دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال پنجم، شماره نوزدهم، مرداد و شهریور ۱۳۹۸
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

حلقه‌های J-مک‌کوی α-اریب

محمد وحدانی مهرآبادی[1]، شروین صاحبی[2]*

[1و2] گروه ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد تهران مرکز، تهران، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۶/۰۶/۲۳ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۸/۰۴/۰۲

چکیده

در این مقاله، برای درونریختی حلقه‌ای α، حلقه‌های $J-$مک‌کوی $\alpha-$اریب را معرفی می‌کنیم که تعمیمی از حلقه‌های مک‌کوی $\alpha-$اریب و حلقه‌های $J-$مک‌کوی می‌باشند. برای حلقه R، نشان می‌دهیم برای هر خودتوان e اگر $\alpha(e)=e$ و R یک حلقه $J-$مک‌کوی $\alpha-$اریب باشد در این صورت eRe یک حلقه $J-$مک‌کوی $\alpha-$اریب است. عکس این مطلب زمانی برقرار است که R یک حلقه آبلی باشد. همچنین اگر عدد صحیح t موجود باشد که $\alpha^t = id_R$ و $R[x]$، $J-$مک کوی $\alpha-$اریب باشد در این صورت حلقه R نیز $J-$مک کوی $\alpha-$اریب است. عکس این مطلب وقتی برقرار است که $J(R)[x]\subseteq J(R[x])$. بعلاوه، مثالی ارایه می‌کنیم که نشان می‌دهد خاصیت $J-$مک‌کوی $\alpha-$اریب بودن یک حلقه نمی‌تواند به $M_n(R)$ انتقال یابد. اما برای هر n، اگر R یک حلقه $J-$مک‌کوی $\alpha-$اریب باشد در این صورت حلقه ماتریس‌های بالامثلثی نیز یک حلقه $J-$مک‌کوی $\overline{\alpha}-$اریب می‌باشد. همچنین نشان دادیم اگر R یک حلقه شبه دو راست (چپ) و α یک درونریختی از حلقه R باشد، در این صورت R، $J-$مک کوی $\alpha-$اریب است اما عکس این مطلب در حالت کلی برقرار نیست.

واژه‌های کلیدی: حلقه مک‌کوی، حلقه مک‌کوی ضعیف، حلقه چند جمله‌ای، حلقه $J-$مک‌کوی.

*. عهده‌دار مکاتبات:
Email: sahebi.va@yahoo.com

۱- مقدمه

در این مقاله همه حلقه‌ها یکدار و شرکت‌پذیرند و منظور از $C(R)$، $M_n(R)$، $J(R)$، $N(R)$، $T_n(R)$ و e_{ij} به ترتیب مرکز حلقه R، ماتریس $n\times n$ بر حلقه R، رادیکال جیکوبسن حلقه R، اعضای پوچتوان حلقه R، ماتریس بالامثلثی بر حلقه R و ماتریس با درایه (i,j) ام برابر یک و بقیه درایه‌ها برابر صفر می‌باشد.

حلقه $R=K[x;\alpha]$ حلقه چند جمله‌ای‌های اریب هیلبرت[1] نامیده می‌شود که در آن $\alpha:K\to K$ یک همریختی است که $xb=\alpha(b)x$. از این رو در حلقه اریب هیلبرت داریم:

$$\sum_i a_i x^i \sum_j b_j x^j = \sum_{i,j} a_i \alpha^i(b_j) x^{i+j} .$$

اول بار رگ و چاوچاریا حلقه‌های مک‌کوی را معرفی کرده‌اند [۱]. حلقه ناجابجایی R یک حلقه مک‌کوی راست نامیده می‌شود اگر برای هر جفت چندجمله‌ای ناصفر $f(x)=\sum_{i=0}^n a_i x^i$ و $g(x)=\sum_{j=0}^m b_j x^j$ از حلقه $R[x]$ اگر $f(x)g(x)=0$ آنگاه یک عضو ناصفر r از R وجود داشته باشد بطوریکه $a_i r=0$. حلقه‌های مک‌کوی چپ نیز بطور مشابه تعریف می‌شوند. حلقه R مک‌کوی نامیده می‌شود اگر هم مک‌کوی راست و هم مک‌کوی چپ باشد.

تعداد زیادی از مقاله ها به بررسی ویژگی‌های حلقه‌های مک‌کوی پرداخته‌اند ([۲]، [۳]، [۴]، [۵]). علت نامگذاری "مک‌کوی" برای این حلقه‌ها این است که مک‌کوی نشان داده که حلقه‌های جابجایی در این شرط صدق می‌کنند. ویکتور کامیلو، تای کیون کواک و یانگ لی حلقه‌های ضرایب پوچ توان مک‌کوی راست (برای سادگی NC – مک‌کوی[2] راست) را به عنوان تعمیمی از حلقه‌های مک کوی معرفی کرده‌اند [۶]. حلقه R یک حلقه NC – مک‌کوی راست نامیده می‌شود اگر برای چندجمله‌ای‌های ناصفر $f(x)=\sum_{i=0}^n a_i x^i$ و $g(x)=\sum_{j=0}^m b_j x^j$ در $R[x]$، $f(x)g(x)=0$ نتیجه دهد که $0\neq c\in R$ موجود است بطوریکه $f(x)c\in N(R)[x]$. بطور معادل $0\neq c\in R$ وجود داشته باشد بطوریکه $a_i c\in N(R)$. حلقه‌های NC – مک‌کوی چپ نیز بطور مشابه تعریف می‌شوند. حلقه R، NC – مک‌کوی نامیده می‌شود اگر هم NC – مک کوی راست و هم NC – مک‌کوی چپ باشد.

وحدانی، صاحبی، سید جوادی حلقه‌های J – مک‌کوی را بعنوان تعمیمی از حلقه‌های NC – مک‌کوی معرفی کرده‌اند [۷]. حلقه R یک حلقه J – مک‌کوی راست[3] (J – مک‌کوی چپ[4]) نامیده می‌شود اگر برای هر جفت چندجمله‌ای ناصفر $f(x)=\sum_{i=0}^n a_i x^i$ و $g(x)=\sum_{j=0}^m b_j x^j$ از حلقه $R[x]$ اگر $f(x)g(x)=0$ باشد آنگاه یک عضو ناصفر r از R موجود باشد بطوریکه $a_i r\in J(R)$ ($rb_j\in J(R)$). حلقه R یک حلقه J – مک‌کوی نامیده می‌شود هرگاه هم J – مک‌کوی راست و هم J – مک‌کوی چپ باشد. بوضوح حلقه‌های NC – مک‌کوی، J – مک‌کوی می‌باشند. اما عکس این مطلب صحیح نیست.

یکی از تعمیم‌های مهم دیگر حلقه‌های مک‌کوی حلقه‌های مک‌کوی α – اریب[5] می‌باشد که توسط باسر، کواک و لی معرفی شده‌اند [۸]. یک حلقه R با یک درونریختی α یک حلقه مک‌کوی α – اریب نامیده می‌شود اگر برای هر جفت چندجمله‌ای ناصفر $f(x)=\sum_{i=0}^n a_i x^i$ و $g(x)=\sum_{j=0}^m b_j x^j$ از حلقه $R[x;\alpha]$ اگر $f(x)g(x)=0$ آنگاه یک عضو ناصفر c از R وجود داشته باشد بطوریکه $f(x)c=0$ (بطور معادل $a_i\alpha^i(c)=0$). هر حلقه مک‌کوی α – اریب یک حلقه مک‌کوی است که در آن $\alpha=id_R$. اما مثال زیر نشان می‌دهد یک حلقه مک

1. Hilbert's Twist
2. NC– McCoy
3. Right $J-$ McCoy
4. Left $J-$ McCoy
5. $\alpha-$Skew McCoy

کوی R با یک درونریختی α وجود دارد که مک‌کوی $\alpha-$اریب نیست.

مثال ۱-۱. فرض کنید $R=\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2$ و $\sigma:R\to R$ به صورت $\sigma((a,b))=(b,a)$ تعریف شود. در این صورت R مک‌کوی است اما مک کوی $\sigma-$اریب نیست.

نیک‌مهر، نجاتی و دلدار، حلقه‌های مک‌کوی $\alpha-$اریب ضعیف[1] را که تعمیمی از حلقه‌های مک‌کوی $\alpha-$اریب و حلقه‌های $NC-$مک‌کوی می‌باشد را معرفی کرده‌اند [۹]. فرض کنید α یک درونریختی حلقه R باشد. حلقه R یک حلقه مک‌کوی $\alpha-$اریب ضعیف نامیده می‌شود اگر برای هر جفت چندجمله‌ای ناصفر $f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$ و $g(x)=\sum_{j=0}^{m}b_jx^j$ از حلقه $R[x;\alpha]$ اگر $f(x)g(x)=0$ آنگاه یک عضو ناصفر c از R وجود داشته باشد بطوریکه $a_i\alpha^i(c)\in N(R)$. بوضوح اگر حلقه R یک حلقه $NC-$مک‌کوی باشد در این صورت مک‌کوی id_R-اریب ضعیف است که id_R خودریختی همانی R است.

براساس مطالعات و نتایج فوق، اکنون برای درونریختی α از حلقه R، تعمیمی از حلقه‌های مک‌کوی $\alpha-$اریب و $J-$مک‌کوی را تحت عنوان $J-$مک‌کوی $\alpha-$اریب معرفی می‌کنیم.

۲- حلقه‌های $J-$مک‌کوی $\alpha-$اریب

تعریف ۲-۱. فرض کنید α یک درونریختی از حلقه R باشد. حلقه R یک حلقه $J-$مک‌کوی $\alpha-$اریب نامیده می‌شود اگر برای هر جفت چندجمله‌ای ناصفر $f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$ و $g(x)=\sum_{j=0}^{m}b_jx^j$ از حلقه $R[x;\alpha]$، اگر $f(x)g(x)=0$ آنگاه یک عضو ناصفر r از R موجود باشد بطوریکه $a_i\alpha^i(r)\in J(R)$.

1. Weak $\alpha-$Skew McCoy

بسادگی می‌توان بررسی کرد که اگر R یک حلقه $J-$مک‌کوی باشد در این صورت یک حلقه $J-$مک‌کوی id_R-اریب می‌باشد که id_R یک درونریختی همانی R می‌باشد.

تذکر ۲-۲. بوضوح هر حلقه مک‌کوی $\alpha-$اریب ضعیف یک حلقه $J-$مک‌کوی $\alpha-$اریب می‌باشد.

فرض کنید I یک ایده‌آل حلقه R و $\alpha(I)\subseteq I$ در این صورت $\overline{\alpha}:\frac{R}{I}\to\frac{R}{I}$ که برای $a\in R$ بصورت $\overline{\alpha}(a+I)=\alpha(a)+I$ تعریف می‌شود یک خودریختی از حلقه خارج قسمتی $\frac{R}{I}$ است.

گزاره ۲-۳. فرض کنید R یک حلقه با یک درونریختی α و I یک ایده‌آل از R باشد بطوریکه $\frac{R}{I}$ یک حلقه $J-$مک کوی $\overline{\alpha}-$اریب است. اگر $I\subseteq J(R)$ در این صورت R یک حلقه $J-$مک کوی $\alpha-$اریب می‌باشد.

اثبات: فرض کنید $f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$ و $g(x)=\sum_{j=0}^{m}b_jx^j$ دو چندجمله‌ای ناصفر از حلقه $R[x;\alpha]$ باشند بطوریکه $f(x)g(x)=0$. در این صورت در حلقه $\frac{R}{I}$ خواهیم داشت

$$(\sum_{i=0}^{n}\overline{a}_ix^i)(\sum_{j=0}^{m}\overline{b}_jx^j)=0\,.$$

بنابراین $\overline{c}\in\frac{R}{I}$ وجود دارد بطوریکه $\overline{a}_i\overline{\alpha}^i(\overline{c})\in J(\frac{R}{I})$ و بنابراین $a_i\alpha^i(c)\in J(R)$. پس R یک حلقه $J-$مک کوی $\alpha-$اریب می‌باشد.□

نتیجه ۲-۴. فرض کنید R یک حلقه موضعی با یک درونریختی α باشد. در این صورت R یک حلقه $J-$مک‌کوی $\alpha-$اریب است.

اکنون توجه خود را به مطالعه کلاس دیگری از حلقه‌های $J-$مک‌کوی $\alpha-$اریب معطوف می‌کنیم. فرض کنید R_k یک حلقه و α_k یک درونریختی از R_k باشد که $k\in I$. در این صورت برای ضرب $R=\prod_{k\in I}R_k$ درونریختی $\alpha:R\to R$ بصورت $\alpha((a_k))=(\alpha_k(a_k))$ تعریف می‌شود. بسادگی می‌توان نشان داد که برای هر $k\in I$، اگر R_k، $J-$مک‌کوی α_k-اریب باشد آنگاه $R=\prod_{k\in I}R_k$، $J-$مک‌کوی $\alpha-$اریب است.

حلقه R را برگشت‌پذیر گوییم هرگاه برای هر a و b در R، از $ab=0$ نتیجه شود $ba=0$. همچنین اگر α یک درونریختی از حلقه R باشد، حلقه R $\alpha-$برگشت پذیر راست نامیده می‌شود هرگاه برای هر a و b در R، از $ab=0$ نتیجه شود $b\alpha(a)=0$ [۸].

نتیجه ۲-۵. فرض کنید α یک درونریختی از حلقه R و $\overline{\alpha}:\frac{R}{J(R)}\to\frac{R}{J(R)}$ که $\overline{\alpha}(r+J(R))=\alpha(r)$ یک درونریختی یک به یک از حلقه برگشت پذیر $\frac{R}{J(R)}$ باشد. اگر $\frac{R}{J(R)}$، $\alpha-$برگشت پذیر راست باشد آنگاه R، $J-$مک‌کوی $\alpha-$اریب است.

اثبات: با استفاده از [۸، قضیه ۹] نتیجه می گیریم که $\frac{R}{J(R)}$ یک حلقه $\overline{\alpha}-$اریب مک‌کوی است. لذا طبق گزاره ۲-۳ ، حکم برقرار است.□

قضیه ۲-۶. فرض کنید α یک درونریختی از حلقه R باشد. در این صورت $R[[x]]$، $J-$مک‌کوی $\alpha-$اریب است اگر و فقط اگر R، $J-$مک‌کوی $\alpha-$اریب باشد.

اثبات: فرض کنید R، یک حلقه $J-$مک کوی $\alpha-$اریب باشد. چون $R\cong\frac{R[[x]]}{<x>}$ و $<x>\subset J(R[[x]])$ بنابراین طبق گزاره ۲-۳، $R[[x]]$ یک حلقه $J-$مک‌کوی $\alpha-$اریب است. برعکس فرض کنید $R[[x]]$، $J-$مک‌کوی $\alpha-$اریب باشد. اگر $f(y)=\sum_{i=0}^{n}a_iy^i$ و $g(y)=\sum_{j=0}^{m}b_jy^j$ دو چندجمله‌ای ناصفر از حلقه $R[y;\alpha]$ باشند بطوریکه $f(y)g(y)=0$ آنگاه چون $R[[x]]$ یک حلقه $J-$مک‌کوی $\alpha-$اریب است و $R\subseteq R[[x]]$ پس

$$0\neq c(x)=c_0+c_1x+c_2x+\ldots\in R[[x]]$$

موجود است بطوریکه $a_i\alpha^i(c(x))\in J(R[[x]])$ و بنابراین برای هر $i=0,1,\ldots,n$، داریم:

$$a_i\alpha^i(c_i)\in J(R[[x]])\bigcap R\subseteq J(R).$$

چون $c(x)$ ناصفر است لذا $c_l\neq 0$ موجود است بطوریکه برای هر $i=0,1,\ldots,n$، $a_i\alpha^i(c_l)\in J(R)$ و بنابراین R، یک حلقه $J-$مک‌کوی $\alpha-$اریب است.□

در قسمت بعد برای $\alpha^t=id_R$ نشان می‌دهیم که ویژگی $J-$مک‌کوی $\alpha-$اریب بودن یک حلقه به چندجمله‌ای‌های روی آن حلقه انتقال می‌یابد و بالعکس.

قضیه ۲-۷. فرض کنید α یک درونریختی از حلقه R باشد و عدد صحیح t موجود باشد که $\alpha^t=id_R$. اگر $R[x]$، $J-$مک‌کوی $\alpha-$اریب باشد در این صورت R نیز $J-$مک‌کوی $\alpha-$اریب است. عکس این مطلب وقتی برقرار است که $J(R)[x]\subseteq J(R[x])$.

اثبات: فرض کنید حلقه $R[x]$، $J-$مک کوی $\alpha-$اریب باشد. اگر $f(y)=\sum_{i=0}^{n}a_iy^i$ و $g(y)=\sum_{j=0}^{m}b_jy^j$ دو چندجمله‌ای ناصفر از حلقه $R[y;\alpha]$ باشند بطوریکه $f(y)g(y)=0$ آنگاه چون $R[x]$ یک حلقه $J-$مک کوی $\alpha-$اریب است و $R\subseteq R[x]$ بنابراین

$$0\neq c(x)=c_0+c_1x+\ldots+c_kx^k\in R[x]$$

موجود است بطوریکه $a_i\alpha^i(c(x))\in J(R[x])$.

پس برای هر $i=0,1,\ldots,n$ داریم:

$$a_i\alpha^i(c_i)\in J(R[x])\bigcap R\subseteq J(R).$$

چون $c(x)$ ناصفر است لذا $c_l\neq 0$ موجود است بطوریکه برای $i=0,1,\ldots,n$، $a_i\alpha^i(c_l)\in J(R)$ و بنابراین R، یک حلقه $J-$ مک‌کوی $\alpha-$اریب است.
برعکس فرض کنید R، یک حلقه $J-$مک کوی $\alpha-$اریب باشد و برای چندجمله‌ای‌های ناصفر

$$f(y)=f_0+f_1y+\ldots+f_my^m$$ و

$$g(y)=g_0+g_1y+\ldots+g_ny^n$$ در

$R[x][y;\alpha]$، $f(y)g(y)=0$. عدد صحیح مثبت k را بصورت $k=\sum_{i=0}^{m}\deg f_i+\sum_{j=0}^{n}\deg g_j$ در نظر بگیرید و درجه چندجمله‌ای صفر را برابر صفر قرار دهید. در این صورت $f(x^k)$ و $g(x^k)$ چندجمله‌ای های ناصفری در $R[x;\alpha]$ می‌باشند و چون مجموعه ضرایب f_iها و g_jها با مجموعه ضرایب $f(x^k)$ و $g(x^k)$ مساویند و $\alpha^t=id_R$ لذا $f(x^k)g(x^k)=0$.
از آنجایی که R، یک حلقه $J-$مک‌کوی $\alpha-$اریب می‌باشد لذا یک عضو ناصفر $c\in R$ موجود است بطوریکه برای هر ضریب a_i از $f_i(x)$، $a_i\alpha^i(c)\in J(R)$. پس $f_i\alpha^i(c)\in J(R)[x]\subseteq J(R[x])$ و لذا $R[x]$، $J-$مک کوی $\alpha-$اریب است.□
در ادامه گزاره‌ای مطرح می‌کنیم که نشان می‌دهد ویژگی $J-$مک کوی $\alpha-$اریب بودن از حلقه R به حلقه eRe انتقال می‌یابد که e یک عضو خودتوان مرکزی[1] حلقه R است و حالت عکس زمانی برقرار است که R یک حلقه آبلی[2] باشد. یادآوری می کنیم حلقه R آبلی است اگر هر خودتوان آن مرکزی باشد.

گزاره ۲-۸. فرض کنید R یک حلقه $J-$مک‌کوی $\alpha-$اریب و e یک عضو خودتوان R باشد بطوریکه $\alpha(e)=e$. در این صورت eRe یک حلقه $J-$ مک‌کوی $\alpha-$اریب است. عکس این مطلب زمانی برقرار است که R یک حلقه آبلی باشد.

اثبات: چندجمله‌ای‌های ناصفر $f(x)=\sum_{i=0}^{n}ea_iex^i$ و $g(x)=\sum_{j=0}^{m}eb_jex^j$ از $(eRe)[x;\alpha]$ را در نظر بگیرید بطوریکه $f(x)g(x)=0$. چون R یک حلقه $J-$مک‌کوی $\alpha-$اریب است پس $0\neq s\in R$ موجود است بطوریکه $(ea_ie)\alpha^i(s)\in J(R)$. پس

$$(ea_ie)\alpha^i(ese)\in eJ(R)e=J(eRe)$$

و بنابراین eRe، $J-$مک کوی $\alpha-$اریب است.
اکنون فرض کنید eRe یک حلقه $J-$مک کوی $\alpha-$اریب باشد. چندجمله‌ای‌های ناصفر $f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$ و $g(x)=\sum_{j=0}^{m}b_jx^j$ از $R[x;\alpha]$ را بطوریکه $f(x)g(x)=0$ در نظر بگیرید. بوضوح $ef(x)e,eg(x)e\in(eRe)[x;\alpha]$ و $(ef(x)e)(eg(x)e)=0$ (چون e یک عضو خودتوان مرکزی R است). پس $0\neq s\in eRe$ موجود است بطوریکه

$$(ea_ie)\alpha^i(s)=a_i\alpha^i(s)\in J(eRe)=eJ(R)\subset J(R)$$

بنابراین R یک حلقه $J-$مک‌کوی $\alpha-$اریب است.□
فرض کنید α یک درونریختی از حلقه R و $M_n(R)$ یک ماتریس $n\times n$ بر حلقه R باشد و $\overline{\alpha}:M_n(R)\to M_n(R)$ بصورت $\overline{\alpha}((a_{ij}))=(\alpha(a_{ij}))$ تعریف شود. در این صورت $\overline{\alpha}$ یک درونریختی از $M_n(R)$ است. روشن است که تحدید $\overline{\alpha}$ بر $T_n(R)$ یک درونریختی بر $T_n(R)$ است. $\overline{\alpha}|_{T_n(R)}$ را بصورت $\overline{\alpha}$ نشان می‌دهیم.
برای یک حلقه R و $\alpha=id_R$ و $n\geq 2$، $M_n(R)$ لزوماً $J-$مک‌کوی $\alpha-$اریب نیست [۷، مثال ۳]. با این وجود در گزاره بعد نشان می‌دهیم حلقه ماتریس‌های بالامثلثی روی یک حلقه $J-$مک‌کوی $\alpha-$اریب، $J-$مک‌کوی $\overline{\alpha}-$اریب می‌باشد.

1. Central idempotent
2. Abelian

گزاره ۲-۹. فرض کنید α یک درونریختی از حلقه $J-$مک‌کوی $\alpha-$اریب R باشد. در این صورت برای هر n، $T_n(R)$ یک حلقه $J-$مک‌کوی $\overline{\alpha}-$اریب است

اثبات: فرض کنید $f(x)=\sum_{i=0}^{p}A_i x^i$ و $g(x)=\sum_{j=0}^{q}B_j x^j$ دو چندجمله‌ای ناصفر از حلقه $T_n(R)[x;\overline{\alpha}]$ باشند بطوریکه $f(x)g(x)=0$ و

$$A_i=\begin{pmatrix} a_{11}^{(i)} & a_{12}^{(i)} & \cdots & a_{1n}^{(i)} \\ 0 & a_{22}^{(i)} & \cdots & a_{2n}^{(i)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{(i)} \end{pmatrix} \quad \text{و}$$

$$B_j=\begin{pmatrix} b_{11}^{(j)} & b_{12}^{(j)} & \cdots & b_{1n}^{(j)} \\ 0 & b_{22}^{(j)} & \cdots & b_{2n}^{(j)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{nn}^{(j)} \end{pmatrix}$$

در این صورت از رابطه $f(x)g(x)=0$ برای هر $1\le s\le n$ در $R[x;\alpha]$ خواهیم داشت:

$$(\sum_{i=0}^{p}a_{ss}^{i}x^i)(\sum_{j=0}^{q}b_{ss}^{j}x^j)=0\,.$$

چون حلقه R، $J-$مک‌کوی $\alpha-$اریب است لذا $s_k\neq 0$ موجود است بطوریکه برای $1\le k\le n$، $a_{ss}^{i}\alpha^i(s_k)\in J(R)$. تعریف می‌کنیم

$$S=\begin{pmatrix} s_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & s_n \end{pmatrix}$$

در این صورت

$$A_i\overline{\alpha}^i(S)=\begin{pmatrix} a_{11}^{(i)}\alpha^i(s_1) & * & \cdots & * \\ 0 & a_{22}^{(i)}\alpha^i(s_2) & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{(i)}\alpha^i(s_n) \end{pmatrix}$$
$$\in J(T_n(R))$$

که $*$ نشان‌دهنده عضوی از R است. لذا $T_n(R)$ یک حلقه $J-$مک‌کوی $\overline{\alpha}-$اریب است. □

تذکر ۲-۱۰. هر همریختی σ از حلقه‌های R و S می‌تواند به همریختی حلقه‌های $R[x]$ و $S[x]$ که به صورت $\sum_{i=0}^{m}a_i x^i \to \sum_{i=0}^{m}\sigma(a_i)x^i$ تعریف می‌شود، توسیع داده شود که آن را با σ نشان می‌دهیم.

گزاره ۲-۱۱. فرض کنید $\sigma: R\to S$ یک یکریختی حلقه‌ای باشد. اگر حلقه R، $J-$مک‌کوی $\alpha-$اریب باشد در این صورت S، $J-$مک‌کوی $\sigma\alpha\sigma^{-1}-$اریب است.

اثبات: فرض کنید $f(x)=\sum_{i=0}^{m}a_i x^i$ و $g(x)=\sum_{j=0}^{n}b_j x^j$ دو چندجمله‌ای ناصفر از حلقه $S[x;\sigma\alpha\sigma^{-1}]$ باشند. چون σ یک یکریختی است لذا $f_1(x)=\sum_{i=0}^{m}a'_i x^i$ و $g_1(x)=\sum_{j=0}^{n}b'_j x^j$ در $R[x;\alpha]$ موجود است بطوریکه $f(x)=\sigma(f_1(x))=\sum_{i=0}^{m}\sigma(a'_i)x^i$ و $g(x)=\sigma(g_1(x))=\sum_{j=0}^{n}\sigma(b'_j)x^j$ ابتدا نشان می‌دهیم که $f(x)g(x)=0$ نتیجه می‌دهد که $f_1(x)g_1(x)=0$. برای هر $0\le k\le m$ داریم:

$$a_0b_k+a_1(\sigma\alpha\sigma^{-1})(b_{k-1})+\cdots+a_k(\sigma\alpha\sigma^{-1})^k(b_0)=0$$

براساس تعریف $f_1(x)$ و $g_1(x)$ داریم:

$$\sigma(a'_0)\sigma(b'_k)+\sigma(a'_1)(\sigma\alpha\sigma^{-1})\sigma(b'_{k-1})+\cdots$$
$$+\sigma(a'_k)(\sigma\alpha\sigma^{-1})^k\sigma(b'_0)=0$$

چون $(\sigma\alpha\sigma^{-1})^t=\sigma\alpha^t\sigma^{-1}$ لذا داریم:

$$a'_0b'_k+a'_1\alpha(b'_{k-1})+\cdots+a'_k\alpha^k(b'_0)=0$$

که بدین معناست که در $R[x;\alpha]$، $f_1(x)g_1(x)=0$. چون حلقه R، $J-$مک کوی $\alpha-$اریب می‌باشد لذا $0\neq r\in R$ موجود است که $a_i'\alpha^i(r)\in J(R)$. چون $a_i'=\sigma^{-1}(a_i)$ و برای $s\in R$، $r=\sigma^{-1}(s)$ لذا $\sigma^{-1}(a_i)\alpha^i(\sigma^{-1}(s))\in J(R)$. از این رو خواهیم داشت:

$$a_i(\sigma\alpha\sigma^{-1})^i(s)\in J(S),\quad 0\le i,j\le m.$$

بنابراین S، $J-$مک کوی $\sigma\alpha\sigma^{-1}-$اریب است.□

تذکر. فرض کنید $V=\sum_{i=1}^{n-1}e_{i,i+1}$ در این صورت زیرحلقه $V_n(R)=RI_n+RV+\cdots+RV^{n-1}$ ماتریس‌های اریب بالامثلثی[1] می‌باشد.

نتیجه ۲-۱۲. فرض کنید α یک درونریختی از حلقه R باشد. اگر حلقه خارج قسمتی $\frac{R[x]}{(x^n)}$، $J-$مک کوی $\overline{\alpha}-$اریب باشد در این صورت $V_n(R)$، $J-$مک‌کوی $\overline{\alpha}-$اریب است.

اثبات: فرض کنید $\frac{R[x]}{(x^n)}$، $J-$مک کوی $\overline{\alpha}-$اریب باشد و یکریختی حلقه‌ای را بصورت

$$\theta: V_n(R)\to\frac{R[x]}{(x^n)}$$

$$\theta(r_0I_n+r_1V+\cdots+r_{n-1}V^{n-1})$$
$$=r_0+r_1x+\cdots+r_{n-1}x^{n-1}+(x^n)$$

تعریف می‌کنیم.

اکنون $V_n(R)$، $J-$مک‌کوی $\theta^{-1}\overline{\alpha}\theta-$اریب است و

$$\theta^{-1}\overline{\alpha}\theta(r_0I_n+r_1V+\cdots+r_{n-1}V^{n-1})$$
$$=\overline{\alpha}(r_0I_n+r_1V+\cdots+r_{n-1}V^{n-1})$$

که نشان می‌دهد $V_n(R)$، یک حلقه $J-$مک‌کوی $\overline{\alpha}-$اریب است. □

فرض کنید R یک حلقه و α یک خودریختی از R و S یک زیرمجموعه بسته ضربی R شامل اعضای منظم مرکزی[2] باشد. حلقه $S^{-1}R$ حلقه خارج قسمتی از R نسبت به S نامیده می‌شود. برای هر $b^{-1}a\in S^{-1}R$، $S^{-1}\alpha: S^{-1}R\to S^{-1}R$ را بصورت $S^{-1}\alpha(b^{-1}a)=(\alpha(b))^{-1}\alpha(a)$ تعریف می‌کنیم. در این صورت $S^{-1}\alpha$ یک خودریختی از $S^{-1}R$ است. در قسمت بعد نشان می‌دهیم حلقه خارج قسمتی $S^{-1}R$ از حلقه $J-$مک‌کوی $\alpha-$اریب R، خود $J-$مک کوی $S^{-1}\alpha-$اریب می‌باشد.

قضیه ۲-۱۳. فرض کنید α یک درونریختی پوشا از حلقه R و حلقه R، $J-$مک‌کوی $\alpha-$اریب باشد. در این صورت $S^{-1}R$، $J-$مک‌کوی $S^{-1}\alpha-$ اریب می‌باشد.

اثبات: فرض کنید $f(x)=\sum_{i=0}^{m}c_i^{-1}a_ix^i$ و $g(x)=\sum_{j=0}^{n}d_i^{-1}b_jx^j$ دو چندجمله‌ای ناصفر از حلقه $S^{-1}R[x;S^{-1}\alpha]$ باشند بطوریکه برای هر j,i، $f(x)g(x)=0$. فرض کنید $c_i^{-1}a_i=a_i'c^{-1}$ و $d_j^{-1}b_j=b_j'\,d^{-1}$ که c,d اعضای منظم در R باشند. بنابراین $f'(x)g'(x)=0$ بطوریکه $f'(x)=\sum_{i=0}^{m}a_i'x^i$ و $g'(x)=\sum_{j=0}^{n}b_j'x^j$ دو چندجمله‌ای ناصفر از حلقه $R[x;\alpha]$ می‌باشند. چون حلقه R، $J-$مک کوی $\alpha-$اریب است لذا وجود دارد $0\neq r\in R$ بطوریکه برای هر i، $a_i'\alpha^i(r)\in J(R)$. بنابراین $1-ta_i'\alpha^i(r)$ برای هر $t\in R$، در R معکوس‌پذیر چپ است. لذا

1. Upper triangular skew matrices

2. Central regular

$$c^{-1}w^{-1}(1-w^{-1}tc_i^{-1}a_i\alpha^i(r)\,c\,w)$$
$$=c^{-1}w^{-1}-w^{-1}tc_i^{-1}a_i\alpha^i(r)$$

برای هر $w^{-1}t\in S^{-1}R$، در $S^{-1}R$ معکوس‌پذیر چپ است. چون α پوشاست لذا وجود دارد $c',w'\in R$ بطوریکه

$$c_i^{-1}a_i\alpha^i(r)cw=c_i^{-1}a_i\alpha^i(r)\alpha^i(c')\alpha^i(w')$$
$$=c_i^{-1}a_i\alpha^i(rc'w')\in J(S^{-1}R)$$

لذا $S^{-1}R$، $J-$مک‌کوی $S^{-1}\alpha-$اریب می‌باشد.□
برای یک خودریختی α از حلقه R، $\overline{\alpha}:R[x,x^{-1}]\to R[x,x^{-1}]$ که بصورت

$$\overline{\alpha}(\sum_{i=k}^{n}a_ix^i)=\sum_{i=k}^{n}\alpha(a_i)x^i$$

تعریف شده یک خودریختی از $R[x,x^{-1}]$ است. $\overline{\alpha}\big|_{R[x]}$ (تحدید $\overline{\alpha}$ به $R[x]$) توسط $\overline{\alpha}$ نشان داده می‌شود.

نتیجه ۲-۱۴. اگر $R[x]$ یک حلقه $J-$مک‌کوی $\overline{\alpha}-$اریب باشد در این صورت $R[x,x^{-1}]$ یک حلقه $J-$مک‌کوی $\overline{\alpha}-$اریب می‌باشد.

تعریف. حلقه R یک حلقه شبه دو راست (چپ)[1] نامیده می‌شود اگر هر ایده‌آل ماکسیمال راست (چپ) R دو طرفه باشد.

گزاره ۲-۱۵. اگر R یک حلقه شبه دو راست (چپ) و α یک درونریختی از حلقه R باشد، در این صورت R، $J-$مک‌کوی $\alpha-$اریب است اما عکس این مطلب در حالت کلی برقرار نیست.

اثبات: چون R یک حلقه شبه دو راست است لذا $\frac{R}{J(R)}$ یک حلقه تقلیل یافته[2] است و بنابراین برای یک درونریختی α، طبق گزاره ۲-۳، R، $J-$مک‌کوی $\alpha-$اریب است. اما یک حلقه $J-$مک‌کوی $\alpha-$اریب R موجود است که شبه دو راست (چپ) نیست. اگر R یک دامنه ابتدایی[3] راست باشد (یعنی حلقه تقسیم[4] نباشد) (برای مثال جبر آزاد $R=Q<x,y>$)، در این صورت $\frac{R}{J(R)}=R$. بنابراین برای یک درونریختی α، حلقه R، $J-$مک کوی $\alpha-$اریب است اما شبه دو راست نیست [۱۰]. □

قضیه ۲-۱۶. خانواده حلقه‌های $J-$مک کوی $\alpha-$اریب تحت حد مستقیم با نگاشت‌های یک به یک بسته است.

اثبات: فرض کنید $D=\{R_i,\alpha_{ij}\}$ یک سیستم مستقیم از حلقه‌های $J-$مک‌کوی $\alpha-$اریب R_i برای هر $i\in I$ باشد و همریختی‌های حلقه‌ای $\alpha_{ij}:R_i\to R_j$ برای هر $i\le j$ در رابطه $\alpha_{ij}(1)=1$ صدق کنند که I یک مجموعه مرتب جزئی است. در نظر بگیرید حد مستقیم $R=\varinjlim R_i$ با $L_i:R_i\to R$ و $L_j\alpha_{ij}=L_i$ که هر L_i یک به یک است. نشان می‌دهیم R یک حلقه $J-$مک‌کوی $\alpha-$اریب است. در نظر بگیرید $a,b\in R$. در این صورت $a=L_i(a_i)$ و $b=L_j(b_j)$. برای هر $i,j\in I$ و وجود دارد $k\in I$ بطوریکه $j\le k$ و $i\le k$. تعریف می‌کنیم $ab=L_k(\alpha_{ik}(a_i)\alpha_{jk}(b_j))$ و

$$a+b=L_k(\alpha_{ik}(a_i)+\alpha_{jk}(b_j))$$

که $\alpha_{ik}(a_i)$ و $\alpha_{jk}(b_j)$ متعلق به R_k می‌باشند. در این صورت R به فرم یک حلقه با $0=L_i(0)$ و $1=L_j(1)$ می‌باشد. اکنون فرض کنید

1. Right (left) quasi-duo

2. Reduce
3. Primitive Domain
4. Division Ring

$f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$ و $g(x)=\sum_{j=0}^{m}b_jx^j$ دو چندجمله‌ای ناصفر از حلقه $R[x;\alpha]$ باشند بطوریکه $f(x)g(x)=0$ باشد. وجود دارد $k\in I$ بطوریکه $f(x),g(x)\in R_k[x]$. بنابراین در $R_k[x;\alpha]$ خواهیم داشت $f(x)g(x)=0$. چون R_k، $J-$ مک‌کوی $\alpha-$اریب است وجود دارد $c_k\neq 0$ در R_k بطوریکه $a_i\alpha^i(c_k)\in J(R_k)$. قرار دهید $c=L_k(c_k)$. در این صورت

$$a_i\alpha^i(c)\in \underrightarrow{\lim} J(R_k)=J(R)$$

برای یک عضو ناصفر c از R. بنابراین R یک حلقه $J-$ مک کوی $\alpha-$اریب است.□

تعریف. فرض کنید R یک جبر (با همانی یا بدون همانی) بر یک حلقه تعویض‌پذیر S باشد. توسیع دوروه[1] از R توسط S گروه آبلی $R\oplus S$ با ضرب تعریف شده بصورت $(r_1,s_1)(r_2,s_2)=(r_1r_2+s_1r_2+s_2r_1,s_1s_2)$ برای $r_i\in R$ و $s_i\in S$ می‌باشد.

قضیه ۲-۱۷. فرض کنید R یک جبر بر دامنه تعویض‌پذیر S با یک درونریختی α و D توسیع دوروه از R توسط S با درونریختی $\overline{\alpha}$ باشد. در این صورت R یک حلقه $J-$ مک کوی $\alpha-$اریب است اگر و فقط اگر D، یک حلقه $J-$ مک کوی $\overline{\alpha}-$ اریب باشد.

اثبات: ملاحظه کنید که $s\in S$ بصورت $s1\in R$ می‌باشد و بنابراین $R=\{r+s|(r,s)\in D\}$ و S بعنوان زیرحلقه R مورد بررسی قرار می‌گیرد. فرض کنید $F(x)=(f_1(x),f_2(x))$ و $G(x)=(g_1(x),g_2(x))$ چندجمله‌ای‌های ناصفر در $D[x;\overline{\alpha}]$ باشند که $f_1(x)=\sum_{i=1}^{m}a_ix^i$ و $g_1(x)=\sum_{j=1}^{n}b_jx^j$ متعلق به $R[x;\alpha]$ و $f_2(x)=\sum_{i=1}^{m}s_ix^i$ و $g_2(x)=\sum_{j=1}^{n}t_jx^j$ متعلق به $S[x;\alpha]$ می‌باشند. فرض کنید R، $J-$مک کوی $\alpha-$اریب باشد. فرض کنید $F(x)G(x)=0$. در این صورت $f_2(x)g_2(x)=0$ و بنابراین داریم $f_2(x)=0$ یا $g_2(x)=0$ چون $S[x]$ دامنه است.

(i) اگر $f_2(x)=0$ در این صورت $f_1(x)(g_1(x)+g_2(x))=0$.
چون R، $J-$مک‌کوی $\alpha-$اریب است $r\neq 0$ در R وجود دارد بطوریکه $a_i\alpha^i(r)\in J(R)$. در این صورت $(a_i,0)\overline{\alpha}^i(r,0)\in J(D)$ که $0\neq(r,0)\in D$ و بنابراین D، $J-$مک‌کوی $\overline{\alpha}-$اریب است.

(ii) فرض کنید $g_2(x)=0$. براساس روند (i) داریم $(f_1(x)+f_2(x))g_1(x)=0$. چون R، $J-$ مک‌کوی $\alpha-$اریب است $r\neq 0$ در R وجود دارد بطوریکه $(a_i+s_i)\alpha^i(r)\in J(R)$. در این صورت $(a_i,s_i)\overline{\alpha}^i(r,0)\in J(D)$ که $0\neq(r,0)\in D$ و بنابراین D، $J-$مک‌کوی $\overline{\alpha}-$اریب است. براساس (i) و(ii) D، $J-$مک‌کوی $\overline{\alpha}-$اریب است.

بالعکس، فرض کنیم D، یک حلقه $J-$مک کوی $\overline{\alpha}-$اریب باشد و $f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$ و $g(x)=\sum_{j=0}^{m}b_jx^j$ دو چندجمله‌ای ناصفر از حلقه $R[x;\alpha]$ باشند بطوریکه $f(x)g(x)=0$. در $D[x;\overline{\alpha}]$ قرار دهید $F(x)=(f(x),0)$ و $G(x)=(g(x),0)$ در این صورت $F(x)G(x)=0$. چون D، یک حلقه $J-$مک کوی $\overline{\alpha}-$اریب است لذا یک عضو ناصفر $(r,0)\in D$ وجود دارد بطوریکه $(a_i,0)\overline{\alpha}^i(r,0)\in J(D)$ در این صورت $a_i\alpha^i(r)\in J(R)$ که $0\neq r\in R$. بنابراین R یک حلقه $J-$مک‌کوی $\alpha-$اریب است.□

1. Dorroh Extension

فهرست منابع

[1] Rege, M. B.; Chhawchharia, S. Armendariz rings, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 73 (1997), No. 1, pp. 14-17.

[2] Kosan, M. T. Extention of rings having McCoy condition. Canad. Math. Bull. 52 (2) (2009), pp. 267-272.

[3] McCoy, N. H. Remarks on divisors of zero, Amer. Math. Monthly 49 (1942), pp. 286-295.

[4] Nielsen, P. P. Semi-Commutativity and the McCoy condition. J. Algebra 298 (2006), pp. 134-141.

[5] Ying, Z. L.; Chen, J. L.; Lei, Z. Extensions of McCoy rings, Northeast. Math. J. 24 (2008), No. 1, pp. 85-94.

[6] Camillo, V.; Kwak, T. K.; Lee, Y. On a generalization of McCoy rings. J. Korean Math. Soc. 50 (2013), No. 5, pp. 959-972.

[7] Vahdani Mehrabadi M.; Sahebi, Sh.; Javadi, H. H. S. On a Generalization Of NC-McCoy Rings, J. Miskolc Mathematical Notes, Vol. 18 (2017), No. 1, pp. 337-345.

[8] Baser, M.; Kwak, T. K.; Lee, Y. The McCoy condition on skew polynomial rings. Comm. Algebra 37(11) (2009), pp. 4026-4037.

[9] Nikmehr, M. J.; Nejati, A.; Deldar, M. On Weak α-Skew McCoy Rings. de l'Institut Mathématique, 95(109) (2013), pp. 221-228.

[10] Lam, T. Y.; Dugas, A. S. Quasi-duo rings and stable range descent, J. Algebra. 195, 3 (2005), pp. 243-259.