است.

جواب بهینه‌ی برنامه‌ی درجه دوم بالا $\bar{y} = (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_{n-1}, \bar{w}_n)$ است که $\bar{w} = (\bar{w}_j)$ و $\bar{z} = (\bar{z}_j)$ جواب مسئله‌ی مکمل خطی با داده‌های

$$
M = \begin{bmatrix}
2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\
1 & 2 & & 1 & 1 \\
\vdots & & \ddots & \vdots & \\
1 & 1 & \cdots & 2 & 1 \\
-1 & -1 & & -1 & 0
\end{bmatrix}
$$

و

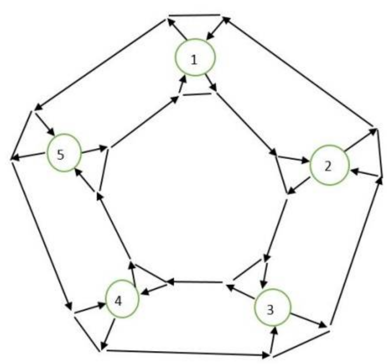
1. Mean
2. Standard deviation

$$q = \begin{pmatrix} -1-\beta(p_1-p_n)-(1-\beta)(r_1-r_n) \\ -1-\beta(p_2-p_n)-(1-\beta)(r_2-r_n) \\ \vdots \\ -1-\beta(p_{n-1}-p_n)-(1-\beta)(r_{n-1}-r_n) \\ 1 \end{pmatrix}$$

می‌باشد. این مسئله، از مرتبه کوچک است، و می‌تواند خیلی راحت با استفاده از الگوریتم لولایی مکمل[1] حل شود. در مدیریت زنجیره‌ای موجودی، چنین مدلی برای هر آیتم در هر دوره‌ی سفارش حل می‌شود.

۲،۶- تعادل ترافیک

مثال تعادل ترافیک زیر از [۶] ارتباط بین تعادل و مکمل را نشان می‌دهد.
مسئله شامل پنج شهر، شماره‌گذاری شده از ۱ تا ۵ می‌باشد، که به وسیله شبکه‌ای از راه‌های یک‌طرفه به‌هم متصل شده‌اند (شکل را ببینید).



هر شهر i باید مقدار d_i از یک محصول را به سومین شهر در جهت عقربه‌های ساعت از خودش حمل کند. برای مثال، شهر ۱ به شهر ۴، شهر ۲ به شهر ۵، و الی آخر. به‌طور طبیعی، هدف این است که محصول در کوتاه‌ترین زمان ممکن حمل شود.
از شکل، واضح است که برای هر شهر، تنها دو کوتاهترین مسیر ممکن وجود دارد: حمل در جهت خلاف عقربه‌های ساعت در طول حلقه بیرونی یا حمل در جهت عقربه‌های ساعت در طول حلقه درونی. فرض کنید x_i نشانگر مقدار حمل شده از شهر i به شهر $i+3$ (به پیمانه ۵) در طی مسیر بیرونی و y_i نشانگر مقدار حمل شده در طی مسیر درونی باشد. مجموعه‌ی جریان‌های $x = (x_i)$ و $y = (y_i)$ شدنی است اگر در شرایط $x, y \geq 0, x+y \geq d$ صدق کنند که $d = (d_i)$.
بردارهای جریان x و y، می‌توانند ترافیک روی هر راه شبکه را تعیین کنند. برای مثال، راه بیرونی بین شهرهای ۳ و ۴ جریانی برابر $x_1+x_2+x_3$ خواهد داشت. تاخیر در راه k توسط ترافیک کلی روی راه تعیین می‌شود و تابعی محدب از جریان ترافیک فرض می‌شود. تاخیر برای یک مسیر داده شده، برابر مجموع تاخیرهای همه‌ی راه‌های تشکیل دهنده‌ی آن مسیر می‌باشد. از این مطلب، نتیجه می‌شود که برای هر شهر i، تاخیر O_i در طی مسیر بیرونی توسط بردار جریان x و تاخیر I_i در طی مسیر درونی توسط بردار جریان y تعیین می‌شود. بنابراین می‌توان دو تابع $O(x) = \left(O_i(x)\right)$ و $I(y) = \left(I_i(y)\right)$ را تعریف کرد.
تاخیر موثر بین دو شهر، برابر با ماکسیمم تاخیر میان مسیرها با جریان ناصفر بین دو شهر تعریف می‌شود. هر شهر یک استراتژی حمل در جهت مینیمم کردن تاخیر موثر به شرط اینکه استراتژی‌های حمل از دیگر شهرها ثابت باقی بماند، انتخاب می‌کند. این استراتژی، مینیمم زمانی است که هر چیزی در طی مسیری با کمترین تاخیر حمل شود، یا زمانی که هر دو مسیرهای درونی و بیرونی تاخیر یکسانی داشته باشند. برای دیدن این مطلب، توجه کنید که اگر تاخیر برای مسیر درونی کمتر از تاخیر برای مسیر بیرونی باشد، حمل کننده می‌تواند تاخیر موثر را با حمل بیشتر در طی مسیر درونی، بهبود ببخشد. این کار ترافیک در مسیر بیرونی را کاهش می‌دهد، که تاخیر در مسیر بیرونی کاهش و بنابراین کاهش ترافیک موثر نتیجه می‌شود.
یک الگوی تعادل ترافیک زمانی که هر پنج شهر به طور بهینه در حال حمل کردن باشند به‌طوری‌که استرتژی‌های حمل از دیگر شهرهای باقیمانده ثابت باشد، پدیدار می‌شود. از بحث بالا، این مطلب با شرایط مکمل زیر معادل است:

$$0 \leq O(x) - u, x \geq 0, x^T(O(x) - u) = 0,$$
$$0 \leq I(y) - u, y \geq 0, y^T(I(y) - u) = 0,$$

1. Complementarity pivot algorithm

که متغیر $u \in \mathbb{R}^5$ نشانگر تاخیر موثر می‌باشد. توجه کنید که u مکمل با قید تقاضاست. به‌خصوص، اگر تاخیر موثر صفر باشد، تنها می‌تواند عرضه‌ی اضافی وجود داشته باشد.

شرایط توصیف شده در بالا منجر به مسئله‌ی مکمل غیرخطی با $z := (x, y, u)$ و

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \\ u \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} O(x) - u \\ I(y) - u \\ x + y - d \end{pmatrix}$$

می‌شود.

فهرست منابع

[1] J. P. Aubin and H. Frankowska, Set Valued Analysis, Birkhäuser, Boston, 1990.

[2] D. Aussel, N. Hadjisavvas, *On quasi-monotone variational inequalities*, Journal of Optimization Theory and Applications. **121**(2004), 445–450.

[3] H. H. Bauschke, and P. L. Combettes, Convex Analysis and Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces, Springer, New York, (2011).

[4] E. Blum and W. Oettli, *From optimization and variational inequalities to equilibrium problems*, Math. Student **63**(1994), 123–145.

[5] R. W. Cottle, J. S. Pang and R. E. Stone, The Linear Complementarity Problem, Academic Press, NewYork, 1992.

[6] S. P. Dirkse, M. C. Ferris, MCPLIB : *a collection of nonlinear rmixed complementarity problems*, Optimization Methods & Software **5**(1995), 319–345.

[7] B. C. Eaves, *The linear complementa-rity problem*, Management Science. **17**(1971), 612–634.

[8] F. Facchinei and J. S. Pang, Finite-Dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems, Volume I and II, Springer, New York, 2003.

[9] M. Fiedler and V. Ptak, Some generalizations of positive definiteness and monotonicity, Numerical Mathematics **9**(1966), 163-172.

[10] M.S.Gowda, On the extended linear complementarity problem, Mathematical Programming **72**(1996), 33–50.

[11] G. Isac, Topological Methods in Complementarity Theory, Nonconvex Optimization and Its Applications, Springer, 2000.

[12] O. L. Mangasarian and J. S. Pang, The extended linear complementarity problem, SIAM Journal on Matrix Analysis and Application **16**(1995), 359–368.

[13] K .G. Murty, Linear Complementarity, Linear and Nonlinear Programming, Sigma Series in Applied Mathematics, Heldermann Verlag, Berlin, 1988.

[14] K. G. Murty, Supply chain management in the computerindustry, Manuscript, Department of IOE, Universityof Michigan, Ann Arbor, (1998).

[15] J. S. Pang, The implicit complementarity problem, in Nonlinear Programming, O. L. Mangasarian, R. R. Meyer, and S. M. Robinson, Eds., Academic Press, New York, (1981), 487–518.

[16] J. S. Pang and M. Fukushima, *Quasi-variational inequalities, generalized Nash equilibria, and multileader-follower games, Computational Management Science*. **2**(2005), 21–56.

[17] E. Polak, Optimization: Algorithms and Consistent Approximation, Springer, New York, NY, USA, 1997.

[18] J. Zhou, J. S. Chen and G. M. Lee, *On set-valued complementarity problems*, Abstract and Applied Analysis, Vol. 2013, Article ID 105930, 11 pages, 2013.