

دسترسی در سایت <http://jnrm.srbiau.ac.ir>

سال پنجم، شماره نوزدهم، مرداد و شهریور ۱۳۹۸

شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸۸

JNRM  
JOURNAL OF  
NUMERICAL  
RATIONAL  
METHODS

پژوهش‌های نوین در ریاضی



دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

## حل عددی و شبیه سازی معادلات رندم با فرایندهای وینر و پواسون مرکب

عارفه مومنی<sup>۱</sup>، مینو کامرانی<sup>۲\*</sup>

(<sup>۲۹</sup>) گروه ریاضی کاربردی، دانشکده علوم، دانشگاه رازی، کرمانشاه، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۷/۰۷/۲۱ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۷/۱۰/۰۵

### چکیده

هدف اصلی این مقاله بررسی روش‌های عددی برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی که شامل فرایند تصادفی با بعد بزرگتر از یک هستند می‌باشد. معادلات دیفرانسیل با یک پخش ایتو که جوابی از معادله دیفرانسیل تصادفی ایتو است مورد بررسی قرار می‌گیرد. با توجه به اینکه برای حل عددی این دسته از معادلات در روش‌های مبتنی بر بسط تیلور به شبیه‌سازی انتگرال‌های دوگانه تصادفی نیاز داریم، نحوه شبیه‌سازی این انتگرال‌ها بیان می‌شود. در ادامه به بررسی روش‌های عددی تک‌گامی و چندگامی برای حل معادلات رندم آفین پرداخته می‌شود، سپس حل عددی این دسته از معادلات با دو دسته نویز مختلف وینر و پواسون مرکب بیان می‌شود. بدین منظور روش‌هایی برای شبیه‌سازی انتگرال‌های تصادفی با هر دو دسته نویز مختلف ارائه می‌شود و در انتها با ذکر چند مثال عددی به پیاده سازی روش‌های ارائه شده پرداخته می‌شود.

**واژه‌های کلیدی:** معادلات دیفرانسیل رندم، معادلات رندم آفین، مرتبه همگرایی، روش تیلور تصادفی، فرایند پواسون مرکب.

## ۱- مقدمه

معادلات دیفرانسیل معمولی که شامل یک فرایند تصادفی در توابع میدان برداری باشند معادلات رندم (RODES) نامیده می‌شوند. این دسته از معادلات تصادفی دارای کاربردهای فراوانی در علوم مختلف از جمله بیوشیمی، فیزیک، ... هستند و نقش مهمی در نظریه سیستم‌های دینامیک تصادفی دارند [۱]. شکل کلی این معادلات به صورت زیر است:

$$\frac{dx}{dt} = f(\xi_t, x), \quad (1)$$

که میدان برداری  $f(\xi_t(\omega), x) \rightarrow (t, x)$  حداکثر پیوسته هولدر نسبت به متغیر زمان است. این دسته از معادلات به صورت مسیری می‌توانند یک معادله دیفرانسیل معمولی در نظر گرفته شوند [۶, ۸]. با توجه به اینکه به علت وجود جمله تصادفی دسته وسیعی از این معادلات دارای جواب تحلیلی نیستند حل عددی این معادلات در سال‌های اخیر بسیار مورد توجه قرار گرفته است. چون مسیره‌های نمونه جواب معادله (۱) به طور پیوسته مشتق‌پذیر هستند اما مشتقات آن‌ها حداکثر پیوسته هولدر نسبت به زمان هستند، بنابراین اگرچه روش‌های عددی برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی معمولاً می‌توانند به صورت مسیری برای حل آن‌ها به کار آیند ولی به ندرت مرتبه همگرایی آن‌ها برای حل این معادلات حفظ می‌شود. به منظور بدست آوردن روش‌هایی با مرتبه همگرایی بالاتر روش‌های عددی جدیدی برای حل RODEs ها در سال‌های اخیر بدست آمده است [۲]. در [۹, ۱۰] روش‌هایی مبتنی بر بسط تیلور و در [۳] نیز روش‌های چندگامی خطی و همگرایی آن‌ها برای حل این دسته از معادلات بررسی شده‌اند.

زمانیکه فرایند نویز یک فرایند ایتو است یعنی جوابی از یک معادله تصادفی ایتو (SDE) است زوج -RODE SODE تشکیل یک سیستم معادله دیفرانسیل تصادفی با بعد بالاتر را می‌دهد که همگرایی مسیری روش‌های تیلور تصادفی برای این دسته از معادلات در [۸, ۱۱] بیان شده است. در [۴] نویسندگان به بررسی روش‌های عددی مبتنی بر بسط تیلور برای حل معادلات رندم با

نویز یک بعدی پرداخته‌اند. در حالتی که معادله تصادفی شامل دو نویز متفاوت باشد با توجه به اینکه در روش‌های عددی نیازمند شبیه‌سازی انتگرال‌های دوگانه تصادفی هستیم، حل عددی این معادلات به راحتی حالت یک بعدی نیست.

با توجه به اینکه در تمام منابع موجود برای حل معادلات رندم، شبیه‌سازی این دسته از معادلات با یک نویز مورد بررسی قرار گرفته است [۳, ۴]، هدف اصلی این مقاله ارائه روش‌های عددی برای حل معادلات رندم در حالتی که نویز آن دو بعدی است می‌باشد. بدین منظور ابتدا به بررسی دو روش برای شبیه‌سازی انتگرال‌های دوگانه موجود در روش‌های عددی متناظر پرداخته می‌شود و سپس با ذکر یک مثال به پیاده‌سازی روش‌های فوق می‌پردازیم.

در ادامه معادلات دیفرانسیل تصادفی ۳- بعدی با جمله نویز آفین به صورت زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\frac{dx}{dt} = f \cdot (t, x) + \sum_{j=1}^r f^j(t, x) \xi_t^j, \quad (2)$$

که  $\xi_t = (\xi_t^1, \dots, \xi_t^r) \in \mathbb{R}^r$  و  $x = (x^1, \dots, x^d) \in \mathbb{R}^d$  فرایند نویز می‌باشد. فرض کنید  $\xi_t$  حداقل اندازه‌پذیر لیگ و تقریباً همه‌جا کراندار باشد. در [۵] روش‌های مبتنی بر بسط تیلور-استراتنویچ برای حل معادله (۲) به دست آمده است، اما در تمامی منابع موجود، شبیه‌سازی این روشها مورد بررسی قرار نگرفته است.

هدف بعدی این مقاله ارائه روش‌های عددی تک‌گامی و چندگامی با مرتبه‌های مختلف برای حل معادله (۲) در دو حالت که نویزها فرایند وینر و پواسون مرکب هستند می‌باشد. بدین منظور به معرفی یک روش برای شبیه‌سازی انتگرال‌های تصادفی با نویز وینر و همچنین نویز برگرفته شده از پواسون مرکب می‌پردازیم. بنابراین هدف بعدی این مقاله ارائه روش‌های عددی با مرتبه‌های مختلف و همچنین شبیه‌سازی انتگرال‌های تصادفی بدست آمده از نویز وینر و پواسون مرکب موجود در روش‌های عددی برای حل معادلات رندم و رندم آفین است.

در بخش دوم روش‌های عددی مبتنی بر بسط تیلور

و  $\Delta_i = t_{i+1} - t_i$  (طول گام) و ماکزیمم طول گام  $\Delta = \max_{i=1, \dots, n} \Delta_i$  و  $\Delta W_n^j = W_{n+1}^j - W_n^j$  باشند. قرار دهید

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} X_{n+1}^1 \\ \vdots \\ X_{n+1}^{d_1+d_2} \end{pmatrix},$$

که در آن  $X_{n+1}$  تقریبی از  $X_{t_{n+1}}$ ، جواب معادله (۴) در نقطه  $(n+1)\Delta t$  است.

فرض کنید  $\Lambda_\gamma$  مجموعه سلسله مراتبی از چند اندیسی‌ها به صورت

$$\Lambda_\gamma = \left\{ \begin{array}{l} \alpha \in M_\gamma : l(\alpha) + n(\alpha) \leq 2\gamma \\ \text{or } l(\alpha) + n(\alpha) = \gamma + \frac{1}{\gamma} \end{array} \right\},$$

باشد که  $n(\alpha)$  تعداد مؤلفه‌های صفر  $\alpha$  و  $l(\alpha)$  تعداد مؤلفه‌های  $\alpha$

$$M_\gamma = \left\{ \alpha \in (j_1, \dots, j_l) \in \{0, 1, 2\}^l : l \in \mathbb{N} \right\} \cup \{\emptyset\},$$

که در آن  $\emptyset$  اندیس تهی با  $l(\emptyset) = 0$  است. از مهم‌ترین روش‌های عددی برای حل این معادلات روشی مبتنی بر بسط تیلور قوی مرتبه  $\gamma$  است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$X_{n+1}^k = \sum_{\alpha \in \Lambda_\gamma} L^\alpha id_X^k(t_n, X_n) I_{\alpha, n}, \quad (5)$$

$$k = 1, \dots, d,$$

که در آن  $X_{n+1}^k$ ،  $k$ -امین مؤلفه‌ی  $X_{n+1}$  و  $id_X^k(t_n, X_n)$ ،  $k$ -امین مؤلفه‌ی  $X$  به ازای  $(t_n, X_n)$  است. به علاوه انتگرال‌های چندگانه و عملگرهای خطی برای چنداندیسی  $\alpha = (j_1, \dots, j_l)$  با طول  $l \geq 1$  به صورت زیر است:

$$I_{\alpha, n} := \int_{t_n}^{t_{n+1}} \dots \int_{t_n}^{s_2} dW^{j_1}(s_1) \dots dW^{j_l}(s_l),$$

$$L^\alpha = L^{j_1} \dots L^{j_l},$$

تصادفی مرتبه  $\gamma$  برای معادلات رندم بیان می‌شود و سپس یک روش مرتبه ۱ برای حل عددی این دسته از معادلات ارائه می‌شود. در بخش سوم شبیه‌سازی انتگرال‌های دوگانه با استفاده از دو روش بررسی می‌شود. در بخش چهارم به ارائه روش‌های عددی مبتنی بر بسط تیلور-استراتیویج برای حل معادلات رندم آفین مبنی بر نویز وینر و پواسون مرکب پرداخته می‌شود و سپس شبیه‌سازی انتگرال‌های تصادفی حاصل از فرایند پواسون مرکب بیان می‌شود. در انتها در بخش پنجم به حل عددی دو مثال کاربردی با استفاده از روش‌های بیان شده پرداخته می‌شود.

## ۲- روش‌های عددی برای حل معادلات رندم

معادله تصادفی RODE زیر را روی  $\mathbb{R}^{d_1}$  در نظر بگیرید:

$$\frac{dx_t}{dt} = f(x_t, y_t),$$

که در آن  $y_t$  جواب معادله دیفرانسیل تصادفی ایتو

$$dy_t = a(y_t)dt + \sum_{j=1}^r b_j(y_t) dW_t^j,$$

در  $\mathbb{R}^{d_1}$  می‌باشد که  $r \in \mathbb{N}$ . معادلات فوق را می‌توان به صورت زیر در  $\mathbb{R}^{d_1+d_2}$  نوشت:

$$d \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_t, y_t) \\ a(y_t) \end{pmatrix} dt + \sum_{j=1}^r \begin{pmatrix} \cdot \\ b_j(y_t) \end{pmatrix} dW_t^j. \quad (3)$$

حال فرض کنید  $X = (x, y)^T \in \mathbb{R}^d$ ،  $d = d_1 + d_2$  هم‌چنین

$$F(X) = \begin{pmatrix} f(x, y) \\ a(y) \end{pmatrix}, G_j(X) = \begin{pmatrix} \cdot \\ b_j(y) \end{pmatrix}.$$

بنابراین داریم:

$$dX_t = F(X_t)dt + \sum_{j=1}^r G_j(X_t) dW_t^j. \quad (4)$$

با توجه به اینکه این دسته از معادلات به ندرت دارای جواب تحلیلی هستند، حل عددی این معادلات بسیار مورد توجه قرار می‌گیرد. فرض کنید  $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n = T$  بازه  $[0, T]$  باشد

به ازای  $k=1, \dots, d_1$  با توجه به اینکه  $X_{n+1}^k = x_{n+1}^k$  است روش تیلور مرتبه ۱ برای مؤلفه‌ی اول  $X$  یعنی  $x$  به صورت زیر است:

$$x_{n+1}^k = \sum_{\alpha \in \Lambda_1} L^\alpha id_X^k(t_n, x_n, y_n) I_{(\alpha, n)}, \quad (7)$$

$$k = 1, \dots, d_1,$$

چون به ازای  $k=1, \dots, d_1$  داریم  $Lid_X^k \equiv \cdot$  پس برای هر اندیس  $\alpha$  که  $j_l = 1$  داریم:

$$L^\alpha id_X^k = L^{\alpha-} L^{j_l} id_X^k = L^{\alpha-} Lid_X^k = L^{\alpha-} \cdot = \cdot,$$

که در آن  $\alpha -$  چند اندیسی در  $M_\gamma$  است که از حذف آخرین مؤلفه‌ی  $\alpha$  بدست می‌آید. بنابراین

$$x_{n+1}^k = \sum_{\alpha \in \Lambda_1} L^\alpha id_X^k(t_n, x_n, y_n) I_{(\alpha, n)}, \quad (8)$$

$$k = 1, \dots, d_1,$$

که

$$\Lambda_1 = \left\{ \alpha \in \Lambda_1 \subset M_\gamma : \alpha = \emptyset \right. \\ \left. \text{or } l(\alpha) \geq 1 \text{ s.t. } j_l = \cdot \right\}$$

$$= \{ \emptyset, (\cdot) \}.$$

به ازای  $\alpha = \emptyset$  و به ازای  $\alpha = (\cdot)$  داریم:

$$L^\emptyset id_X^k = id_X^k,$$

$$Lid_X^k = \sum_{l=1}^{d_1} F^k \frac{\partial id_X^k}{\partial X_l}, \quad k = 1, \dots, d_1,$$

بنابراین روش عددی مرتبه ۱ برای مؤلفه‌ی اول  $X$  یعنی  $x$  به صورت زیر در می‌آید:

$$x_{n+1}^k = x_n^k + F^k(X_n) I_{(\cdot), n}, \quad k = 1, \dots, d_1, \quad (9)$$

که در آن  $F^k(X)$ ،  $k$ -امین مؤلفه‌ی  $F(X)$  است. به ازای  $k=1, \dots, d_1$  با توجه به اینکه  $X_{(n+1)}^{(d_1+k)} = y_{(n+1)}^k$  و اینکه  $y_l$  جواب یک معادله SODE است، با استفاده از (۶) روش تیلور قوی مرتبه  $\gamma$  به ازای  $\gamma=1$  برای مؤلفه‌ی دوم  $X$  یعنی  $y$  به صورت زیر است:

که  $L^\emptyset = id$  و  $I_{\emptyset, n} = 1$  (عملگر همانی) است و

$$LU = \frac{\partial U}{\partial t} + \sum_{k=1}^d F^k \frac{\partial U}{\partial X_k} \\ + \sum_{k,l=1}^d \sum_{j=1}^r \frac{1}{\gamma} G_j^k G_j^l \frac{\partial^2 U}{\partial X_k \partial X_l},$$

$$L^j U = \sum_{k=1}^{d_1} G_j^k \frac{\partial U}{\partial X_k}, \quad j = 1, 2,$$

که در آن  $U: [0, T] \times \mathbb{R}^{d_1+d_2} \rightarrow \mathbb{R}$  تابعی به اندازه کافی هموار از  $t$  و  $X$  است.

بنا به [۱۲] روش تیلور مرتبه  $\gamma$  (۵) همگرایی قوی مرتبه  $\gamma$  است به این معنا که

$$\mathbb{E} \sup_{n=0, \dots, N_T} |X_n - X_{t_n}| \leq K_T \Delta^\gamma \rightarrow 0 \text{ as } \Delta \rightarrow 0.$$

در ادامه فرض کنید ضرایب معادله دیفرانسیل معمولی تصادفی (۴)،  $1 + 2\gamma$  بار به طور پیوسته مشتق‌پذیر و مشتقات آن‌ها به طور یکنواخت کراندار باشند.

**قضیه ۱.** تحت فرضیات فوق، روش تیلور مرتبه  $\gamma$  برای حل معادلات دیفرانسیل تصادفی، همگرایی مسیری از مرتبه  $\gamma - \varepsilon$  به ازای  $\varepsilon > 0$  است. به این معنی که

$$\sup_{n=0, \dots, N_T} |X_n(\omega) - X_{t_n}(\omega)| \leq K_{\varepsilon, T}^{(\gamma)} \Delta^{\gamma-\varepsilon},$$

تقریباً برای همه‌ی  $\omega \in \Omega$ .

## ۲-۲- روش مرتبه ۱ برای حل معادلات رندم

در این بخش به بررسی روش تیلور با مرتبه  $\gamma=1$  پرداخته می‌شود. طبق بسط تیلور قوی (۵) به ازای  $\gamma=1$  داریم:

$$X_{n+1} = \sum_{\alpha \in \Lambda_1} L^\alpha id_X^k(t_n, X_n) I_{\alpha, n}, \quad (6)$$

$$k = 1, \dots, d_1 + d_2,$$

که در آن

$$\Lambda_1 = \{ \emptyset, (\cdot), (1), (2), (1,1), (1,2), (2,1), (2,2) \}$$

به راحتی می توان این انتگرال ها را شبیه سازی کرد.

$$y_{n+1}^k = \sum_{\alpha \in \Lambda_1} L^\alpha id_X^k(t_n, y_n) I_{\alpha, n}, \quad k = 1, \dots, d_r.$$

بنابراین

$$y_{n+1}^k = y_n^k + F^k(X_n) I_{(\cdot), n} + \sum_{j=1}^r G_j^k(X_n) I_{(j), n} + \sum_{j_1, j_2=1}^r L^{(j_1, j_2)} G_{(j_1, j_2)}^k(X_n) I_{(j_1, j_2), n}, \quad k = 1, \dots, d_r, \quad (10)$$

که در آن  $G_j^k(X)$ ،  $-k$  امین مؤلفه ی  $G_j(X)$  است و به ازای  $j = 1, 2$

$$I_{(j, j), n} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{s_n}^{s_r} dW_{s_n}^j dW_{s_r}^j = \int_{t_n}^{t_{n+1}} (W_{s_r}^j - W_{s_n}^j) dW_{s_r}^j = \frac{1}{2} \left\{ (\Delta W_n^j)^2 - \Delta_n \right\}.$$

9

$$I_{(1, 2), n} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{s_n}^{s_r} dW_{s_n}^1 dW_{s_r}^2, \quad I_{(2, 1), n} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{s_n}^{s_r} dW_{s_n}^2 dW_{s_r}^1.$$

مهم ترین مشکلی که در این روش وجود دارد شبیه سازی انتگرال های  $I_{(1, 2), n}$  و  $I_{(2, 1), n}$  است. برای حل این مشکل از دو روش بر پایه محاسبات [۱۳] استفاده می کنیم که این روش ها را در بخش های بعد ارائه می دهیم.

**ملاحظه ۱.** اگر در معادله (۹) به ازای  $k = 1, \dots, d$

$$L^j G_{j_r}^k(X) = L^{j_r} G_j^k(X) \quad I_{(j_1, j_2), n} + I_{(j_2, j_1), n} = I_{(j_1), n} I_{(j_2), n}, \quad j_1, j_2 = 1, 2,$$

و با توجه به اینکه

$$I_{(j_1), n} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} dW_{s_n}^{j_1} = \Delta W_n^{j_1}, \quad I_{(j_2), n} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} dW_{s_n}^{j_2} = \Delta W_n^{j_2},$$

### ۳- شبیه سازی انتگرال های دو گانه $I_{(j_1, j_2), n}$

همانطور که گفته شد در روش عددی (۱۰) انتگرال های دو گانه  $I_{(1, 2), n}$  و  $I_{(2, 1), n}$  وجود دارد که این انتگرال ها را نمی توان به سادگی حل کرد. هدف از این بخش ارائه دو روش برای شبیه سازی انتگرال

$$I_{(j_1, j_2), n} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{s_n}^{s_r} dW_{s_n}^{j_1} dW_{s_r}^{j_2},$$

در حالتی که  $j_1 \neq j_2$  است می باشد.

#### ۳-۱- روش اول برای شبیه سازی انتگرال

$I_{(j_1, j_2), n}$  به ازای  $j_1 \neq j_2$

فرض کنید  $X_t = (X_t^1, X_t^2)$  فرایند وینر دو بعدی باشد که

$$X_t^1 = \int_0^t dW_s^1, \quad (11)$$

$$X_t^2 = \int_0^t X_s^1 dW_s^2, \quad (12)$$

یعنی

$$X_t^2 = \int_0^t \int_0^{s_1} dW_{s_1}^1 dW_{s_2}^2,$$

که همان انتگرال  $I_{(1, 2), n}$  است. فرض کنید  $t_i = 0, \dots, t_N = N\Delta$  با  $\Delta = \frac{t_N - 0}{N}$  افزایش از بازه  $[0, t]$  باشد و  $\Delta W_n^1 = W_{(n+1)\Delta}^1 - W_{n\Delta}^1$  و  $\Delta W_n^2 = W_{(n+1)\Delta}^2 - W_{n\Delta}^2$  با استفاده از روش عددی اویلر ماریاما برای تقریب معادله (۱۱) و روش میلشتاین برای تقریب جواب معادله (۱۲) داریم:

$$Y_{n+1}^1 = Y_n^1 + \Delta W_n^1,$$

$$Y_{n+1}^2 = Y_n^2 + Y_n^1 \Delta W_n^1 + \frac{1}{2} \Delta W_n^1 \Delta W_n^2,$$

$$n = 1, 2, \dots, N-1,$$

که در آن  $Y^1 = Y^2 = 0$  و Cameron و Clark نشان دادند که خطای میانگین مربعی برای روش عددی فوق به صورت زیر است [۱۳]:

**۴- روش‌های عددی برای حل معادلات Affine-RODE**

حالت خاصی از معادلات رندم معادلات رندم با نویز آفین (Affine-RODE) هستند. شکل کلی این معادلات به صورت زیر است:

$$\frac{dx}{dt} = f^{\cdot}(t, x) + \sum_{j=1}^r f^j(t, x) \zeta_t^j. \quad (۱۳)$$

معادله (۱۳) را می‌توان به صورت انتگرالی زیر نوشت:

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t f^{\cdot}(s, x(s)) ds + \sum_{j=1}^r \int_{t_0}^t f^j(s, x(s)) d\zeta_s^j.$$

از آنجایی که این دسته از معادلات دارای جواب تحلیلی نیستند در این بخش به ارائه روش‌های عددی برای حل این دسته از معادلات می‌پردازیم.

عملگرهای  $L^j$  و  $L^{\cdot}$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$B(A_N) := \{ \alpha \in M_r \setminus A_N : -\alpha \in A_N \},$$

که در آن  $-\alpha$  از حذف اولین مؤلفه  $\alpha$  بدست می‌آید. هم‌چنین برای اندیس چندگانه  $\alpha = (j_1, \dots, j_l) \in M_r$

تابع  $F_{\alpha}$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$F_{\alpha} := \begin{cases} F & l=0, \\ L^{j_l} F_{-\alpha} & l \geq 1, \end{cases}$$

با استفاده از بسط تیلور [۱۲] داریم:

$$F(t, x(t)) = \sum_{\alpha \in A_N} F(t, x(t)) I_{\alpha, t, t} + \sum_{\alpha \in B(A_N)} I_{\alpha} [F_{\alpha}(\cdot, x(\cdot))]_{t, t}, \quad (۱۵)$$

بنا به بسط تیلور (۱۵) به ازای  $N = 1, 2, \dots$  می‌توان روش‌های عددی متفاوتی برای حل معادله (۱۳) ارائه داد. اگر مسیرهای نمونه نویز پیوسته یا روی بازه‌های زمانی کراندار، اساساً کراندار باشند روش فوق از مرتبه  $N$  است. در بخش‌های بعد به ارائه روش‌های چندگامی و تک‌گامی مرتبه ۲ برای حل معادله (۱۳) می‌پردازیم.

$$(\mathbb{E} |Y^{\tau}(T) - X_T^{\tau}|^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} T^{\frac{1}{2}} \Delta^{\frac{1}{2}}.$$

حال با استفاده از روش بالا با توجه به اینکه  $Y_{n+1}^{\tau}$  تقریبی برای  $X_T^{\tau}$  می‌باشد، می‌توان انتگرال‌های دوگانه  $I_{(1, \tau), n}$  و  $I_{(\tau, 1), n}$  موجود در رابطه (۱۰) را شبیه‌سازی کرد.

**۲-۳ روش دوم برای شبیه‌سازی انتگرال  $I_{(j_1, j_r), n}$  به ازای  $j_1 \neq j_r$**

فرض کنید  $\Delta = \frac{t - t_0}{n}$  با  $t_0 = 0, \dots, t_n = n\Delta$  افزایش از بازه  $[0, t]$  باشد. روش دیگر برای شبیه‌سازی این انتگرال‌ها به این صورت است که به ازای  $p = 1, 2, \dots$ ،  $I_{(j_1, j_r), n}^p$  را به عنوان تقریبی از  $I_{(j_1, j_r), n}$  در نظر می‌گیرند که [۱۳]

$$I_{(j_1, j_r), n}^p = \Delta_n \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \zeta_{j_1} \zeta_{j_r} + \sqrt{\rho_p} (\mu_{j_1, p} \zeta_{j_1} - \mu_{j_r, p} \zeta_{j_r}) \right) + \frac{\Delta_n}{\sqrt{2}\pi} \sum_{r=1}^p \frac{1}{r} (\zeta_{j_1, r} (\sqrt{2} \zeta_{j_1} + \eta_{j_1, r}) - \tau_{j_r, r} (\sqrt{2} \zeta_{j_r} + \eta_{j_r, r})),$$

که در آن

$$\rho_p = \frac{1}{12} - \frac{1}{2\pi^2} \sum_{r=1}^p \frac{1}{r^2},$$

و  $\zeta_j, \mu_{j, p}, \tau_{j, r}, \eta_{j, r}$  متغیرهای تصادفی مستقل و دارای توزیع نرمال  $N(0, 1)$  هستند و

$$\zeta_j = \frac{1}{\Delta_n} \Delta W_t^j.$$

**قضیه ۴.** [۱۳] فرض کنید  $I_{\alpha}^p$  تقریبی از انتگرال دوگانه  $I_{\alpha}$  باشد که  $\alpha$  چنداندیسی است که  $l(\alpha) \leq 2$  آنگاه ثابت  $C$  وجود دارد به طوری‌که برای  $\Delta$  به اندازه کافی کوچک خطای میانگین مربعی روش فوق به صورت زیر است:

$$\mathbb{E} \left( |I_{\alpha}^p - I_{\alpha}|^2 \right) \leq C \frac{\Delta^2}{p}.$$

$$\begin{aligned}
 & -\sum_{l=1}^r \delta_l \sum_{j=1}^r L^j f^{j,k}(t_{n-l}, x(t_{n-l})) I_{(j),n-l} \Delta_n \\
 & -\sum_{l=1}^r \epsilon_l \sum_{j_1, j_2=1}^r L^{j_1} f^{j_1, k}(t_{n-l}, x(t_{n-l})) \Delta_n I_{(j_1, j_2), n-l} \quad (17)
 \end{aligned}$$

با استفاده از بسط تیلور آفین (۱۵) داریم:

$$\begin{aligned}
 x^k(t_n) &= \\
 x^k(t_{n-1}) &+ f^{j,k}(t_{n-1}, x(t_{n-1})) I_{(\cdot), n-1} \\
 &+ \sum_{j=1}^r f^{j,k}(t_{n-1}, x(t_{n-1})) I_{(j), n-1} \\
 &+ \sum_{j_1, j_2=1}^r I_{(j_1, j_2)} [L^{j_1} f^{j_1, k}(\cdot, x(\cdot))]_{n-1}
 \end{aligned}$$

و همچنین

$$\begin{aligned}
 x^k(t_{n-1}) &= \\
 x^k(t_{n-1}) &+ f^{j,k}(t_{n-2}, x(t_{n-2})) I_{(\cdot), n-2} \\
 &+ \sum_{j=1}^r f^{j,k}(t_{n-2}, x(t_{n-2})) I_{(j), n-2} \\
 &+ \sum_{j_1, j_2=1}^r I_{(j_1, j_2)} [L^{j_1} f^{j_1, k}(\cdot, x(\cdot))]_{n-2}
 \end{aligned}$$

بنا به قانون زنجیره‌ای (۱۴) نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{aligned}
 f^{j,k}(t_n, x(t_n)) &= f^{j,k}(t_{n-1}, x(t_{n-1})) \\
 &+ \sum_{j=1}^r I_{(j)} [f^{j,k}(\cdot, x(\cdot))]_{n-1},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f^{j,k}(t_{n-1}, x(t_{n-1})) &= \\
 f^{j,k}(t_{n-2}, x(t_{n-2})) & \\
 &+ \sum_{j=1}^r I_{(j)} [L^j f^{j,k}(\cdot, x(\cdot))]_{n-2},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f^{j,k}(t_{n-1}, x(t_{n-1})) &= \\
 f^{j,k}(t_{n-2}, x(t_{n-2})) & \\
 &+ \sum_{j_1=1}^r I_{(j_1)} [L^{j_1} f^{j_1, k}(\cdot, x(\cdot))]_{n-2},
 \end{aligned}$$

### ۱-۴- روش‌های چندگامی

هدف از این بخش ارائه روش‌های چندگامی برای حل معادله رندم آفین (۱۳) می‌باشد. فرض کنید  $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n = T$  از بازه  $[0, T]$  باشد و  $\Delta \zeta_n^j = \zeta_{n+1}^j - \zeta_n^j$  و  $\Delta = \max_{i=1, \dots, n} \Delta_i$  و  $\Delta_i = t_{i+1} - t_i$  باشند. شکل کلی روش‌های  $s$ -گامی به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
 \sum_{l=1}^s \alpha_l X_{n-l}^k &= \\
 \sum_{l=1}^s \beta_l f_{n-l}^{j,k} \Delta_n &+ \sum_{l=1}^s \sum_{j=1}^r \gamma_l f_{n-l}^{j,k} I_{(j), n-l} \\
 &+ \sum_{l=1}^s \sum_{\alpha \in A_N \setminus \{(\cdot)\}} \delta_l L^{-\alpha} f_{n-l}^{j,k} I_{\alpha, n-l} \Delta_n \\
 &+ \sum_{l=1}^s \sum_{\alpha \in A_N \setminus \{(\cdot), (\cdot), (j)\}} \epsilon_l L^\alpha id_{n-l}^k I_{\alpha, n-l},
 \end{aligned}$$

که

$$A_N = \{\alpha \in A_N : j_l = \cdot\}.$$

در اینجا حالتی از روش‌های چندگامی را ارائه می‌دهیم که در آن  $s=2$  و  $N=2$  می‌باشد. بنابراین به ازای  $s=2$  و  $d=1, \dots, k$  داریم:

$$\begin{aligned}
 \sum_{l=1}^2 \alpha_l X_{n-l}^k &= \\
 \sum_{l=1}^2 \beta_l f_{n-l}^{j,k} \Delta_n &+ \sum_{l=1}^2 \sum_{j=1}^r \gamma_l f_{n-l}^{j,k} I_{(j), n-l} \quad (16) \\
 &+ \sum_{l=1}^2 \delta_l \sum_{j=1}^r L^j f_{n-l}^{j,k} I_{(j), n-l} \Delta_n \\
 &+ \sum_{l=1}^2 \epsilon_l \sum_{j_1, j_2=1}^r L^{j_1} f_{n-l}^{j_1, k} I_{(j_1, j_2), n-l},
 \end{aligned}$$

خطای گسسته‌سازی روش (۱۶) که با جایگذاری جواب واقعی به جای جواب عددی بدست می‌آید به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
 L_n &:= \\
 &| \sum_{l=1}^2 \alpha_l x^k(t_{n-l}) - \sum_{l=1}^2 \beta_l f^{j,k}(t_{n-l}, x(t_{n-l})) \Delta_n \\
 &- \sum_{l=1}^2 \sum_{j=1}^r \gamma_l f^{j,k}(t_{n-l}, x(t_{n-l})) I_{(j), n-l}
 \end{aligned}$$

آنگاه روش (۱۶) دارای مرتبه همگرایی ۲ است.

### ۲-۴-۲ روش تک‌گامی

در روش ۲-گامی فوق با توجه به اینکه نیاز به دو گام اولیه داریم در این بخش هدف ارائه یک روش تک‌گامی برای محاسبه دو گام اولیه روش می‌باشد با توجه به اینکه روش دوگامی فوق از مرتبه ۲ است برای دو گام اولیه از یک روش تک‌گامی مرتبه ۲ به صورت زیر استفاده می‌کنیم. فرض کنید در بسط تیلور  $N = 2, (15)$  باشد. قرار می‌دهیم  $F(t, x) \equiv x$  آنگاه  $-k$  امین مؤلفه‌ی روش تیلور آفین مرتبه ۲ به ازای  $k = 1, \dots, d$  برای حل معادله (۱۳) به صورت زیر بدست می‌آید:

$$X_{n+1}^k = X_n^k + f_n^{j,k} \Delta_n + \sum_{j=1}^r f_n^{j,k} I_{(j),n} + \frac{1}{\gamma} L f_n^{j,k} \Delta_n^{\gamma} + \sum_{\substack{j_1, j_2=0 \\ j_1 + j_2 \neq 0}}^r L^{j_1} f_n^{j_1, k} id_n^{j_2} I_{(j_1, j_2), n}, \quad (18)$$

که

$$I_{(j),n} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} d\zeta_s^j,$$

$$I_{(j_1, j_2), n} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{t_n}^{s_{\tau}} d\zeta_{s_1}^{j_1} d\zeta_{s_2}^{j_2}.$$

در ادامه به نحوه شبیه سازی انتگرال‌های فوق می‌پردازیم. ابتدا حالتی را در نظر می‌گیریم که نویز  $\zeta_t$  فرایند وینر باشد و سپس فرض می‌کنیم نویز  $\zeta_t$  فرایند پواسون مرکب باشد. بنابراین ابتدا به شبیه‌سازی انتگرال  $I_{(j),n}$  با استفاده از توزیع پواسون مرکب می‌پردازیم سپس آن را برای انتگرال  $I_{(j_1, j_2), n}$  تعمیم می‌دهیم.

### ۳-۴-۳ شبیه‌سازی انتگرال‌های موجود در روابط (۱۸) و (۱۶) با نویز وینر

هدف از این بخش شبیه‌سازی انتگرال‌های موجود در روش‌های عددی (۱۸) و (۱۶) در حالتی که نویز فرایند وینر است می‌باشد. شبیه سازی انتگرال

$$I_{(j_1, j_2), n} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{t_n}^{s_{\tau}} dW_{s_1}^{j_1} dW_{s_2}^{j_2},$$

به ازای  $j_1 \neq j_2, j_1, j_2 \neq 0$  در بخش قبلی بررسی شد.

حال با جایگذاری روابط بالا در معادله خطای گسسته‌سازی موضعی (۱۷) داریم:

$$\begin{aligned} L_n = & |x^k(t_{n-\tau})[\alpha + \alpha_1 + \alpha_{\tau}] \\ & + f^{j,k}(t_{n-\tau}, x(t_{n-\tau})) \Delta_n [2\alpha + \alpha_1 - \beta - \beta_1 - \beta_{\tau}] \\ & + \sum_{j=1}^r f^{j,k}(t_{n-\tau}, x(t_{n-\tau})) [\alpha \cdot I_{(j),n-1} \\ & + (\alpha + \alpha_1) I_{(j),n-\tau} - \gamma \cdot I_{(j),n-1} - \gamma_{\tau} I_{(j),n-\tau}] \\ & - \sum_{j=1}^r L^j f^{j,k}(t_{n-\tau}, x(t_{n-\tau})) [-\alpha \cdot I_{(j),n-\tau} \\ & + \beta \cdot I_{(j),n-\tau} + \beta \cdot I_{(j),n-1} + \beta_1 \cdot I_{(j),n-\tau} \\ & + \delta \cdot I_{(j),n-1} + \delta_{\tau} \cdot I_{(j),n-\tau}] \\ & + \sum_{\substack{j_1, j_2=0 \\ j_1 + j_2 \neq 0}}^r L^{j_1} f^{j_1, k}(t_{n-\tau}, x(t_{n-\tau})) [\alpha \cdot I_{(j_1, j_2), n-\tau} \\ & + \alpha \cdot I_{(j_1, j_2), n-1} + \alpha \cdot I_{(j_1, n-\tau) (j_2, n-1)} \\ & + \alpha \cdot I_{(j_1, j_2), n-\tau} - \epsilon \cdot I_{(j_1, j_2), n-1} - \epsilon_{\tau} \cdot I_{(j_1, j_2), n-\tau} \\ & - \gamma_1 \cdot I_{(j_1, n-\tau) (j_2, n-1)}] + R], \end{aligned}$$

که در آن  $R$  قسمت باقیمانده است که به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} R = & \alpha \cdot \sum_{j_1, j_2, j_{\tau}=0}^r I_{(j_1)} [L^{j_1} L^{j_2} f^{j_1, j_2, k}]_{n-\tau} I_{(j_2, j_{\tau}), n-1} \\ & - \beta \cdot \sum_{j_1, j_2=0}^r I_{(j_1), n-1} [L^{j_1} L^{j_2} f^{j_1, j_2, k}] \Delta \\ & - \delta_1 \cdot \sum_{j_1, j_2=0}^r I_{(j_1)} [L^{j_1} L^{j_2} f^{j_1, j_2, k}]_{n-\tau} \Delta \\ & - \epsilon_1 \cdot \sum_{j_1, j_2, j_{\tau}=0}^r I_{(j_1)} [L^{j_1} L^{j_2} f^{j_1, j_2, k}]_{n-\tau} I_{(j_2, j_{\tau}), n-1} \end{aligned}$$

که از مرتبه  $\Delta^{\tau}$  است. به وضوح اگر ضرایب معادله در شرایط زیر صدق کنند.

$$\zeta_T^j = \begin{cases} \alpha + \alpha_1 + \alpha_{\tau} = 0, \\ \beta + \beta_1 + \beta_{\tau} = 2\alpha + \alpha_1, \\ \gamma_1 = \alpha, \quad \gamma_{\tau} = \alpha + \alpha_1, \\ \delta_1 = -\beta, \quad \delta_{\tau} = \alpha - \beta - \beta_1, \\ \epsilon_1 = \alpha, \quad \epsilon_{\tau} = \alpha + \alpha_1, \end{cases}$$



$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_r \end{pmatrix} = C^T G,$$

با محاسبات ساده می بینیم که

$$c_1^r = \Delta_n, \quad c_1 c_r = \frac{1}{\sqrt{3}} \Delta_n^r, \quad c_1^r + c_r^r = \frac{1}{\sqrt{3}} \Delta_n^r,$$

بنابراین

$$c_1 = \sqrt{\Delta_n},$$

$$c_r = \frac{1}{\sqrt{3}} \Delta_n^r,$$

$$c_r = \frac{1}{\sqrt{12}} \Delta_n^r.$$

پس

$$\begin{aligned} C^T G &= \begin{pmatrix} c_1 & \cdot \\ c_r & c_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_1 \\ G_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\Delta_n} & \cdot \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \Delta_n^r & \frac{1}{\sqrt{12}} \Delta_n^r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_1 \\ G_r \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{\Delta_n} G_1 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \Delta_n^r G_1 + \frac{1}{\sqrt{12}} \Delta_n^r G_r \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

در نتیجه

$$X_1 = I_{(j),n} = \sqrt{\Delta_n} G_1,$$

$$X_r = I_{(j,r),n} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Delta_n^r \left\{ G_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} G_r \right\}.$$

حال بنابر ملاحظه ۱ داریم:

$$\begin{aligned} I_{(j,r),n} &= \Delta W_n^j \Delta_n - I_{(j,\cdot),n} \\ &= \Delta W_n^j \Delta_n - \frac{1}{\sqrt{3}} \Delta_n^r \left\{ G_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} G_r \right\}. \end{aligned}$$

#### ۴-۴- شبیه سازی انتگرال های موجود در روابط (۱۸) و (۱۶) با نویز پواسون مرکب

در مسائل کاربردی لزوماً فرایند نویز، وینر نیست. معادلات کاربردی فراوانی در علوم مختلف وجود دارند که فرایند نویز آن ها پواسون مرکب باشد. در این حالت شبیه سازی انتگرال های تصادفی به سادگی شبیه سازی

در ادامه شبیه سازی انتگرال فوق به ازای حالات دیگر  $j_r, j_r$  بررسی می شود.

#### ۱-۳-۴- شبیه سازی انتگرال های $I_{(j,\cdot),n}$ و

$$I_{(\cdot,j),n}$$

با توجه به اینکه

$$I_{(j,\cdot),n} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{t_n}^{s_r} dW_{s_1} ds_r.$$

است و

$$\mathbb{E}(I_{(j,\cdot),n} I_{(j),n}) = \frac{1}{\sqrt{3}} \Delta_n^r,$$

بنابراین دو انتگرال  $I_{(j),n}$  و  $I_{(j,\cdot),n}$  موجود در رابطه (۱۸) به هم وابسته اند، پس برای شبیه سازی آن ها باید وابستگی آن ها را در نظر بگیریم. حال برای شبیه سازی این انتگرال ها به صورت زیر عمل می کنیم.

فرض کنید  $X_r = I_{(j,r),n}$  و  $X_1 = I_{(j),n}$ . حال ماتریس کوواریانس  $X_1$  و  $X_r$  را به صورت زیر می نویسیم:

$$\Sigma = Cov(X_1, X_r) = \begin{pmatrix} \mathbb{E}(X_1^r) & \mathbb{E}(X_1 X_r) \\ \mathbb{E}(X_r X_1) & \mathbb{E}(X_r^r) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \Delta_n & \frac{1}{\sqrt{3}} \Delta_n^r \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \Delta_n^r & \frac{1}{3} \Delta_n^r \end{pmatrix},$$

هدف یافتن  $X_1$  و  $X_r$  به گونه ای است که ماتریس کوواریانس آن ها به صورت فوق باشد. بدین منظور به صورت زیر عمل می کنیم:

$$\begin{aligned} \Sigma &= C^T C = \begin{pmatrix} c_1 & \cdot \\ c_r & c_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 & c_r \\ \cdot & c_r \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_1^r & c_1 c_r \\ c_1 c_r & c_r^r + c_r^r \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

حال فرض کنید  $G_1$  و  $G_r$  دو متغیر مستقل دارای توزیع نرمال  $N(0,1)$  باشند آنگاه  $C^T G$  که  $G = (G_1, G_r)^T$  دارای توزیع  $N(\cdot, \Sigma)$  است پس کافی است که ضرایب ماتریس را بیابیم و قرار دهیم

تعریف می‌شود:

$$\zeta_i^j = \sum_{i=1}^{N_i} Y_i,$$

که در آن  $Y_i$  مقدار  $i$ -امین پرش است که دارای توزیع یکنواخت می‌باشد. اگر به ازای هر  $i$  مقدار  $Y_i = 1$  آنگاه فرایند پواسون مرکب همان فرایند پواسون است.

#### ۱-۴-۴- شبیه‌سازی انتگرال $I_{(j),n}$

در این بخش هدف اصلی شبیه‌سازی این انتگرال‌های تصادفی با استفاده از فرایند پواسون مرکب می‌باشد. برای شبیه‌سازی این انتگرال به صورت زیر عمل می‌کنیم: با توجه به اینکه نویز فرایند پواسون مرکب است بنابراین بنا به تعریف ۲  $\zeta_i^j$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\zeta_i^j = \sum_{i=1}^{N_i} Y_i,$$

که در آن  $Y_i$  مقدار  $i$ -امین پرش است. ابتدا نحوه تولید فرایند پواسون مرکب را شرح می‌دهیم. بدین منظور ابتدا بازه زمانی  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$  را با استفاده از فرایند پواسون تولید می‌کنیم که نقش زمان پرش‌های فرایند پواسون مرکب را دارند. کد متلب آن به صورت زیر است [۷]:

```
T (۱) = ۰;
uv = rand (۱, n);
for kk = ۱:n
    Kv (kk + ۱) = kk ;
    T (kk + ۱) = T (kk) - log (uv (kk)) / landa;
end
```

که  $landa$  ثابت پواسون است. خروجی برنامه فوق یعنی  $T_i$ ‌ها نقش زمان پرش‌ها را دارند. حال فرایند پواسون مرکب را که تابع پله‌ای است به صورت زیر شبیه‌سازی می‌کنیم:

ابتدا با استفاده از توزیع یکنواخت  $n+1$  متغیر در بازه  $[0, 1]$  تولید می‌کنیم که نقش اندازه پرش‌های تولید شده را دارند که با  $Y_i$  نشان می‌دهیم. حال فرایند پواسون

آنها با نویز وینر نیست. هدف از این بخش شبیه‌سازی انتگرال‌های

$$I_{(j),n} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} d\zeta_s^j,$$

$$I_{(j_1, j_2), n} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{t_n}^{s_{j_1}} d\zeta_{s_{j_1}}^{j_1} d\zeta_{s_{j_2}}^{j_2},$$

در حالتی که نویز  $\zeta_t^j$  فرایند پواسون مرکب است می‌باشد. بنابراین ابتدا به شبیه‌سازی انتگرال  $I_{(j),n}$  با استفاده از توزیع پواسون مرکب می‌پردازیم سپس آن را برای انتگرال  $I_{(j_1, j_2), n}$  تعمیم می‌دهیم.

**تعریف ۱:** فرایند پواسون  $X_t$  تعداد پیشامدهای مستقلی است که در بازه  $[0, t]$  اتفاق می‌افتد که احتمال آن به صورت زیر است:

$$\mathbb{P}\{X_t = k\} = (\lambda t)^k \frac{e^{-\lambda t}}{k!}, \quad k = 1, 2, \dots$$

که در آن  $\lambda$  یک عدد حقیقی مثبت است که ثابت پواسون نامیده می‌شود.

فرض کنید  $T_1$  زمان اولین پیشامد و  $N_t$  تعداد پیشامدهایی است که تا زمان  $t$  اتفاق می‌افتند باشند. تابع توزیع در زمان  $T_1$  به صورت زیر است:

$$F_1(t) = \mathbb{P}\{T_1 \leq t\} = \mathbb{P}\{N_t \geq 1\} \\ = \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda t)^k \frac{e^{-\lambda t}}{k!} = 1 - e^{-\lambda t},$$

که تابعی پیوسته و اکیدا صعودی است پس معکوس‌پذیر است. بنابراین می‌توان  $T_1$  را به صورت زیر شبیه‌سازی کرد:

$$T_1 = F_1^{-1}(t) = \frac{\log(1-U)}{V} = \frac{\log(V)}{\lambda},$$

که در آن  $U$  و  $V$  دارای توزیع یکنواخت روی  $[0, 1]$  هستند.

**تعریف ۲:** فرایند پواسون مرکب یک فرایند پواسون با پرش‌هایی با مقدار تصادفی است که به صورت زیر

مرکب به صورت زیر است. در شکل ۱ یک توزیع پواسون مرکب نشان داده شده است.

حال به شبیه سازی انتگرال  $I_{(j),n} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} d\zeta_s^j$  می پردازیم. اگر در بازه  $[t_n, t_{n+1})$  هیچ پرشی وجود نداشته باشد انتگرال به صورت زیر شبیه سازی می شود:

$$I_{(j),n} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} d\zeta_s^j = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \sum_{i=1}^{N_{t_n}} Y_i ds = \sum_{i=1}^{N_{t_n}} Y_i \Delta_n,$$

حال اگر یک پرش مثلاً  $T_k$  در بازه  $[t_n, t_{n+1})$  وجود داشته باشد آنگاه شبیه سازی انتگرال به صورت زیر است:

$$I_{(j),n} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} d\zeta_s^j = \int_{t_n}^{T_k} \sum_{i=1}^{N_{T_k-1}} Y_i ds + \int_{T_k}^{t_{n+1}} \sum_{i=1}^{N_{T_k}} Y_i ds \\ = \sum_{i=1}^{N_{T_k-1}} Y_i (T_k - t_n) + \sum_{i=1}^{N_{T_k}} Y_i (t_{n+1} - T_k),$$

در حالتی که بیش از یک پرش در بازه  $[t_n, t_{n+1})$  وجود داشته باشد فاصله را به تعداد مناسبی زیر بازه تقسیم می کنیم و نتیجه بدست می آید.

$$\zeta_{T_1}^j = \sum_{i=1}^{N_{T_1}} Y_i = Y_1 + \dots + Y_{N_{T_1}},$$

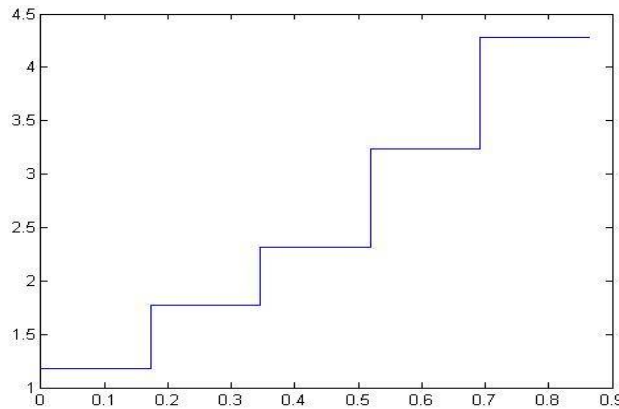
یعنی مجموع اندازه پرشهایی که تا زمان  $T_1$  اتفاق افتاده اند. مثلاً اگر در بازه  $[t, t_r]$  پرش های  $T_1, T_r, T_r$  اتفاق افتاده باشند و  $t_r < T < t_r$  باشد آنگاه

$$\zeta_T^j = \sum_{i=1}^{N_T} Y_i = Y_1 + Y_r + Y_r + Y_T,$$

که  $Y_T$  مقدار پرشی است که در زمان  $T$  ام اتفاق افتاده است.

با توجه به اینکه به ازای زمان های  $T_1 < T < T_r$  مقدار پرش  $Y_1$  را داریم و به ازای زمان  $T_r < T < T_r$  مقدار پرش  $Y_1 + Y_r$  را داریم پس  $\zeta_T^j$  تابع پله ای به صورت زیر است:

$$\zeta_T^j = \begin{cases} Y_1 & T_1 \leq T < T_r, \\ Y_1 + Y_r & T_r \leq T < T_r, \\ \vdots & \\ \vdots & \\ Y_1 + \dots + Y_{n+1} & T_n \leq T < T_{n+1}. \end{cases}$$



شکل ۱. فرایند پواسون مرکب با  $\lambda = 5$  و مقادیر پرش ها با توزیع یکنواخت روی بازه  $[0, 1]$

که  $\theta_1$  نامنفی و  $\theta_\tau, \theta_\nu$  مثبت‌اند و به ازای ثابت مثبت  $\delta$ .

$$\delta(Y_t) = \delta \cdot \left( 1 - \frac{\nu}{\pi} \tan^{-1} Y_t \right),$$

$$\delta(Z_t) = \delta \cdot \left( 1 - \frac{\nu}{\pi} \tan^{-1} Z_t \right).$$

به وضوح  $Y_t$  جواب صریح معادله زیر است:

$$Y_t = \frac{\theta_1}{\theta_\nu} + \left( Y - \frac{\theta_1}{\theta_\nu} \right) e^{-\theta_\nu t} + \int_0^t e^{-\theta_\nu(t-u)} dW_u.$$

در معادله فوق  $V$  تعداد ویروس،  $I$  سلول‌های عفونی و  $T$  سلول‌های هدف و  $\epsilon$  ویروس مؤثر،  $p$  میزان تولید ویروس جدید،  $c$  میزان زدودگی ویروس،  $\beta$  میزان سرایت دوباره ویروس،  $p_I$  میزان تکثیر از سلول‌های عفونی،  $\delta$  میزان سلول‌های از دست رفته،  $\gamma$  میزان سلول‌های ترمیم شده و  $T_{max}$  ماکزیمم تعداد سلول‌ها هستند.

معادله دیفرانسیل تصادفی برداری معادل آن به صورت زیر است:

$$d \begin{pmatrix} V_t \\ I_t \\ T_t \\ Y_t \\ Z_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-\epsilon)pI_t - cV_t + \delta(Z_t) \\ \beta T_t V_t + \frac{p_I}{T_{max}}(T_{max} - T_t - I_t)I_t - \delta(Y_t)I_t \\ \frac{\gamma}{T_{max}}(T_{max} - T_t - I_t) \\ \theta_1 - \theta_\nu Y_t \\ \cdot \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \theta_\nu \\ \cdot \end{pmatrix} dW_t + \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Y_t \end{pmatrix} dW_t^*$$

در این مثال طول گام را  $\Delta = 0.04$  را در نظر بگیرید و پارامترها به صورت  $\epsilon = 0.3$ ،  $c = 6$ ،  $p_I = 0.2$ ،  $\beta = 0.42$ ،  $\gamma = 1.05$ ،  $\delta = 0.42$  و  $T_{max} = 3 \times 10^6$  و تعداد ویروس‌های اولیه  $V_0 = 10^7$ ، سلول‌های عفونی اولیه  $I_0 = 1/9 \times 10^6$ ، سلول‌های هدف اولیه  $T_0 = 1/1 \times 10^6$

## ۲-۴-۴- شبیه‌سازی انتگرال $I_{(j_i, j_\tau), n}$

در این بخش نحوه شبیه‌سازی انتگرال  $I_{(j_i, j_\tau), n}$  موجود در رابطه (۱۸) و (۱۶) را برای حالتی که فرایند نوین پواسون مرکب است بیان می‌کنیم. برای شبیه‌سازی این انتگرال فرض کنیم  $\zeta_t^{j_i}$  و  $\zeta_t^{j_\tau}$  دو فرایند پواسون مرکب مستقل با پرش‌هایی در  $T_i$  و  $T_i$  روی بازه‌ی  $(t_n, t_{n+1})$  باشند که مقدار  $t_i - t_i$  امین و  $t_i - t_i$  امین پرش به ترتیب برابر  $S_i^{j_i} = \sum_{i=1}^{N_{T_i}} Y_i$  و  $S_i^{j_\tau} = \sum_{i=1}^{N_{T_i}} Y_i$  است. فرض کنید  $t_n < T_i < T_i < t_{n+1}$  بنا براین

$$\begin{aligned} I_{(j_i, j_\tau), n} &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_t^{s_\tau} d\zeta_{s_1}^{j_i} d\zeta_{s_2}^{j_\tau} \\ &= \int_{t_n}^{T_i} \int_{t_n}^{s_\tau} S_{i-1}^{j_i} S_{i-1}^{j_\tau} ds_2 ds_1 + \int_{T_i}^{T_i} \int_{t_n}^{s_\tau} S_i^{j_i} S_{i-1}^{j_\tau} ds_2 ds_1 \\ &= \frac{1}{\nu} S_{i-1}^{j_i} S_{i-1}^{j_\tau} (T_i - t_n)^\nu + \frac{1}{\nu} S_i^{j_i} S_{i-1}^{j_\tau} (T_i - T_i)^\nu \\ &\quad + \frac{1}{\nu} S_i^{j_i} S_i^{j_\tau} (t_{n+1} - T_i)^\nu. \end{aligned}$$

با فرایندی مشابه نحوه تولید انتگرال  $I_{(j), n}$  که در بخش قبل بیان شد به راحتی می‌توان تمامی انتگرال‌های دوگانه را شبیه‌سازی کرد.

## ۵- مثال عددی

در این بخش به ارائه مثال‌هایی که کاربرد بسیار زیادی در پزشکی دارند می‌پردازیم.

### مثال ۱-۵- معادله زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= (1-\epsilon)pI - cV + \delta(Z_t), \\ \frac{dI}{dt} &= \beta TV + \frac{p_I}{T_{max}}(T_{max} - T - I)I - \delta(Y_t)I, \\ \frac{dT}{dt} &= \frac{\gamma}{T_{max}}(T_{max} - T - I), \end{aligned}$$

که در آن  $Y_t$  جواب معادله دیفرانسیل تصادفی ایتو زیر است:

$$dY_t = (\theta_1 - \theta_\nu Y_t) dt + \theta_\nu dW_t,$$

که در آن  $\alpha_x$  و  $\alpha_y$  بیان کننده میزان غلظت ژن های  $X$  و  $Y$  و  $a$  و  $c$  آستانه فعالسازی اتوماتیک،  $b$  و  $d$  آستانه سرکوب متقابل و  $\lambda_x$  و  $\lambda_y$  پروتئین از دست رفته هستند. برای شبیه سازی فرض کنید  $\alpha_x$  و  $\alpha_y$  دو فرایند پواسون مرکب مستقل از هم باشند. فرض کنید در شبیه سازی  $a=c=0.25$  و  $b=d=0.4$ ،  $x=y=10$ ،  $\lambda_x=\lambda_y=1/25$  باشند و مقادیر پرش دو فرایند پواسون مرکب دارای توزیع یکنواخت روی  $[0, 0.5]$  و برای هر دو فرایند پارامتر ثابت  $\lambda=5$  باشد. شکل ۳ نمودار تقریبی از مدل را با روش تیلور معادلات رندم آفین مرتبه ۱ نشان می دهد که در آن نقطه چین و خط چین به ترتیب نشان دهنده مقدار تقریبی غلظت پروتئین  $x$  و  $y$  هستند.

معادلات رندم و شبیه سازی انتگرال ها را با روش Clark و Cameron نشان می دهند.

همچنین  $\beta = \frac{\delta I}{(TV)}$  و  $p = \frac{cV}{I}$  هستند.

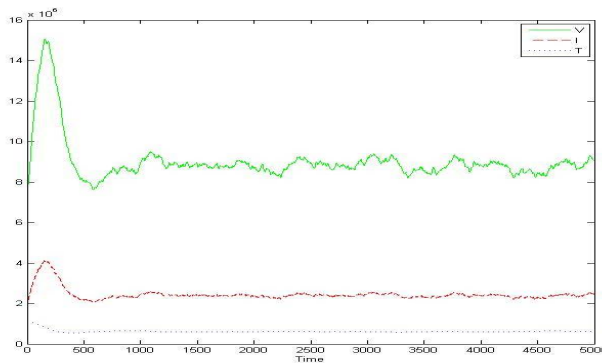
فرض کنید  $\theta_1=1$ ،  $\theta_2=2$  و  $\theta_3=1$  باشند.

در شکل ۲ خط و خط چین و نقطه چین به ترتیب تعداد ویروس ها، سلول های عفونی، سلول های هدف را با استفاده از روش عددی مرتبه ۱ برای حل معادلات رندم و شبیه سازی انتگرال ها را با روش Clark و Cameron نشان می دهند.

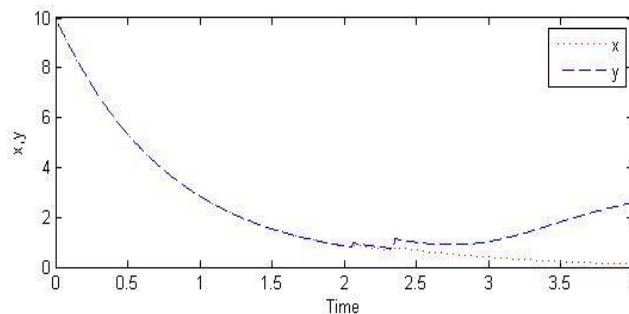
**مثال ۲-۵-** در این مثال به حل عددی یک مدل toggle switch با دو پارامتر مستقل می پردازیم. فرض کنید  $X$  و  $Y$  دو ژن متفاوت و  $x$ ،  $y$  غلظت محصولات پروتئینی مربوط به این دو ژن باشد. معادله آفین رندم زیر را در نظر بگیرید [۱۴]:

$$\frac{dx}{dt} = \left( \alpha_x + \frac{x^f}{a^f + x^f} \right) \left( \frac{y^f}{b^f + y^f} \right) - \lambda_x x,$$

$$\frac{dy}{dt} = \left( \alpha_y + \frac{y^f}{c^f + y^f} \right) \left( \frac{d^f}{d^f + x^f} \right) - \lambda_y y,$$



شکل ۲. میزان رشد ویروس با شبیه سازی Clark و Cameron



شکل ۳. تقریب مدل با روش تیلور معادلات رندم آفین مرتبه ۱

## فهرست منابع

- [10] A. Jentzen, P.E. Kloeden, Pathwise convergence higher order numerical schemes for random ordinary differential equations, Proceedings of the Royal Society A, 463: 2929-2944 (2007) .
- [11] P. E. Kloeden, A. Neuenkirch, The pathwise convergence of approximation schemes for stochastic differential equations, LMS Journal of Computation and Mathematics, 10: 235-253 (2007) .
- [12] P. E. Kloeden, P .E. Platen, Numerical Solution of Stochastic Differential Equations, Springer, Berlin (1992).
- [13] P.E. Kloeden, E. Platen, Numerical Solution of Stochastic Differential Equations, Springer, Berlin (1992).
- [14] B. Verd, A. Crombach, J. Jaeger, Classification of transient in a time-dependent toggle switch model, BMC Systems Biology, 8(43): 1-19 (2014).
- [1] L. Arnold, Random Dynamical Systems, Springer-Verlag, Berlin (1997).
- [2] Y. Asai, Y. Herrmann, P. E. Kloeden, Stable integrations of stiff random ordinary differential equations, Stochastic Analysis and Applications, 31: 293-313.
- [3] Y. Asai, P. E. Kloeden, Multi- step methods for random ODEs driven by Itô diffusions, Computational and Applied Mathematics, 294: 210-224 (2016).
- [4] Y. Asai, P. E. Kloeden, Numerical schemes for random ODEs via stochastic differential equations, Communications in Applied Analysis, 17 :521-528 (2013).
- [5]. Y. Asai, P.E. Kloeden, Numerical schemes for random ODEs with affine noise, Numerical Algorithms, 72: 155-171 (2016).
- [6] H. Bunke, Gewöhnliche Differentialgleichungen mit zufälligen Parametern, Akademie- Verlag, Berlin (1972).
- [7] F. B. Hanson, Applied Stochastic Processes and Control for Jump-Diffusions Modeling, Analysis and Computation, SIAM, Philadelphia (2007).
- [8] A. Jentzen, P.E. Kloeden, Taylor Approximations of stochastics partial differential equations, CBMS Lecture series, SIAM, Philadelphia (2011).
- [9] A. Jentzen, P.E. Kloeden, Taylor schemes for random ordinary differential equations, BIT Numerical Mathematics, 49: 113-140 (2009) .