دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال پنجم، شماره نوزدهم، مرداد و شهریور ۱۳۹۸
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

پژوهش‌های نوین در ریاضی

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

وجود جواب‌های یک معادله دیفرانسیل کسری جدید p- لاپلاسین با اثر ضربه‌ای

نعمت‌اله نیامرادی[1*]، عبدالرحمن رازانی[2]

[1] گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه رازی، کرمانشاه، ایران
[2] گروه ریاضی محض، دانشکده علوم پایه، دانشگاه بین‌المللی امام خمینی(ره)، قزوین، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۷/۰۸/۲۷ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۷/۱۱/۱۰

چکیده

در این مقاله، وجود جواب‌ها برای یک کلاس از معادلات دیفرانسیل کسری p-لاپلاسین جدید با اثر ضربه‌ای را مورد مطالعه قرار خواهیم داد. با استفاده از قضیه نقطه بحرانی و روش‌های تغییراتی نشان خواهیم داد که این معادله دیفراتسل ضربه‌ای بی‌نهایت جواب دارد.

واژه‌های کلیدی: معادله دیفرانسیل کسری، ضربه، جواب، روش‌های تغییراتی.

*. عهده‌دار مکاتبات: Email: neamat80@yahoo.com

۱– مقدمه

اخیراً معادلات دیفرانسیل کسری مورد علاقه محققین زیادی قرار گرفته است. چون که در هر دو زمینه نظریه حسابان کسری و کاربردهای آن در علوم مختلفی چون فیزیک، مکانیک، مهندسی و ... توسعه یافته است که برای مطاله بیشتر می‌توان به مراجع [۱و۲و۳] رجوع کرد. معادلات دیفرانسیل با اثر ضربه‌ای از فرایندهای دینامیکی با جهش‌های ناپیوسته رخ خواهد داد. برای پیشینه‌ای از نظریه و کاربردهای آن می‌توان به مراجع [۴و۵و۶و۷و۸و۹] مراجعه نمود. محققین زیادی وجود جواب‌های معادلات دیفرانسی کسری ضربه‌ای با استفاده از نظریه نقطه ثابت، نظریه درجه توپولوژیکی، روش جواهای بالا و پایین و روش‌های تکراری یکنوا در [۱۰و۱۱و۱۲و۱۳و۱۴و۱۵و۱۶و۱۷] مورد مطالعه و بررسی قرار داده‌اند. برای مثال، بونانو و همکارانش در [۱۵] و رودریگوز–لوپز و ترشین در [۱۶] معادله دیفرانسیل کسری با مقدار مرزی دریکله زیر با اثر ضربه‌ای را مورد مطالعه قرار داده‌اند:

$$\begin{cases} {}_tD_T^{\alpha}\left({}_0^cD_t^{\alpha}u(t)\right) + a(t)u(t) \\ = \lambda f\left(t,u(t)\right), t \neq tj, \quad \text{a.e. } t \in [0,T], \\ \Delta\left({}_tD_T^{\alpha-1}\left({}_0^cD_t^{\alpha}u\right)(t_j)\right) \\ = \mu I_j\left(u(tj)\right) \quad j = 1,2,\cdots,n \\ u(0) = u(T) = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

که $\lambda,\mu \in (0,+\infty)$ دو پارامتر هستند. آن‌ها وجود جواب‌ها را برای معادله (۱) با استفاده از روش‌های تغییراتی و قضیه سه نقطه بحرانی بونانو و مارانو [۱۸] بدست آورده‌اند.

در [۱۹] با استفاده از روش‌های تغییراتی، نویسندگان وجود و تعدد جواب‌ها را برای معادله دیفرانسیل کسری p–لاپلاسین زیر مطالعه کرده‌اند:

$$\begin{cases} {}_tD_b^{\alpha}\left(\frac{1}{a(t)^{p-2}}\Phi_p\left(a(t)\ {}_aD_t^{\alpha}u(t)\right)\right) \\ = \lambda\left(fu(t,u(t),v(t)) + gu(t,u(t),v(t))\right), \quad t \in [a,b], \\ {}_tD_b^{\beta}\left(\frac{1}{b(t)^{p-2}}\Phi_p\left(b(t)\ {}_aD_t^{\beta}v(t)\right)\right) \\ = \lambda\left(fv(t,u(t),v(t)) + gv(t,u(t),v(t))\right), \quad t \in [a,b] \\ u(a) = u(b) = 0,\ \ v(a) = v(b) = 0, \end{cases} \qquad (2)$$

که $0 < \alpha,\beta \leq 1$ و λ یک پارامتر حقیقی ناصفر است و $a(t),b(t) \in L^{\infty}([a,b])$ و $\Phi_p(x) = |x|^{p-2}x, p > 1$ و $f,g \in C^1\left([a,b] \times \mathbb{R}^2; \mathbb{R}\right)$.

بنابراین، با توجه به مقاله‌های بالا، هدف ما در این مقاله مطالعه وجود جواب‌ها برای معادله دیفرانسیل کسری ضربه‌ای زیر می‌باشد:

$$\begin{cases} {}_tD_T^{\alpha}\left(\frac{1}{h(t)^{p-2}}\Phi_p\left(h(t)\ {}_0D_t^{\alpha}u(t)\right)\right) \\ +a(t)\Phi_p(u(t)) = f\left(t,u(t)\right), t \neq tj, \text{a.e. } t \in [0,T], \\ \Delta\left({}_tD_T^{\alpha-1}\left(\frac{1}{h(t_j)^{p-2}}\Phi_p\left(h(t_j)\ {}_0D_t^{\alpha}u(t_j)\right)\right)\right) \\ = I_j\left(u(tj)\right), \quad j = 1,2,\cdots,l \\ u(0) = u(T) = 0 \end{cases} \qquad (3)$$

که $\alpha \in (\frac{1}{2},1]$ و $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_l <$ و $t_{l+1} = T$ و $\Phi_p(x) = |x|^{p-2}x, p > 1$ و $h(t) \in L^{\infty}([0,T])$ با $h_0 = \min_{t\in[0,T]} h(t)$ و $a(t) \in C([0,T])$ با $0 < a_1 \leq a(t) \leq a_2$ که a_1,a_2 ثابت‌های مثبت هستند و $f:[0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ و $I_j:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ و $j = 1,2,\cdots,l$ توابع پیوسته می‌باشند و

$$\begin{aligned} &\Delta\left({}_tD_T^{\alpha-1}\left(\frac{1}{h(t_j)^{p-2}}\Phi_p\left(h(t_j)\ {}_0D_t^{\alpha}u(t_j)\right)\right)\right) \\ &= {}_tD_T^{\alpha-1}\left(\frac{1}{h(t_j^+)^{p-2}}\Phi_p\left(h(t_j^+)\ {}_0D_t^{\alpha}u(t_j^+)\right)\right) \\ &- {}_tD_T^{\alpha-1}\left(\frac{1}{h(t_j^-)^{p-2}}\Phi_p\left(h(t_j^-)\ {}_0D_t^{\alpha}u(t_j^-)\right)\right), \\ &{}_tD_T^{\alpha-1}\left(\frac{1}{h(t_j^+)^{p-2}}\Phi_p\left(h(t_j^+)\ {}_0D_t^{\alpha}u(t_j^+)\right)\right) \\ &= \lim_{t\to t_j^+} {}_tD_T^{\alpha-1}\left(\frac{1}{h(t)^{p-2}}\Phi_p\left(h(t)\ {}_0D_t^{\alpha}u(t)\right)\right), \\ &{}_tD_T^{\alpha-1}\left(\frac{1}{h(t_j^-)^{p-2}}\Phi_p\left(h(t_j^-)\ {}_0D_t^{\alpha}u(t_j^-)\right)\right) \\ &= \lim_{t\to t_j^-} {}_tD_T^{\alpha-1}\left(\frac{1}{h(t)^{p-2}}\Phi_p\left(h(t)\ {}_0D_t^{\alpha}u(t)\right)\right). \end{aligned}$$

برای بیان نتایج اصلی به شرایط و فرض‌های زیر نیاز داریم:

(I1) ثابت‌های $\gamma_j > 0$ برای $j = 1,2,\cdots,l$ موجود باشند به طوری که $|I_j(s)| \leq \gamma_j|s|^{p-1}$ برای هر $s \in \mathbb{R}$.

(I2) $p\int_0^u I_j(s)ds - I_j(u)u \geq 0$ و $\int_0^u I_j(s)ds \geq 0$ برای هر $u \in R$ و $j = 1,2,\cdots,l$.

(I3) ثابت‌های $a_j, b_j > 0$ و $\delta_j \in [1,p)$ برای $j = 1,2,\cdots,l$ موجود باشند به‌طوری که $|I_j(s)| \le a_j + b_j|s|^{\delta_j - 1}$ برای هر $s \in \mathbb{R}$.

(H1) $\theta(t) \in L^1([0,T];\mathbb{R}) \cap L^\infty([0,T];\mathbb{R})$ موجود باشد به طوری که $|f(t,u)| \le \theta(t)|u|^{p-1}$ برای تقریباً همه جا $t \in [0,T]$ و هر $u \in \mathbb{R}$ با

$$\|\theta(t)\|_{L^1} < \frac{2}{pK_p}\left(\frac{T^{\alpha-\frac{1}{p}}}{\Gamma(\alpha)h_0^{\frac{1}{p}}((\alpha-1)q+1)^{\frac{1}{q}}}\right)^{-p} - \frac{2}{pK_p}\sum_{j=1}^{l}\gamma_j$$

که K_p در اثبات قضیه ۱ تعریف شده است.

(H2)

$$\liminf_{\Gamma\to+\infty} \sup_{\omega\in\mathbb{R},|\omega|=\Gamma}\left[-\int_0^T F(t,\omega)dt + \sum_{j=1}^{l}\int_0^{\omega} I_j(s)ds\right] = -\infty$$

که $F(t,u) = \int_0^u f(t,x)dx$.

(H3) قرار دهید:

$$\Delta_{h_0,p} = \left(\frac{T^{\alpha-\frac{1}{p}}}{\Gamma(\alpha)h_0^{\frac{1}{p}}((\alpha-1)q+1)^{\frac{1}{q}}}\right)^p,$$

و

$$\liminf_{\Gamma\to+\infty} \sup_{\vartheta\in R,|\vartheta|=\Gamma}\left[\frac{p-1}{p}\left(\frac{K_p^p\|\theta(t)\|_{L^1}^p|\vartheta|^{p(p-1)}\Delta_{h_0,p}}{p\left[\frac{1}{p}-\frac{1}{2}K_p\|\theta(t)\|_{L^1}\Delta_{h_0,p}-\frac{1}{p}\Delta_{h_0,p}\sum_{j=1}^{l}\gamma_j\right]}\right)^{\frac{1}{p-1}} + \int_0^T F(t,\vartheta)dt + \sum_{j=1}^{l}\int_0^{\vartheta} I_j(s)d + \frac{2^p-1}{p}|\vartheta|^p\sum_{j=1}^{l}\gamma_j\right] < +\infty.$$

(H4) $0 \le \varpi < p$ و یک تابع نامنفی $\Upsilon \in L^{\frac{p}{p-\varpi}}([0,T])$ موجود باشند که

$$pF(t,u) - uf(t,u) \le \Upsilon(t)|u|^{\varpi}$$

برای تقریباً همه جا $t \in [0,T]$ و $|u|$ به اندازه کافی بزرگ.

(H5) $\lim_{|u|\to\infty}\frac{F(t,u)}{|u|^p} = +\infty$ یکنواخت روی $t \in [0,T]$.

(H6) $f(t,u)$ و $I_j(u)$ برای $j = 1,2,\cdots,l$ توابع فرد نسبت به u برای هر $t \in [0,T]$ باشند.

قضیه ۱. فرض کنید $a(t) = 0$ و *(I1)* و *(H1)* و *(H2)* و *(H3)* برقرار باشند. آنگاه معادله (۳) بی‌نهایت جواب دارد.

قضیه ۲. فرض کنید *(I2)* و *(I3)* و *(H4)* و *(H5)* و *(H6)* برقرار باشند. آن‌گاه معادله (۳) بی‌نهایت جواب دارد.

این مقاله به صورت زیر مرتب شده است. در بخش ۱، تعاریف و خواص پایه‌ای ارائه می شود و در بخش ۳، اثبات قضایای اصلی(قصیه ۱و قضیه ۲) آورده می‌شود.

بخش ۲: (مقدماتی از حسابان کسری)

در این بخش مقدماتی که برای اثبات قضایای اصلی لازم است را بیان می‌کنیم. برای راحتی خوانندگان تعاریف لازم از نظریه حسابان کسری بیان می‌شود. برای مطالعات اضافی در مورد حسابان کسری به مراجع [۲۰و۲۱و۲۲] می‌توان رجوع کرد.

تعریف ۱. (مشتقات کسری ریمان–لیویل چپ و راست [۲۰و۲۱]). فرض کنید f یک تابع تعریف شده روی $[a,b]$ باشد. مشتقات کسری ریمان–لیویل چپ و راست از مرتبه $0 \le \gamma < 1$ برای تابع f را به ترتیب با ${}_aD_t^{\gamma}f(t)$ و ${}_tD_b^{\gamma}f(t)$ نمایش داده می‌شود و به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$${}_aD_t^{\gamma} f(t) = \frac{d}{dt}\, {}_aD_t^{\gamma-1} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)}\frac{d}{dt}\left(\int_a^t (t-s)^{-\gamma} f(s)ds\right), \qquad (4)$$

$${}_tD_b^{\gamma} f(t) = -\frac{d}{dt}\, {}_tD_b^{\gamma-1} f(t) = -\frac{1}{\Gamma(1-\gamma)}\frac{d}{dt}\left(\int_t^b (s-t)^{-\gamma} f(s)ds\right). \qquad (5)$$

برای هر $t \in [a,b]$.

تعریف ۲. (مشتقات کسری کاپوتو چپ و راست [۲۰]). فرض کنید $0 < \gamma < 1$ و $f \in AC([a,b])$. آن‌گاه

مشتقات کسری کاپوتو چپ و راست از مرتبه γ برای تابع f را به ترتیب با ${}_{a}^{C}D_{t}^{\gamma}f(t)$ و ${}_{t}^{C}D_{b}^{\gamma}f(t)$ نمایش داده می‌شود و به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$
\begin{aligned}
{}_{a}^{C}D_{t}^{\gamma} f(t) &= {}_{a}D_{t}^{\gamma-1} f'^{(t)} \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \left(\int_{a}^{t} (t - s)^{-\gamma} f'^{(s)} ds \right), \qquad (6)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}_{t}^{C}D_{b}^{\gamma} f(t) &= - {}_{t}D_{b}^{\gamma-1} f'^{(t)} \\
&= -\frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \left(\int_{t}^{b} (s - t)^{-\gamma} f'(s) ds \right), \qquad (7)
\end{aligned}
$$

که $t \in [a,b]$.

توجه داریم هنگامی که $\gamma = 1$ باشد ${}_{a}^{C}D_{t}^{1}f(t) = f'(t)$ و ${}_{t}^{C}D_{b}^{1}f(t) = -f'(t)$ و ${}_{a}^{C}D_{t}^{0}f(t) = {}_{t}^{C}D_{b}^{0}f(t) = f(t)$ برای $t \in [a,b]$.

برای هر $t \in [0,T]$ ثابت و $1 < r < \infty$ قرار دهید:

$$
\|u\|_{L^r([0,t])} = \left(\int_0^t |u(\xi)|^r d\xi \right)^{\frac{1}{r}},
$$

$$
\|u\|_{L^r} = \left(\int_0^T |u(\xi)|^r d\xi \right)^{\frac{1}{r}},
$$

$$
\|u\|_{\infty} = \max_{t\in[0,T]} |u(t)|.
$$

تعریف ۳. فرض کنید $0 < \alpha \leq 1$ و $1 < p < \infty$. فضای مشتق کسری $E_0^{\alpha,p}$ تعریف شده است با بستار $C_0^{\infty}([0,T])$ نسبت به نرم

$$
\|u\|_{\alpha,p} = \left(\int_0^T |u(t)|^p dt + \int_0^T h(t) \left| {}_{0}D_{t}^{\alpha} u(t) \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (8)
$$

به سادگی می‌توان بررسی کرد که اگر $a \in C([0,T])$ با $0 < a_1 \leq a(t) \leq a_2$، آنگاه یک نرم معادل در $E_0^{\alpha,p}$ به صورت زیر داده می‌شود:

$$
\|u\|_{\alpha,a,p} = \left(\int_0^T \alpha(t) |u(t)|^p dt + \int_0^T h(t) \left| {}_{0}D_{t}^{\alpha} u(t) \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (9)
$$

توجه داریم برای هر $u \in E_0^{\alpha,p}$ چون $u(0) = u(T) = 0$، آنگاه ${}_{0}D_{t}^{\alpha} u(t) = {}_{0}^{C}D_{t}^{\alpha} u(t)$.

لم ۱. ([۲۲]) فرض کنید $0 < \alpha \leq 1$ و $1 < p < \infty$. فضای مشتق کسری $E_0^{\alpha,p}$ فضای باناخ انعکاسی و جدایی پذیر است.

لم زیر برای معادل بودن نرم‌ها در $E_0^{\alpha,p}$ مفید می‌باشد

لم ۲. ([۲۲]) فرض کنید $0 < \alpha \leq 1$ و $1 < p < \infty$. برای هر $u \in E_0^{\alpha,p}$ داریم

$$
\|u\|_{L^p} \leq \frac{T^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \left\| {}_{0}D_{t}^{\alpha} u \right\|_{L^p}. \qquad (10)
$$

بعلاوه، اگر $\alpha > \frac{1}{2}$ و $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$، آن‌گاه

$$
\|u\|_{\infty} \leq \frac{T^{\alpha-\frac{1}{p}}}{\Gamma(\alpha)\left((\alpha-1)q+1\right)^{\frac{1}{q}}} \left\| {}_{0}D_{t}^{\alpha} u \right\|_{L^p}. \qquad (11)
$$

توجه ۱. با توجه به لم ۲ داریم

$$
\|u\|_{L^p} \leq \frac{T^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1) h_0^{\frac{1}{p}}} \left(\int_0^T |u(t)|^p dt + \int_0^T h(t) \left| {}_{0}D_{t}^{\alpha} u(t) \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}},
$$

$$
\|u\|_{L^p} \leq \frac{T^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1) (\min\{a_0, h_0\})^{\frac{1}{p}}} \left(\int_0^T a(t) |u(t)|^p dt + \int_0^T h(t) \left| {}_{0}D_{t}^{\alpha} u(t) \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \quad (12)
$$

بعلاوه، اگر $\alpha > \frac{1}{p}$ و $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ آن‌گاه

$$
\|u\|_{\infty} \leq \frac{T^{\alpha-\frac{1}{p}}}{\Gamma(\alpha) h_0^{\frac{1}{p}} \left((\alpha-1)q+1\right)^{\frac{1}{p}}} \left(\int_0^T |u(t)|^p dt + \int_0^T h(t) \left| {}_{0}D_{t}^{\alpha} u(t) \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}},
$$

$$
\|u\|_{\infty} \leq \frac{T^{\alpha-\frac{1}{p}}}{\Gamma(\alpha) (\min\{a_0, h_0\})^{\frac{1}{p}} \left((\alpha-1)q+1\right)^{\frac{1}{p}}} \left(\int_0^T a(t) |u(t)|^p dt + \int_0^T h(t) \left| {}_{0}D_{t}^{\alpha} u(t) \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \quad (13)
$$

مشابه اثبات گزاره ۳،۳ در [۲۲] نتیجه زیر داریم:

لم ۳. اگر دنباله $\{u_n\}$ به طور ضعیف به u در $E_0^{\alpha,p}$ همگرا باشد، یعنی $u_n \rightharpoonup u$. آن‌گاه $u_n \to u$ در $C([0,T])$، به عبارت دیگر $||u_n - u||_\infty \to 0$ هنگامی‌که $n \to \infty$.

اکنون ثابت می‌کنیم که $E_0^{\alpha,p}$ به‌طور فشرده در $C([0,T])$ نشانده می‌شود.

لم ۴. فرض کنید $1 < p < \infty$ و $\alpha > \frac{1}{2}$، آن‌گاه $E_0^{\alpha,p}$ به طور فشرده در $C([0,T])$ نشانده می‌شود.

اثبات. برای $1 < p < \infty$ و $\alpha > \frac{1}{2}$، با توجه به (۱۱) نشاندن $E_0^{\alpha,p}$ در $C([0,T])$ پیوسته است. حال فرض کنید $\{u_n\}$ یک دنباله کراندار در $E_0^{\alpha,p}$ باشد. از این‌که $E_0^{\alpha,p}$ یک فضای انعکاسی است لذا $\{u_n\}$ داری یک زیردنباله به طور ضعیف همگرا دارد که آن را برای سادگی با $\{u_n\}$ نمایش می‌دهیم. لذا $u_n \rightharpoonup u$ به طور ضعیف در $E_0^{\alpha,p}$. سپس بنابر لم ۳، $u_n \to u$ در $C([0,T])$، به عبارت دیگر $||u_n - u||_\infty \to 0$ هنگامی‌که $n \to \infty$. بنابراین نشاندن فشرده می‌شود. ■

لم ۵. (لم ۱۲ در [۱۹]) فرض کنید $1 < p < \infty$ و $\alpha > \frac{1}{2}$، آن‌گاه $E_0^{\alpha,p}$ به طور فشرده در $L^p([0,T],\mathbb{R})$ نشانده می‌شود.

بخش ۳: روش تغییراتی و اثبات نتایج اصلی

لم ۶ (انتگرال جزء به جزء)

$$\int_a^b \left[{}_aD_t^{-\alpha}u(t)\right] v(t)dt = \int_a^b u(t)\ {}_tD_b^{-\alpha}\, v(t)dt\,, \quad \alpha > 0, \qquad (14)$$

برقرار است برای $u \in L^p([a,b])$ و $v \in L^q([a,b])$ و

$$p \geq 1\,, q \geq 1 \ \text{ and } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} < 1 + \alpha \text{ or}$$
$$p \neq 1, q \neq 1 \text{ and } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \alpha.$$

با ضرب معادله (۳) در $v \in E_0^{\alpha,p}$ و انتگرال‌گیری روی $[0,T]$ داریم

$$\int_0^T {}_tD_T^\alpha\left(\frac{1}{h(t)^{p-2}}\Phi_p\left(h(t)\ {}_0D_t^\alpha u(t)\right)\right).v(t)dt + \int_0^T \alpha(t)\Phi_p(u(t))v(t)dt = \int_0^T f(t,u(t))v(t)dt, \quad (15)$$

با توجه به تعاریف ۱و۲ و لم ۶ می‌توان عبارت زیر را بدست آورد:

$$\begin{aligned}
&\int_0^T {}_tD_T^\alpha\left(\frac{1}{h(t)^{p-2}}\Phi_p\left(h(t)\ {}_0D_t^\alpha u(t)\right)\right).v(t)dt\\
&=\sum_{j=1}^{l}\int_{t_j}^{t_{j+1}} {}_tD_T^\alpha\left(\frac{1}{h(t)^{p-2}}\Phi_p\left(h(t)\ {}_0D_t^\alpha u(t)\right)\right).v(t)dt\\
&=-\sum_{j=1}^{l}\int_{t_j}^{t_{j+1}} v(t)dt\left[{}_tD_T^{\alpha-1}\left(\frac{1}{h(t)^{p-2}}\Phi_p\left(h(t)\ {}_0D_t^\alpha u(t)\right)\right)\right]\\
&=-\sum_{j=1}^{l}\left\{{}_tD_T^{\alpha-1}\left(\frac{1}{h(t_{j+1}^-)^{p-2}}\Phi_p\left(h(t_{j+1}^-)\ {}_0D_t^\alpha u(t_{j+1}^-)\right)\right)v(t_{j+1}^-)\right.\\
&\left.-\ {}_tD_T^{\alpha-1}\left(\frac{1}{h(t_j^+)^{p-2}}\Phi_p\left(h(t_j^+)\ {}_0D_t^\alpha u(t_j^+)\right)\right)v(t_j^+)\right\}\\
&+\sum_{j=1}^{l}\int_{t_j}^{t_{j+1}}\left[{}_tD_T^{\alpha-1}\left(\frac{1}{h(t)^{p-2}}\Phi_p\left(h(t)\ {}_0D_t^\alpha u(t)\right)\right)\right]v'(t)dt\\
&=\sum_{j=1}^{l}\left\{{}_tD_T^{\alpha-1}\left(\frac{1}{h(t_j^+)^{p-2}}\Phi_p\left(h(t_j^+)\ {}_0D_t^\alpha u(t_j^+)\right)\right)v(t_j^+)\right.\\
&\left.-\ {}_tD_T^{\alpha-1}\left(\frac{1}{h(t_{j+1}^-)^{p-2}}\Phi_p\left(h(t_{j+1}^-)\ {}_0D_t^\alpha u(t_{j+1}^-)\right)\right)v(t_{j+1}^-)\right\}\\
&+\sum_{j=1}^{l}\int_{t_j}^{t_{j+1}}\frac{1}{h(t)^{p-2}}\Phi_p\left(h(t)\ {}_0D_t^\alpha u(t)\right)\ {}_0D_t^{\alpha-1}v'(t)dt\\
&=\sum_{j=1}^{l}\left\{{}_tD_T^{\alpha-1}\left(\frac{1}{h(t_j^+)^{p-2}}\Phi_p\left(h(t_j^+)\ {}_0D_t^\alpha u(t_j^+)\right)\right)v(t_j^+)\right.\\
&\left.-\ {}_tD_T^{\alpha-1}\left(\frac{1}{h(t_{j+1}^-)^{p-2}}\Phi_p\left(h(t_{j+1}^-)\ {}_0D_t^\alpha u(t_{j+1}^-)\right)\right)v(t_{j+1}^-)\right\}\\
&+\sum_{j=1}^{l}\int_{t_j}^{t_{j+1}}\frac{1}{h(t)^{p-2}}\Phi_p\left(h(t)\ {}_0D_t^\alpha u(t)\right)\ {}_0D_t^{\alpha}v(t)dt\\
&=\sum_{j=1}^{l}\left\{{}_tD_T^{\alpha-1}\left(\frac{1}{h(t_j^+)^{p-2}}\Phi_p\left(h(t_j^+)\ {}_0D_t^\alpha u(t_j^+)\right)\right)v(t_j^+)\right.\\
&\left.-\ {}_tD_T^{\alpha-1}\left(\frac{1}{h(t_{j+1}^-)^{p-2}}\Phi_p\left(h(t_{j+1}^-)\ {}_0D_t^\alpha u(t_{j+1}^-)\right)\right)v(t_{j+1}^-)\right\}\\
&+\sum_{j=1}^{l}\int_{t_j}^{t_{j+1}}\frac{1}{h(t)^{p-2}}\Phi_p\left(h(t)\ {}_0D_t^\alpha u(t)\right)\ {}_0D_t^{\alpha}v(t)dt\\
&=\sum_{j=1}^{l}\left\{{}_tD_T^{\alpha-1}\left(\frac{1}{h(t_j^+)^{p-2}}\Phi_p\left(h(t_j^+)\ {}_0D_t^\alpha u(t_j^+)\right)\right)v(t_j^+)\right.
\end{aligned}$$

$$- {}_tD_T^{\alpha-1}\left(\frac{1}{h(t_{j+1}^-)^{p-2}}\Phi_p\left(h(t_{j+1}^-)\,{}_0D_t^{\alpha}u(t_{j+1}^-)\right)\right) v(t_{j+1}^-)\Bigg\}$$
$$+\int_0^T \frac{1}{h(t)^{p-2}}\Phi_p\big(h(t)\,{}_0D_t^{\alpha}u(t)\big)\,{}_tD_T^{\alpha} v(t)dt. \quad (16)$$

بنابراین، با بدست آوردن نتیجه مشابه برای قسمت دوم معادله (۳) می‌توانیم تعریف جواب ضعیف برای معادله (۳) ارائه دهیم.

تعریف ۴. $u \in E_0^{\alpha,p}$ جواب ضعیف معادله (۳) است هرگاه

$$\int_0^T \frac{1}{h(t)^{p-2}}\Phi_p(h(t)\,{}_0D_t^{\alpha}u(t))\,{}_0D_t^{\alpha} v(t)dt + \int_0^T a(t)\Phi_p(u(t))\,v(t)dt + \sum_{j=1}^{l} I_j\left(u(t_j)\right)v(t_j) = \int_0^T f(t,u(t))v(t)dt,$$

برای هر $v \in E_0^{\alpha,p}$ برقرار باشد.
تابعک $J: E_0^{\alpha,p} \to \mathbb{R}$ که به صورت زیر تعریف می‌شود را در نظر بگیرید:

$$J(u) = \frac{1}{p}\int_0^T h(t)|\,{}_0D_t^{\alpha}u(t)|^p\,dt + \frac{1}{p}\int_0^T a(t)|u(t)|^p + \sum_{j=1}^{l}\int_0^{u(t_j)} I_j(s)ds - \int_0^T F\big(t,u(t)\big)dt, \quad (17)$$

برای هر $(t,u) \in [0,T] \times R$.
با استفاده از پیوستگی f و I_j برای $j = 1,2,\cdots,l$ ثابت می‌شود که J روی $E_0^{\alpha,p}$ مشتق‌پذیر است و

$$\begin{aligned} &< J'(u,v) > \\ &= \int_0^T \frac{1}{h(t)^{p-2}}\Phi_p(h(t)\,{}_0D_t^{\alpha}u(t))\,{}_0D_t^{\alpha}v(t)dT \\ &+ \int_0^T a(t)\,\Phi_p\left(u(t)\right)v(t) \\ &+ \int_0^T I_j\left(u(t_j)\right)v(t_j) - \int_0^T f\big(t,u(t)\big)v(t)dt, \quad (18) \end{aligned}$$

برای هر $u,v \in E_0^{\alpha,p}$.
اکنون قضیه ۱ را ثابت می‌کنیم.

اثبات قضیه ۱. برای اثبات این قضیه، در (۱۷) و (۱۸) قرار می‌دهیم $a(t) = 0$ و برای $u \in E_0^{\alpha,p}$ قرار دهید $\overline{u} = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)dt$ و $\tilde{u} = u(t) - \overline{u}$. بنابراین $E_0^{\alpha,p} = \mathbb{R} \oplus \widetilde{E_0^{\alpha,p}}$ که

$$\widetilde{E_0^{\alpha,p}} = \left\{u \in E_0^{\alpha,p} : \int_0^T u(t)dt = 0\right\}$$

اثبات این قضیه را به سه گام زیر تقسیم می‌کنیم:

گام اول. در این گام نشان خواهیم داد که اگر $J(u_n)$ و $\{\overline{u}_n\}$ برای دنباله $\{u_n\} \subset E_0^{\alpha,p}$ کراندار باشند آن‌گاه $\{u_n\}$ در $E_0^{\alpha,p}$ کراندار است. برای ای کار قرار دهید:

$$K_p = \begin{cases} 2 & if\ 0 < p-1 \le 1, \\ 2^{p-1} & if\ p-1 > 1, \end{cases}$$

از این‌که برای $a,b > 0$ داریم

$$(a+b)^{p-1} \le K_p\,(a^{p-1} + b^{p-1}),$$

آن‌گاه باتوجه به نامساوی بالا، *(H1)* و (۱۳) بدست می‌آید

$$\begin{aligned} &\left|\int_0^T \big(F(t,u(t))dt - F(t,\overline{u})\big)dt\big)\right| \\ &= \left|\int_0^T \int_0^1 \frac{d}{d\tau} F\big(t,\overline{u} + \tau\tilde{u}(t)\big)d\tau\, dt\right| \\ &= \left|\int_0^T \int_0^1 f\big(t,\overline{u} + \tau\tilde{u}(t)\big).\,\tilde{u}(t)d\tau\, dt\right| \\ &\le \left|\int_0^T \int_0^1 \theta(t)|\overline{u} + \tau\tilde{u}(t)|^{p-1}.\,|\tilde{u}(t)|\, d\tau\, dt\right| \\ &\le K_p\|\theta\|_{L^1}\,|\overline{u}|^{p-1}\,\|\tilde{u}\|_\infty + \frac{1}{2}K_p\|\theta\|_{L^1}\,\|\tilde{u}\|_\infty^p \\ &\le K_p\|\theta\|_{L^1}\,|\overline{u}|^{p-1}\,\frac{T^{\alpha-\frac{1}{p}}}{\Gamma(\alpha)h_0^{\frac{1}{p}}\big((\alpha-1)q+1\big)^{\frac{1}{q}}}\,\|\tilde{u}\|_{\alpha.p} \\ &+ \frac{1}{2}\,K_p\|\theta\|_{L^1}\left(\frac{T^{\alpha-\frac{1}{p}}}{\Gamma(\alpha)h_0^{\frac{1}{p}}\big((\alpha-1)q+1\big)^{\frac{1}{q}}}\right)^p\|\tilde{u}\|_{\alpha.p} \quad (19) \end{aligned}$$

که نتیجه می‌دهد

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{1}{p}\int_0^T h(t)|\,{}_0D_t^{\alpha}\big(\overline{u} + \tilde{u}(t)\big)|^p\,dt \\ &+ \sum_{j=1}^{l}\int_0^{\overline{u}+\tilde{u}(t_j)} I_j(s)ds - \int_0^T F\big(t,\overline{u} + \tilde{u}(t)\big)dt \\ &= \frac{1}{p}\int_0^T h(t)|\,{}_0D_t^{\alpha}\big(\tilde{u}(t)\big)|^p\,dt \\ &+ \sum_{j=1}^{l}\int_0^{\overline{u}+\tilde{u}(t_j)} I_j(s)ds - \int_0^T F\big(t,\overline{u} + \tilde{u}(t)\big)dt \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{p}\int_0^T h(t)\left|{}_0D_t^{\alpha}(\tilde{u}(t))\right|^p dt \\
&\qquad + \sum_{j=1}^{l}\left(\int_0^{\overline{u}} + \int_0^{\overline{u}+\tilde{u}(t_j)}\right)I_j(s)ds \\
&- \int_0^T (F(t,u(t))dt - F(t,\overline{u}))dt - \int_0^T F(t,\overline{u})dt \\
&\geq \frac{1}{p}\|\tilde{u}\|_{\alpha,p}^p \\
&- K_p\|\theta\|_{L^1}|\overline{u}|^{p-1}\frac{T^{\alpha-\frac{1}{p}}}{\Gamma(\alpha)h_0^{\frac{1}{p}}((\alpha-1)q+1)^{\frac{1}{q}}}\|\tilde{u}\|_{\alpha,p} \\
&- \frac{1}{2}K_p\|\theta\|_{L^1}\left(\frac{T^{\alpha-\frac{1}{p}}}{\Gamma(\alpha)h_0^{\frac{1}{p}}((\alpha-1)q+1)^{\frac{1}{q}}}\right)^p\|\tilde{u}\|_{\alpha,p}^p \\
&\qquad - \int_0^T F(t,\overline{u})dt \\
&- \sum_{j=1}^{l}\int_0^{\overline{u}} I_j(s)ds - \sum_{j=1}^{l}\int_{\overline{u}}^{\overline{u}-\tilde{u}(t_j)}\gamma_j|s|^{p-1}ds \\
&\geq \frac{1}{p}\|\tilde{u}\|_{\alpha,p}^p \\
&- K_p\|\theta\|_{L^1}|\overline{u}|^{p-1}\frac{T^{\alpha-\frac{1}{p}}}{\Gamma(\alpha)h_0^{\frac{1}{p}}((\alpha-1)q+1)^{\frac{1}{q}}}\|\tilde{u}\|_{\alpha.p} \\
&- \frac{1}{2}K_p\|\theta\|_{L^1}\left(\frac{T^{\alpha-\frac{1}{p}}}{\Gamma(\alpha)h_0^{\frac{1}{p}}((\alpha-1)q+1)^{\frac{1}{q}}}\right)^p\|\tilde{u}\|_{\alpha,p}^p \\
&\qquad - \int_0^T F(t,\overline{u})dt \\
&- \sum_{j=1}^{l}\int_0^{\overline{u}} I_j(s)ds - \frac{2^p-1}{p}|\overline{u}|^p\sum_{j=1}^{l}\gamma_j - \frac{1}{p}\|\tilde{u}\|_{\infty}^p\sum_{j=1}^{l}\gamma_j \\
&\geq \left[\frac{1}{p} - \frac{1}{2}K_p\|\theta\|_{L^1}\left(\frac{T^{\alpha-\frac{1}{p}}}{\Gamma(\alpha)h_0^{\frac{1}{p}}((\alpha-1)q+1)^{\frac{1}{q}}}\right)^p\right. \\
&\left. - \frac{1}{p}\sum_{j=1}^{l}\gamma_j\left(\frac{T^{\alpha-\frac{1}{p}}}{\Gamma(\alpha)h_0^{\frac{1}{p}}((\alpha-1)q+1)^{\frac{1}{q}}}\right)^p\right]\|\tilde{u}\|_{\alpha,p}^p \\
&- K_p\|\theta\|_{L^1}|\overline{u}|^{p-1}\frac{T^{\alpha-\frac{1}{p}}}{\Gamma(\alpha)h_0^{\frac{1}{p}}((\alpha-1)q+1)^{\frac{1}{q}}}\|\tilde{u}\|_{\alpha,p} \\
&- \int_0^T F(t,\overline{u})dt - \sum_{j=1}^{l}\int_0^{\overline{u}} I_j(s)ds - \frac{2^p-1}{p}|\overline{u}|^p\sum_{j=1}^{l}\gamma_j \\
&\geq -\frac{p-1}{q}\left(\frac{K_p^p\|\theta\|_{L^1}^p|\overline{u}|^{p(p-1)}\Delta_{h_0,p}}{p\left[\frac{1}{p} - \frac{1}{2}K_p\|\theta\|_{L^1}\Delta_{h_0,p} - \frac{1}{p}\Delta_{h_0,p}\sum_{j=1}^{l}\gamma_j\right]}\right)^{\frac{1}{p-1}} \\
&- \int_0^T F(t,\overline{u})dt - \sum_{j=1}^{l}\int_0^{\overline{u}} I_j(s)ds - \frac{2^p-1}{p}|\overline{u}|^p\sum_{j=1}^{l}\gamma_j \\
&\qquad := g(\overline{u}). \quad (20)
\end{aligned}
$$

بنابراین، اگر $J(u_n)$ و $\{\overline{u}_n\}$ برای دنباله $\{u_n\} \subset E_0^{\alpha,p}$ کراندار باشند آن‌گاه $\{u_n\}$ در $E_0^{\alpha,p}$ کراندار است.

گام دوم. یک دنباله $\{Z_n\}$ موجود است به طوری که $Z_n \to \infty$ و $lim_{n\to\infty}\left[sup_{\omega\in\mathbb{R},|\omega|=Z_n}J(\omega)\right] = -\infty$.

برای اثبات این گام، چون که برای هر $\omega \in \mathbb{R}$،

$$
J(u) = \sum_{j=1}^{l}\int_0^{\omega} I_j(s)ds - \int_0^T F(t,\omega)dt.
$$

آن‌گاه با استفاده از *(H2)* نتیجه فوق حاصل می‌شود.

گام سوم. یک دنباله $\{Z_n\}$ موجود است به‌طوری که $Z_n \to \infty$ و

$$
M := lim_{n\to\infty}\left[inf_{\vartheta\in\mathbb{R},|\vartheta|=z_n,\tilde{u}\in\widetilde{E_0^{\alpha,p}}}J(\vartheta+\tilde{u})\right] > -\infty.
$$

برای اثبات این، فرض کنید که $z > 0$ و $\vartheta \in \mathbb{R}$، $|\vartheta| = z$ و $\tilde{u} \in \widetilde{E_0^{\alpha,p}}$. با توجه به گام اول و جایگزینی $\tilde{u}$ با ϑ داریم:

$$
\begin{aligned}
&\inf_{\vartheta\in\mathbb{R},|\vartheta|=z,\tilde{u}\in\widetilde{E_0^{\alpha,p}}} J(\vartheta+\tilde{u}) \\
&\geq \inf_{\vartheta\in\mathbb{R},|\vartheta|=z,\tilde{u}\in\widetilde{E_0^{\alpha,p}}}\left\{\left[\frac{1}{p} - \frac{1}{2}K_p\|\theta\|_{L^1}\left(\frac{T^{\alpha-\frac{1}{p}}}{\Gamma(\alpha)h_0^{\frac{1}{p}}((\alpha-1)q+1)^{\frac{1}{q}}}\right)^P\right.\right. \\
&\left. - \frac{1}{p}\sum_{j=1}^{l}\gamma_j\left(\frac{T^{\alpha-\frac{1}{p}}}{\Gamma(\alpha)h_0^{\frac{1}{p}}((\alpha-1)q+1)^{\frac{1}{q}}}\right)^p\right]\|\tilde{u}\|_{a,p}^p \\
&- K_p\|\theta\|_{L^1}|\vartheta|^{p-1}\frac{T^{\alpha-\frac{1}{p}}}{\Gamma(\alpha)h_0^{\frac{1}{p}}((\alpha-1)q+1)^{\frac{1}{q}}}\|u\|_{\alpha.p} \\
&\left. - \int_0^T F(t,\vartheta)dt - \sum_{j=1}^{l}\int_0^{\vartheta} I_j(s)ds - \frac{2^p-1}{p}|\vartheta|^p\sum_{j=1}^{l}\gamma_j\right\} \\
&\geq \inf_{\vartheta\in\mathbb{R},|\vartheta|=z}\left\{-\frac{p-1}{p}\left(\frac{K_p^p\|\theta\|_{L^1}^p|\vartheta|^{p(p-1)}\Delta_{h_0,p}}{p\left[\frac{1}{p} - \frac{1}{2}K_p\|\theta\|_{L^1}\Delta_{h_0,p} - \frac{1}{p}\Delta_{h_0,p}\sum_{j=1}^{l}\gamma_j\right]}\right)^{\frac{1}{p-1}}\right. \\
&\left. - \int_0^T F(t,\vartheta)dt - \sum_{j=1}^{l}\int_0^{\vartheta} I_j(s)ds - \frac{2^p-1}{p}|\vartheta|^p\sum_{j=1}^{l}\gamma_j\right\}.
\end{aligned}
$$

بنابراین این ادعا توسط شرط *(H3)* بدست می‌آید.

گام چهارم. ادعا می‌کنیم که یک دنباله $\{\varrho_n\}$ وجود دارد به طوری که $\{\varrho_n\}$ یک نقطه مینیمم موضعی برای J است. همچنین ثابت می‌کنیم که $\{\varrho_n\}$ نقطه مینیمم سراسری است و ϱ_n یک نقطه بحرانی برای J در $E_0^{\alpha,p}$ است. برای اثبات این ادعا، قرار دهید

$$\Lambda_n = \{u \in E_0^{\alpha,p}: |\overline{u}| \le z_n\},\quad \forall n \in \mathbb{N},$$

با

$$\partial\Lambda_n = \{a\in\mathbb{R}: |a| = z_n\} + \widetilde{E_0^{\alpha,p}},\quad \forall n\in\mathbb{N},$$

با توجه به گام اول، چون که $g(\overline{u})$ روی Λn کراندار است آن‌گاه $J(u)$ روی Λn از پایین کراندار است. قرار دهید

$$\chi_n := \inf_{u\in\Lambda_n} J(u),\quad \forall n\in\mathbb{N}. \qquad (21)$$

فرض کنید که $\{u_k\}$ یک دنباله مینیمم کننده برای $J(u)$ در Λn باشد به طوری که $J(u_k)\to\chi_n$ هنگامی‌که $k\to\infty$. بنابراین با توجه به گام اول داریم که $\{u_k\}$ در $E_0^{\alpha,p}$ کراندار است. بنابر لم ۱، یک زیر دنباله $\{u_k\}$ و $\varrho_n \in E_0^{\alpha,p}$ به طوری که $u_k\to\varrho_n$. بنابراین، بنا بر قضیه مازور و اینکه Λn یک زیرمجموعه بسته از $E_0^{\alpha,p}$ است، $\varrho_n\in\Lambda n$. از اینکه J نیم پیوسته پایینی دنباله‌ای ضعیف است آن‌گاه

$$\chi_n = \inf_{u\in\Lambda_n} J(u) \le J(\varrho_n) \le \lim_{k\to\infty} J(u_k) = \chi_n.$$

بنابراین داریم $\chi_n = inf_{u\in\Lambda n} J(u) = J(\varrho_n)$ و سپس J دارای یک نقطه مینیمم موضعی ϱ_n است.
اکنون ثابت می‌کنیم که $\varrho_n \notin \partial\Lambda n$. با انتخاب یک زیر دنباله $\{z_{l_n}\}$ از $\{z_n\}$ به‌طوری که $0<Z_n<z_{l_n}$ برای $n\in\mathbb{N}$ قرار دهید $r_1\in(-\infty, M)$، با توجه به گام‌های دوم و سوم می‌توان $N_0\in\mathbb{N}$ را طوری انتخاب کرد که

$$\begin{aligned} J(\vartheta_{l_n}) = \inf_{u\in\Lambda_{l_n}} J(u) &= \inf_{|\overline{u}|\in z_{l_n}} J(u) \\ &\le \inf_{|\overline u|\in Z_n} J(u) \\ &\le \inf_{|\overline u|\in Z_n} J(\overline u) \\ &\le \sup_{|\omega|\in Z_n} J(\omega) < r_1, \end{aligned}$$

و

$$\inf_{u\in\partial\Lambda_{l_n}} J(u) > r_1,$$

برای هر $n>N_0$، آن‌گاه داریم $\vartheta_{l_n}\notin\partial\Lambda n$. با ترکیب عبارات بالا و (۲۱) داریم $J'(\vartheta_{l_n})=0$. بنابراین، $\vartheta_n\in\mathring{\Lambda}_n$ لذا ϑ_n یک نقطه بحرانی از J در $E_0^{\alpha,p}$ است.

اینجا اثبات کامل می‌شود. ■

برای اثبات قضیه ۲ به تعاریف، لم و قضایای زیر نیاز داریم.

تعریف ۵. فرض کنید که X یک فضای باناخ باشد و $\varphi\in C^1(X,\mathbb{R})$، گوییم φ در شرط (C) صدق می‌کند هرگاه برای هر $\{u_n\}\subset X$، $\{u_n\}$ دارای یک زیردنباله همگرا باشد اگر $J(u_n)$ کراندار باشد و $(1+\|u_n\|)\|J'(u_n)\|\to 0$ هنگامی‌که $n\to\infty$.
فرض کنید که X یک فضای باناخ باشد و $X=\overline{\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} X_j}$ که X_j زیر فضاهای متناهی البعد از X باشند. برای هر $k\in\mathbb{N}$ قرار دهید $Y_k=\bigoplus_{j=1}^k X_j$ و $Z_k=\overline{\bigoplus_{j=k}^\infty X_j}$ و $S_\rho=\{u\in E_0^{\alpha,p}: \|u\|_{\alpha,a,p}\le\rho\}$.
اکنون قضیه فانتاین را معرفی می‌کنیم.

قضیه ۳. (گزاره ۱،۲ از [۲۳]). فرض کنید X,Y_k,Z_k آن‌هایی هستند که در بالا تعریف شده باشند. فرض کنید $J\in C(X,\mathbb{R})$ که در شرط (C) صدق می‌کند و $J(-u)=J(u)$ برای هر $k\in\mathbb{N}$، $\rho_k>r_k>0$ وجود دارند به طوری که

$$b_k := \inf_{u\in Z_k\cap S_{r_k}} J(u)\to+\infty \text{ as } k\to\infty;$$
$$a_k := max_{u\in Y_k\cap S_{\rho_k}} J(u)\le 0.$$

آن‌گاه J دارای یک دنباله از نقاط بحرانی u_n می‌باشد به طوری که $J(u_n)\to+\infty$ هنگامی‌که $n\to\infty$.
اکنون یک پایه متعامد یکه $\{e_j\}_{j=1}^n$ در $E_0^{\alpha,p}$ انتخاب می‌کنیم. برای $j,k\in\mathbb{N}$ قرار دهید $X_j=span\{e_j\}$. سپس $Z_k=Y_k^\perp$ و $E_0^{\alpha,p}=\overline{\bigoplus_{j\in\mathbb{N}}X_j}$ با $\dim X_j<\infty$.

لم ۷. فرض کنید *(I2)* و *(H4)* و *(H5)* و *(H6)* برقرار باشند. آن‌گاه تابعک J در شرط (C) صدق می‌کند.
اثبات. فرض کنید $\{u_n\}\subset E_0^{\alpha,p}$ یک (C) دنباله از J باشد، بنابراین اگر $J(u_k)$ کراندار است و $\|J'(u_k)\|\to 0$ هنگامی‌که $n\to\infty$. آن‌گاه ثابت $\zeta>0$ به طوری که

$$|J(u_k)|\le\zeta,\quad \|J'(u_k)\|\le\zeta,\quad \forall k\in\mathbb{N}. \qquad (22)$$

با توجه به (H4)، ثابت مثبت $R > 0$ موجود است به طوری که

$$u f(t,u) - pF(t,u) \geq -\Upsilon(t)|u|^{\varpi} \qquad (23)$$

برای هر $|u| > R$ و تقریباً همه جا برای $t \in [0,T]$. قرار دهید $C_R := \frac{1}{p}\max_{u\in[-R,R]}\int_0^T |f(t,u)u - pF(t,u)|dt$. بنابر (۱۲)، (۲۲)، (۲۳)، (I2) و نامساوی هولدر برای k به اندازه بزرگ ثابت می‌شود که

$$\begin{aligned}
\zeta + \|u\|_{\alpha,a,p} &\geq J(u_k) - \frac{1}{p} < J'(u_k), u_k > \\
&= \frac{1}{p}\int_0^T \big(f(t,u_k(t))u_k(t) - F(t,u_k(t))\big)dt \\
&\quad + \frac{1}{p}\sum_{j=1}^{n}\left(p\int_0^{u_k(t_j)} I_j(s)ds - I_j\big(u_k(t_j)\big)u_k(t_j)\right) \\
&\geq \frac{1}{p}\int_{\{t\in[0,T]:|u_k(t)|\leq R\}} \big(f(t,u_k(t))u_k(t) - F(t,u_k(t))\big)dt \\
&\quad -\frac{1}{p}\int_{\{t\in[0,T]:|u_k(t)|>R\}} \Upsilon(t)|u_k(t)|^{\varpi}dt \\
&\geq -\frac{1}{p}\|\Upsilon\|_{L^{\frac{p}{p-\varpi}}}\|u_k\|_{L^p}^{\varpi} - \\
&\geq -\frac{1}{p}\|\Upsilon\|_{L^{\frac{p}{p-\varpi}}}\left(\frac{T^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)h_0^{\frac{1}{p}}}\right)^{\varpi}\|u\|_{\alpha,a,p}^{\varpi} - C_R
\end{aligned}$$

از این‌که $0 \leq \varpi < p$، آن‌گاه $\{u_n\}$ در $E_0^{\alpha,p}$ کراندار است. چون‌که $E_0^{\alpha,p}$ به طور فشرده در $C([0,T])$ نشانده می‌شود بنابراین با محاسبات استاندارد، $\{u_n\}$ دارای یک زیردنباله به طور قوی همگراست و بنابراین J در شرط (C) صدق می‌کند.■

اکنون قضیه ۲ را ثابت می‌کنیم.

اثبات قضیه ۲. شرط (H6) نتیجه می‌دهد که J زوج است. قرار دهید

$$\beta_k := \sup_{u\in Z_k\cap S_1}\|u\|_{L^p}.$$

بنابر لم ۴ و روش مشابه در لم ۳،۸ در [۲۴] داریم $\beta_k \to 0$ هنگامی‌که $k \to \infty$. بنابر (۱۳)، (I4) و (H4) و نامساوی شوارتز برای $u \in Z_k$ و $\|u\|_{\alpha,a,p} = r_k := \beta_k^{-1}$ داریم

$$\begin{aligned}
J(u) &\geq \frac{1}{p}\|u\|_{\alpha,a,p}^p - \frac{1}{p}\int_0^T \theta(t)|u(t)|^p dt \\
&\geq \frac{1}{p}\|u\|_{\alpha,a,p}^p - \frac{1}{p}\|\theta\|_{L^\infty}\|u\|_{L^p}^p \\
&\geq \frac{1}{p}\|u\|_{\alpha,a,p}^p - \frac{1}{p}\|\theta\|_{L^\infty}\beta_k^p\|u\|_{\alpha,a,p}^p \\
&\geq \frac{1}{p}\beta_k^{-p} - \frac{1}{p}\|\theta\|_{L^\infty}. \qquad (24)
\end{aligned}$$

از این‌که $r_k \to \infty$ هنگامی‌که $k \to \infty$، می‌توان بدست آورد که

$$J(u) \geq \frac{1}{p}\beta_k^{-p} - \frac{1}{p}\|\theta\|_{L^\infty} \to \infty, \quad as \quad k \to \infty. \quad (25)$$

بنابراین، $b_k := \inf_{u\in Z_k, \|u\|_{\alpha,a,p}=r_k} J(u) \to +\infty$ هنگامی‌که $k \to \infty$.

همچنین بنابر *(H5)* و پیوستگی F دو ثابت مثبت C_{1F}, C_{2F} وجود دارند به طوری که

$$F(t,u) \geq C_{1F}|u|^p - C_{2F}. \qquad (26)$$

با توجه به ای خاصیت که همه نرم‌های در یک فضای متناهی البعد معادل هستند، توجه داریم $\|.\|_{L^p}$ یک نرم در Y_k می‌باشد، سپس یک ثابت $\zeta > 0$ موجود است به طوری که

$$\|u\|_{L^p}^p \geq \zeta\|u\|_{\alpha,a,p}^p, \quad \forall\, u \in Y_k. \qquad (27)$$

حالا عبارت بالا، (۱۳)، (۲۶) و *(I3)* نتیجه می‌دهند که

$$\begin{aligned}
J(u) &= \frac{1}{p}\int_0^T h(t)\left|{}_0D_t^{\alpha}(u(t))\right|^p dt + \frac{1}{p}\int_0^T a(t)\left|(u(t))\right|^p dt \\
&\quad + \sum_{j=1}^{l}\int_0^{u(t_j)} I_j(s)ds - \int_0^T F(t,u(t))dt \\
&\leq \frac{1}{p}\|u\|_{\alpha,a,p}^p - \int_0^T (C_{1F}|u(t)|^p - C_{2F})dt \\
&\quad + \sum_{j=1}^{l}\int_0^{u(t_j)}(a_j + b_j|s|^{\delta_j-1})ds \\
&\leq \frac{1}{p}\|u\|_{\alpha,a,p}^p - C_{1F}\|u\|_{L^p}^p + C_{2F}T \\
&\quad + \sum_{j=1}^{l}\left(a_j|u(u_j)| + \frac{b_j}{\delta_j}|u(u_j)|^{\delta_j}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\leq\ & \frac{1}{p}\,\|\mathrm{u}\|_{\alpha,a,p}^{p}-C_{1F}\zeta\|\mathrm{u}\|_{\alpha,a,p}^{p} \\
&+\sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{l}}\left(a_j\,\|u\|_{\infty}+\frac{b_j}{\delta_j}\|u\|_{\infty}^{\delta_j}\right) \\
&+C_{2F}T
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq\left(\frac{1}{p}-\ C_{1F}\zeta\right)\|\mathrm{u}\|_{\alpha,a,p}^{p} \\
&+\sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{l}}\left\{a_j\left(\frac{T^{\alpha-\frac{1}{p}}}{\Gamma(\alpha)(\min\{a_0,h_0\})^{\frac{1}{p}}\left((\alpha-1)q+1\right)^{\frac{1}{q}}}\right)\|\mathrm{u}\|_{\alpha,a.p}\right. \\
&\left.+\frac{b_j}{\delta_j}\left(\frac{T^{\alpha-\frac{1}{p}}}{\Gamma(\alpha)(\min\{a_0,h_0\})^{\frac{1}{p}}\left((\alpha-1)q+1\right)^{\frac{1}{q}}}\right)^{\delta_j}\|u\|_{\alpha,a,p}^{\delta_j}\right\}
\end{aligned}
$$

از این‌که $\delta_j < p$ آن‌گاه با انتخاب C_{1F} به اندازه کافی بزرگ به طوری که $\frac{1}{p}-C_{1F}\zeta < 0$، یک ثابت مثبت d_k وجود دارد به طوری که $J(u) \leq 0$ برای هر $u \in Y_k$ و $\|u\|_{\alpha,a,p} \geq d_k$. قرار دهید $\rho_k := max\{r_k+1, d_k\}$ و لذا $a_k = \max_{u\in Y_k,\|u\|_{\alpha,a,p}=\rho_k} J(u) \leq 0$. بنابراین تابعک J در تمام شرایط قضیه ۳ صدق می‌کند و لذا معادله (۳) دارای بی‌نهایت جواب است و اینجا اثبات تمام می‌شود. ■

برای به‌دست آوردن جواب معادله (۱) در $W_2^1[0,1]$، ابتدا یک عملگر خطی روی $W_2^1[0,1]$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

برای هر $u(x) \in W_2^1[0,1]$، قرار می‌دهیم:

$$(Lu)(x) = u(x) - \lambda\int_0^x K(x,t)u(t)dt$$

اگر $u(x)$ جواب معادله (۱) باشد در این صورت داریم:

$$(Lu)(x) = f(x) \qquad (۲)$$

بنابراین مسئله ما تبدیل می‌شود به یافتن تابعی مانند $f(x)$ به طوری که در معادله (۲) صدق کند. فرض

فهرست منابع

[1] A. M. A. El-Sayed. *Nonlinear functional differential equations of arbitrary orders*. Nonlinear Analysis 33: 181-186 (1998)

[2] A. A. Kilbas, J. J. Trujillo. *Differential equations of fractional order: Methods, results and problems I*. Application Analysis 78: 153-192 (2001)

[3] A. A. Kilbas, J. J. Trujillo. *Differential equations of fractional order: Methods, results and problems II*. Application Analysis 81: 435-493 (2002)

[4] V. Lakshmikantham, D. D. Bainov. Simeonov, P.S.: *Theory of Impulsive Differential Equations*. Series Modern Appl. Math., vol. 6, World Scientific, Teaneck, NJ, (1989).

[5] A. M. Samoilenko, N. A. Perestyuk. *Impulsive Differential Equations*. World Scientific, Singapore, (1995)

[6] P. K. George, A. K. Nandakumaran. A. Arapostathis. *A note on controllability of impulsive systems*. Journal of Mathematical Analysis and Applications 241: 276-283 (2000)

[7] J. Shen, J. Li. *Existence and global attractivity of positive periodic solutions for impulsive predator-prey model with dispersion and time delays*. Nonlinear Analysis 10: 227-243 (2009)

[8] B. Dai, H. Su, D. Hu. *Periodic solution of a delayed ratio-dependent predator-prey model with monotonic functional response and impulse*. Nonlinear Analysis 70: 126-134 (2009)

[9] P. Georescu, G. Morosanu. *Pest regulation by means of impulsive controls*. Applied Mathematics and Computions 190: 790-803 (2007)

[10] J. Cao, H. Chen. *Impulsive fractional differential equations with nonlinear boundary condi- tions*. Mathematical and Computer Modelling 55: 303-311 (2012)

[11] X. Zhang, C. Zhu, Z. Wu. *Solvability for a coupled system of fractional differential equations with impulses at resonance*. Boundary Value Problems 2013 (2013) doi: 10.1186-2F1687-2770- 2013-80

[12] Z. Liu, L. Lu, I. Szántó. *Existence of solutions for fractional impulsive differential equations with p-Laplacian operator*. Acta Mathematica Hungarica 141(3): 203-219 (2013)

[13] A. Anguraj, P. Karthikeyan. *Anti-periodic boundary value problem for Impulsive fractional integro differential equations*. Acta Mathematica Hungarica 13(3): 281-293 (2010)

[14] B. Ahmad, J.J. Nieto. *Existence of solutions for Impulsive anti-periodic boundary value problem of fractional order*. Taiwanese Journal Mathematics 15(3):981-993 (2011)

[15] G. Bonanno, R. Rodriguez-Löpez, S. Tersian. *Existence of solutions to boundary value problem for impulsive fractional differential equations*. Fractional Calculus and Applied Analysis 17(3):717-744 (2014)

[16] R. Rodriguez-Löpez, S. Tersian. *Multiple solutions to boundary value problem for impulsive fractional differential equations*. Fractional Calculus and Applied Analysis 17(4):1016-1038 (2014)

[17] Y. Wang, Y. Li, J. Zhou. *Solvability of boundary value problems for impulsive fractional differential equations via critical point theory*.

Mediterranean Journal of Mathematics 13(6): 4845-4866 (2016)

[18] G. Bonanno, S.A. Marano. *On the structure of the critical set of nondifferentiable functionals with a weak compactness condition*. Applications Analysis 89:1-10 (2010)

[19] D. Li, F. Chen, Y. An. *Existence and multiplicity of nontrivial solutions for nonlinear frac- tional differential systems with p-Laplacian via critical point theory*. Mathematical Methods in Applied Sciences (2018) (Preprint) Doi: 10.1002/mma.4810.

[20] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. in: North-Holland Mathematics Studies, vol. 204, Elsevier Science B.V., Amsterdam, (2006)

[21] I. Podlubny. *Fractional Differential Equations*. Academic Press, New York, (1999)

[22] J. Feng, Z. Yong. *Existence of solutions for a class of fractional boundary value problems via critical point theory*. Computer and Mathematics with Applications 62:(2011) 1181-1199.

[23] A. Qian, C. Li. *Infinitely many solutions for a robin boundary value problem*. International journal of Differential Equations Vol 2010, 9 pages.

[24] M. Willem. *Minimax Theorems*. Birkhäuser, Boston (1996)