دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال پنجم، شماره بیستم، مهر و آبان ۱۳۹۸
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

JNRM
پژوهش‌های نوین در ریاضی

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

روش لاگرانژ بهبود یافته برای حل دستگاه معادلات قدرمطلق و کاربرد آن در مسایل مقدار مرزی دو نقطه‌ای

حسین موسائی[۱*]، سعید کتابچی[۲]، محمدتقی فولادی[۳]

[۱] استادیار، گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه بجنورد، بجنورد، ایران
[۲] دانشیار، گروه ریاضی کاربردی، دانشکده ریاضی، دانشگاه گیلان، رشت، ایران
[۳] گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه بجنورد، بجنورد، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۶/۰۳/۰۷ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۸/۰۴/۰۴

چکیده
یکی از موضوعاتی که در سال‌های اخیر مورد توجه پژوهشگران قرار گرفته بررسی دستگاه معادلات قدرمطلق می‌باشد. دستگاه معادلات قدرمطلق به دلیل این در آن مسایل مکمل خطی و همچنین برنامه‌ریزی خطی و برنامه‌ریزی درجه دوم محدب گنجانده شده است در بهینه سازی دارای اهمیت می‌باشد. این مقاله به بیان روشی جدید برای حل دستگاه معادلات قدرمطلق می‌پردازد. برای این منظور، ابتدا دستگاه معادلات قدر مطلق را به سیستم خطی تبدیل کرده و سپس برای حل آن از روش کارای لاگرانژ بهبود یافته استفاده می‌شود. این مقاله همچنین به بررسی دسته‌ای از مسایل مقدار مرزی دو نقطه‌ای پرداخته و روشی جدید برای حل آن ارائه می‌دهد. نشان داده می‌شود این دسته از مسایل با دستگاه معادلات قدر مطلق معادل است. برای نشان دادن کارایی روش پیشنهادی، مسایل دستگاه معادلات قدر مطلق را بطور تصادفی تولید کرده و حل می‌نماییم. علاوه براین دسته‌ای از مسائل مقدار مرزی دو نقطه‌ای نیز از طریق دستگاه معادلات قدر مطلق و روش جدید حل می‌شوند. نتایج محاسباتی نشان می‌دهد روش پیشنهاد شده از سرعت و دقت بالایی برخوردار است.

واژه‌های کلیدی: دستگاه معادلات قدر مطلق، روش لاگرانژ بهبود یافته، روش نیوتن تعمیم یافته، مسائل مقدار مرزی دو نقطه‌ای.

*. عهده‌دار مکاتبات: Email: hmoosaei@gmail.com, moosaei@ub.ac.ir

۱- مقدمه

دستگاه معادلات قدرمطلق که به صورت زیر تعریف می‌شود را در نظر بگیرید:

$$Ax-|x|=b, \qquad (1)$$

که در آن $b\in R^n, A\in R^{n\times n}$ و $|.|$ نمایانگر قدر مطلق مولفه‌ها می‌باشد.

این دستگاه با توجه به معادل بودن آن با مسائل مکمل خطی، برنامه‌ریزی درجه دوم، برنامه‌ریزی خطی در سال‌های اخیر مورد توجه بسیاری از پژوهشگران قرار گرفته است [۴-۲۴] .

در حالت کلی برای دستگاه (۱) سه حالت را می‌توان در نظر گرفت.

حات اول: دستگاه جواب منحصربفرد داشته باشد، که در این حالت باید به دنبال یافتن جواب بود برای این منظور روش‌های متعددی ارائه شده است [۶-۱۳ و ۱۸ و ۱۹ و ۲۳ و ۲۴].

حالت دوم: دستگاه جواب نداشته باشد که برای این حالت تصحیح بهینه دستگاه پیشنهاد شده است [۲۰ و ۲۱].

حالت سوم: دستگاه چندین جواب داشته باشد. در این وضعیت بهترین و طبیعی‌ترین انتخاب پیدا کردن جواب با کمترین نرم است [۲۲و۲۳].

در این مقاله وضعیتی که دستگاه (۱) جواب منحصربفرد داشته باشد مورد توجه قرار گرفته و سعی در یافتن این جواب داریم.

بدین منظور ابتدا دستگاه معادلات قدرمطلق به‌صورت یک مساله برنامه‌ریزی خطی مدل می‌شود و سپس با توجه به شکل محدودیت‌ها، روش لاگرانژ بهبود یافته مساله‌ی دوگان برای حل پیشنهاد می‌گردد. بکارگیری روش لاگرانژ بهبود یافته منجر می‌شود به یک مسأله محدب و نامقید که تنها یک بار دیفرانسیل پذیر است و این مساله را به کمک روش نیوتن تعمیم یافته بر مبنای قاعده آرمیژو حل می‌نماییم.

علاوه بر این به‌عنوان کاربردی از این روش، به بررسی دسته‌ای از مسایل مقدار مرزی دو نقطه‌ای نیز خواهیم پرداخت.

نتایج عددی کارایی و دقت روش پیشنهادی را نشان می‌دهد.

ساختار مقاله به این صورت است که در بخش ۲ هم ارزی دستگاه معادلات قدرمطلق و سیستم خطی نشان داده شده و روش لاگرانژ بهبود یافته برای حل آن ارائه شده است. در بخش ۳ به بیان هم ارزی مساله (۱) و مسائل مقدار مرزی دو نقطه‌ای پرداخته می‌شود. در بخش ۴ به ارائه مثال‌های عددی برای بررسی کارایی روش و الگوریتم پیشنهادی می‌پردازیم و در نهایت نتیجه‌گیری در بخش ۵ ارائه می‌شود.

۲- حل دستگاه معادلات قدر مطلق به کمک روش لاگرانژ بهبود یافته

در این بخش ابتدا نشان داده می‌شود که دستگاه معادلات قدر مطلق(۱) با یک سیستم خطی معادل است. سپس طبق شرایطی که رابطه بین مساله خطی اولیه و مساله دوگان آن را توصیف می‌کند، جواب سیستم خطی می‌تواند به وسیله مینیمم‌سازی تابع لاگرانژ بهبود یافته دوگان به دست آید. این تابع بطور قطعه‌ای درجه دوم، محدب و مشتق‌پذیر است. این مینیمم‌سازی یک جواب تصویر کمترین نرم نقطه فرضی در مجموعه جواب مساله خطی اولیه را به ازای بعضی مقادیر متناهی پارامتر جریمه ارائه خواهد داد. بکارگیری روش لاگرانژ بهبود یافته منجر می‌شود به یک مسأله محدب و نامقید که تنها یک بار دیفرانسیل‌پذیر است که برای حل آن روش نیوتن تعمیم یافته بر مبنای قاعده آرمیژو مورد استفاده قرار می‌گیرد.

دستگاه معادلات قدر مطلق (۱) را در نظر بگیرید.

قرار می‌دهیم:

$$p=\frac{|x|+x}{2} \quad و \quad q=\frac{|x|-x}{2}$$

در نتیجه داریم:

$$x=p-q \quad و \quad |x|=p+q$$

واضح است که $p,\, q\geq 0$ با جایگزینی روابط (۲) در دستگاه (۱) داریم:

$$Ap-Aq-Ip-Iq=b \quad و \quad p,\, q\geq 0 \qquad (3)$$

رابطه‌ی (۳) را به صورت معادل زیر می‌نویسیم:

$$\begin{aligned}&[A \quad -I]p+[-A \quad -I]q=b\\&p,\ q\ge 0\end{aligned} \qquad (۴)$$

سیستم (۴) راکه معادل دستگاه معادلات قدر مطلق (۱) است، با سیستم خطی زیر نیز معادل است:

$$\begin{aligned}&Bx=b\\&x\ge 0,\end{aligned} \qquad (۵)$$

که در آن:

$$B=[A-I \quad -A-I] \quad \text{و} \quad x=\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$$

برای حل سیستم (۵)، روش لاگرانژ بهبود یافته پیشنهاد می‌شود.
سیستم (۵) را، که به‌صورت زیر می‌توان نوشت، در نظر بگیرید:

$$X=\{x\in R^{2n}: Bx=b, x\ge 0\}, \qquad (P)$$

که در آن $B\in R^{n\times 2n}$ ،$b\in R^n$ داده شده‌اند.
فرض کنید که X_* مجموعه جواب (P) غیر تهی است. پس مجموعه جواب مساله دوگان، U_* نیز غیر تهی می‌باشد و $x\in R^{2n}$ یک بردار دلخواه است. قضیه زیر بیان می‌کند که از یک مساله مینیمم‌سازی نامقید می‌توان جواب مساله دوگان (P) را بدست آورد.

قضیه ۱. فرض کنید که X_* مجموعه جواب (P) غیر تهی باشد. آنگاه $\alpha_*>0$ موجود است به طوری که برای هر $\alpha\ge\alpha_*$ تصویر کمترین نرم یکتا x از نقطه $\bar{x}$ درون X_* به وسیله $x=(\bar{x}+\alpha(B^Tu(\alpha)))_+$ تعریف می‌شود، جائیکه $u(\alpha)$ نقطه مینیمم مساله زیر است:

$$\begin{aligned}&\min_{u\in R^n}\Phi(u,\alpha,\bar{x}):=\\&-b^Tu+\frac{1}{2\alpha}\|\ (\bar{x}+\alpha(B^Tu))_+\ \|^2.\end{aligned} \qquad (۶)$$

همچنین، برای هر $\alpha>0$ و $x\in X_*$ جواب مساله درجه دوم محدب (۶)، $u_*=u(\alpha)$، یک جواب دقیق مساله دوگان است یعنی $u(\alpha)\in U_*$.
اثبات: به[۲۶] مراجعه شود.
توجه داریم که تابع $\Phi(u,\alpha,\bar{x})$ تابع لاگرانژ بهبود یافته برای دوگان مساله (P) است که به‌صورت زیر می‌باشد:

$$f_*=\max_{u\in U}b^Tu, \quad U=\{u\in R^n: B^Tu\le 0\}$$

تابع $\Phi(u,\alpha,\bar{x})$ قطعه‌ای درجه دوم، محدب و دارای مشتق اول است اما مشتق دوم آن موجود نمی‌باشد. فرض کنید $s\,,t\in R^n$ برای گرادیان $\nabla\Phi_u(u,\alpha,\bar{x})$ داریم:

$$\begin{aligned}&\|\nabla\Phi_u(s,\alpha,\bar{x})-\nabla\Phi_u(t,\alpha,\bar{x})\ \|\le\\&\|B\ \|\ \|B^T\ \|\ \|s-t\ \|,\end{aligned}$$

این به این معناست که $\nabla\Phi_u(u,\alpha,\bar{x})$ پیوسته لیپ شیتس با ثابت $K=\|B\ \|\|B^T\ \|$ است.
اکنون فرآیند تکراری زیر را معرفی می‌کنیم:

$$\begin{aligned}&u^{k+1}=\arg\min_{u\in R^n}\{-b^Tu+\\&\frac{1}{2\alpha}\left\|(x^k+\alpha(B^Tu))_+\right\|^2\},\\&x^{k+1}=(x^k+\alpha(B^Tu^{k+1}))_+,\end{aligned} \qquad (۷)$$

که u^0 و x^0 یک نقطه شروع دلخواه است. براساس این فرآیند می‌توان قضیه زیر را بیان کرد:

قضیه ۲. فرض کنید مجموعه جواب X_* سیستم(P) غیر تهی باشد. آنگاه برای هر $\alpha>0$ و هر نقطه شروع دلخواه x^0 روند تکراری (۷) به $x_*\in X_*$ با تعداد مراحل k متناهی، همگرا است و جواب کمترین نرم مساله اولیه $\hat{x}_*$ بعد از اولین تکرار از روند بالا به دست می‌آید. همچنین $u_*=u^{k+1}$ یک جواب دقیق مساله دو گان (D) است.

اثبات: به [۲۶] مراجعه شود.
با توجه به اینکه تابع هدف مساله فقط یک بار دیفرانسیل‌پذیر است برای حل آن از روش نیوتن تعمیم یافته به کمک قاعده آرمیژو استفاده خواهد شد [۲۷و۲۸].

۳- مسأله مقدار مرزی دو نقطه‌ای به عنوان دستگاه معادلات قدرمطلق

در این بخش به بررسی فرم خاصی از مسائل مقدار مرزی پرداخته و معادل بودن آن را با دستگاه معادلات قدر مطلق (۱) نشان خواهیم داد.
مسأله مقدار مرزی به فرم زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} u''-|u|=f(t) & f(t)\in C[a,b] \\ u(a)=u_a & u(b)=u_b \end{cases} \qquad (۸)$$

فرض کنید

$$\overline{w}_h=\{t_i=a+ih, i=0,1,2,\dots,n+1\}$$

یک مجموعه یکنواخت متشکل از نقاط t_i باشد که در آن n تعداد نقاط و h اندازه‌ی گام است. فرض کنید w_n مجموعه نقاط داخلی بازه باشد و y_n نقاط مرزی

$$y_n=\{t_0=a, t_{n+1}=b\}.$$

فرض کنید معادله (۸) جواب منحصر به فرد داشته باشد لذا یک تابع مانند $u(t)\in C^2[a,b]$ وجود دارد که در (۸) صدق می‌کند. بنابراین با جایگزین کردن نقاط $t_i\in w_n$ در (۸) رابطه زیر بدست می‌آید

$$\begin{cases} u''(t_i)-|u(t_i)|=f(t_i) \\ \quad i=1,2,\dots,n \\ u(t_0)=u_a, u(t_{n+1})=u_b \end{cases}$$

اکنون قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} u(t_0)=u_0 \\ u(t_1)=u_1, u(t_2)=u_2,\dots,u(t_n)=u_n \\ u(t_{n+1})=u_{n+1} \end{cases}$$

و با استفاده از روش تفاضل متناهی [۳ و ۲۵] داریم:

$$u_i\approx\frac{u_{i-1}-2u_i+u_{i+1}}{h^2}, i=1,2,\dots,n$$

بنابراین حالت گسسته‌ی (۹) به صورت زیر است:

$$\begin{cases} \dfrac{u_{i-1}-2u_i+u_{i+1}}{h^2}-|u_i|= \\ f(t_i) \qquad i=1,2,\dots,n \\ u_0=u_a, \qquad u_{n+1}=u_b \end{cases} \qquad (۱۰)$$

اگر دستگاه (۱۰) را برای هر i جداگانه باز نویسی کنیم، دستگاه معادلات قدر مطلق $Ax-|x|=b$ را نتیجه می‌دهد که در آن A, b, x به صورت زیر هستند:

$$A=\frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & & & & & & \\ 1 & -2 & 1 & 0 & & & & & \\ & & 1 & -2 & 1 & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & & & & 1 & -2 \end{bmatrix},$$

$$b=\begin{bmatrix} f(t_1)-\dfrac{u_0}{h^2} \\ f(t_2) \\ f(t_3) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ f(t_{n-1}) \\ f(t_n)-\dfrac{a_{n+1}}{h^2} \end{bmatrix},$$

$$x=\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{bmatrix}$$

بنابراین کافی است بجای حل مساله (۸) دستگاه معادلات قدر مطلق فوق را حل نماییم.

۴- نتایج عددی

در این بخش با استفاده از فرآیندی که در مقاله بیان مطرح شد به بررسی نتایج عددی می‌پردازیم. برای نشان دادن کارایی روش الگوریتم را روی مسایلی که بطور تصادفی تولید می‌شوند بکار می‌بریم.

محاسبات با استفاده از نرم افزار MATLAB 2010a تحت سیستم عامل 2.53 GHz Core 2 Du و رم 4GB بدست آمده است.

برنامه تولید مساله به صورت زیر است:

```
------------------------------------------------
%Sgen: Generate random system A*x-|x|=b
n=input('Enter n:');
A=10*(rand(n,n)-rand(n,n));
A=(1/min(svd(A))*0.5 * rand (1))*A;
x=rand(n,1)- rand(n,1);
b=A*x-abs(x);
------------------------------------------------
```

نتایج در جدول ۱ ارائه شده است. ستون اول بعد ماتریس A را نشان می‌دهد و ستون دوم مقدار $\|Ax-|x|-b\|$ را نمایش داده و ستون آخر نشان دهنده زمان انجام محاسبات است.

اکنون به بیان دو مثال در زمینه مسایل مقدار مرزی می‌پردازیم.

مثال ۱. مسأله مقدار مرزی زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} \dfrac{d^2u}{dt^2}-|u|= \\ \left(1-t^2\right) \qquad 0\le t\le 1 \\ u(0)=-1 \\ u(1)=0 \end{cases} \qquad (۱۱)$$

که جواب دقیق آن به صورت زیراست

$$u(t)=0\cdot 1916\sin t-4\cos t-t^2+3$$
$$0\le t\le 1$$

اگر قرار دهیم $n=10$، آنگاه $h=\dfrac{b-a}{n+1}=\dfrac{1-0}{10+1}=\dfrac{1}{11}$ و نقاط به صورت زیر هستند.

$$w_h=\left\{t_i=ih, i=1,2,\dots,10, h=\frac{1}{11}\right\}$$

با جایگزین کردن نقاط مجموعه در تابع $f(t)=1-t^2$ مسأله (۱۱) معادله قدر مطلق (۱) را نتیجه می‌دهد که در آن ماتریس A و بردار b به صورت زیر هستند.

$$x=\begin{bmatrix} u1 \\ u2 \\ . \\ . \\ . \\ un \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 121.9917 \\ 0.9669 \\ 0.9256 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ 0.3306 \\ 0.1736 \end{bmatrix}$$

و

$$A = 121\begin{bmatrix} -2 & 1 & & & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & & & \\ \ddots & \ddots & \ddots & & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & & & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

دستگاه معادلات قدر مطلق بدست آمده را با روش جدید حل می‌نماییم.

$\|Ax-|x|-b\| = 3.2225e\text{-}013$ زمان: 0.19 که نشان دهنده دقت و سرعت محاسبات است.

مثال۲. مسأله مقدار مرزی زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} \dfrac{d^2u}{dt^2} - |u| = \\ \left(1-t^2\right) \quad 0 \le t \le 1 \\ u(0) = 0\,,\ \ u(1) = 1 \end{cases} \tag{۱۲}$$

که جواب دقیق آن به‌صورت زیراست

$$0 \le t \le 1$$
$$u(t) =$$
$$\begin{cases} -0.73105857e^{-t} - 0.26894142e^{t} + t^2 + 1 & u < 0 \\ -0.73105857e^{-t} - 0.26894142e^{t} + t^2 + 1 & u > 0 \end{cases}$$

اگر قرار دهیم $n = 10$، آنگاه $h = \dfrac{b-a}{n+1} = \dfrac{1-0}{10+1} = \dfrac{1}{11}$ و نقاط به صورت زیر هستند.

$$w_h = \left\{ t_i = ih, i = 1,2,\ldots,10, h = \frac{1}{11} \right\}$$

با جایگزین کردن نقاط مجموعه در تابع $f(t) = 1-t^2$ مسأله (۱۲) معادله قدر مطلق (۱) را نتیجه می‌دهد که در آن ماتریس A و بردار b به صورت زیر هستند.

$$x = \begin{bmatrix} u1 \\ u2 \\ . \\ . \\ . \\ un \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 0.99173 \\ 0.96694 \\ 0.92561 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ 0.33057 \\ -120.86776 \end{bmatrix}$$

و

$$A = 121\begin{bmatrix} -2 & 1 & & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & & \\ \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & & & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

دستگاه معادلات قدر مطلق بدست آمده را با روش جدید حل می‌نماییم.

$\|Ax-|x|-b\|=5.5623e\text{-}013$ زمان: 0.03 که نشان دهنده دقت و سرعت محاسبات است.

نتیجه‌گیری

در این مقاله به بررسی دستگاه معادلات قدر مطلق پرداخته و معادل بودن آن با مساله برنامه‌ریزی خطی را نشان دادیم. به دلیل بزرگ بودن تعداد متغیر های مساله بدست آمده به نسبت تعداد محدودیت‌ها از روش لاگرانژ بهبود یافته‌ی مساله دوگان برای حل این مساله استفاده شده است. با استفاده از فرآیند مورد اشاره جهت بررسی کارایی روش، مثال‌هایی بطور تصادفی تولید شده و همچنین مثال‌هایی از مسائل مقدار مرزی دو نقطه‌ای با بکارگیری دستگاه معادلات قدر مطلق مبتنی بر روش گفته شده حل شده‌اند.

جدول (۱): حل دستگاه معادلات قدرمطلق با داده‌های تصادفی

N	$\|Ax-\|x\|-b\|$	Time(sec)
۱۰	۲،۸۱۸۳e-۰۱۳	۰،۱۴۵
۱۰۰	۱،۳۸۱۱e۰۱۲	۱،۴۸۵
۱۵۰	۳،۴۱۰۶e–۰۱۲	۱،۴۲۶
۲۰۰	۵،۹۲۷۷e–۰۱۲	۱۲،۹۵۰
۲۵۰	۳،۸۳۲۹e–۰۱۱	۳۸،۵۷۶
۳۰۰	۶،۳۳۰۵e–۰۱۲	۵۸،۰۶۰

فهرست منابع

[1] Roberts, S. M., & Shipman, J. S. (1972). Two-point boundary value problems: shooting methods.

[2] Aziz, A. K. (Ed.). (2014). Numerical solutions of boundary value problems for ordinary differential equations. Academic Press.

[3] Stynes, M., & Gracia, J. L. (2015). A finite difference method for a two-point boundary value problem with a Caputo fractional derivative. IMA Journal of Numerical Analysis, 35(2), 698-721.

[4] Mangasarian, O. L., & Meyer, R. R. (2006). Absolute value equations. Linear Algebra and Its Applications, 419(2-3), 359-367.

[5] Longquan, Y. O. N. G. (2010). Particle swarm optimization for absolute value equations. Journal of Computational Information Systems, 6(7), 2359-2366.

[6] Mangasarian, O. L. (2007). Absolute value equation solution via concave minimization. Optimization Letters, 1(1), 3-8.

[7] Mangasarian, O. L. (2009). A generalized Newton method for absolute value equations. Optimization Letters, 3(1), 101-108.

[8] Mangasarian, O. L. (2012). Primal-dual bilinear programming solution of the absolute value equation. Optimization Letters, 6(7), 1527-1533.

[9] Mangasarian, O. L. (2013). Absolute value equation solution via dual complementarity. Optimization Letters, 7(4), 625-630.

[10] Mangasarian, O. L. (2015). A hybrid algorithm for solving the absolute value equation. Optimization Letters, 9(7), 1469-1474.

[11] Moosaei, H., Ketabchi, S., Noor, M. A., Iqbal, J., & Hooshyarbakhsh, V. (2015). Some techniques for solving absolute value equations. Applied Mathematics and Computation, 268, 696-705.

[12] Noor, M. A., Iqbal, J., & Al-Said, E. (2012). Residual iterative method for solving absolute value equations. In Abstract and Applied Analysis (Vol. 2012). Hindawi.

[13] Noor, M. A., Iqbal, J., Khattri, S., & Al-Said, E. (2011). A new iterative method for solving absolute value equations. International Journal of Physical Sciences, 6(7), 1793-1797.

[14] Noor, M. A., Iqbal, J., Noor, K. I., & Al-Said, E. (2012). On an iterative method for solving absolute value equations. Optimization Letters, 6(5), 1027-1033.

[15] J Rohn, J. (2009). On unique solvability of the absolute value equation. Optimization Letters, 3(4), 603-606.

[16] Rohn, J. (2012). An algorithm for computing all solutions of an absolute value equation. Optimization Letters, 6(5), 851-856.

[17] Rohn, J. (2012). A theorem of the alternatives for the equation| Ax|−| B|| x|= b. Optimization Letters, 6(3), 585-591.

[18] Rohn, J., Hooshyarbakhsh, V., & Farhadsefat, R. (2014). An iterative method for solving Absolute value equations and sufficient conditions for

unique solvability. Optimization Letters, 8(1), 35-44.

[19] Salkuyeh, D. K. (2014). The Picard–HSS iteration method for absolute value equations. Optimization Letters, 8(8), 2191-2202.

[20] Ketabchi, S., & Moosaei, H. (2012). Optimal error correction and methods of feasible directions. Journal of Optimization Theory and Applications, 154(1), 209-216.

[21] Ketabchi, S., & Moosaei, H. (2012). An efficient method for optimal correcting of absolute value equations by minimal changes in the right hand side. Computers & Mathematics with Applications, 64(6), 1882-1885.

[22] Ketabchi, S., & Moosaei, H. (2012). Minimum norm solution to the absolute value equation in the convex case. Journal of Optimization Theory and Applications, 154(3), 1080-1087.

[23] Moosaei, H., Ketabchi, S., & Jafari, H. (2015). Minimum norm solution of the absolute value equations via simulated annealing algorithm. Afrika Matematika, 26(7-8), 1221-1228.

[24] Yong, L. (2015). Iteration Method for Absolute Value Equation and Applications in Two-point Boundary Value Problem of Linear Differential Equation. Journal of Interdisciplinary Mathematics, 18(4), 355-374.

[25] Allen Jr, R. C., Wing, G. M., & Scott, M. (1969). Solution of a certain class of nonlinear two-point boundary value problems. Journal of Computational Physics, 4(2), 250-257.

[26] Evtushenko, Y. G., Golikov, A. I., & Mollaverdy, N. (2005). Augmented Lagrangian method for large-scale linear programming problems. Optimization Methods and Software, 20(4-5), 515-524.

[27] Pardalos, P. M., Ketabchi, S., & Moosaei, H. (2014). Minimum norm solution to the positive semidefinite linear complementarity problem. Optimization, 63(3), 359-369.

[28] Mangasarian, O. L. (2004). A Newton method for linear programming. Journal of Optimization Theory and Applications, 121(1), 1-18.