

## ارائه دو مدل برای تحلیل عددی جواب معادلات دیفرانسیل-انتگرال کسری و مقایسه آنها

محمود بهروزی فر\*

استاد، دانشکده علوم پایه، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل، مازندران، ایران.

تاریخ ارسال مقاله: ۹۶/۰۳/۲۷ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۸/۰۲/۱۵

### چکیده

در این مقاله، دو مدل برای تحلیل عددی جواب معادلات دیفرانسیل-انتگرال کسری ارائه می‌دهیم و سپس به مقایسه نتایج بکارگیری آنها بر روی مسائل متنوع می‌پردازیم. برای این منظور ابتدا ماتریس‌های عملیاتی چند جمله‌ای‌های ژاکوبی را بیان کرده و سپس هر مسئله را با دو روش حل می‌نماییم: روش ماتریس عملیاتی مشتق مرتبه کسری کاپوتو و روش ماتریس عملیاتی انتگرال مرتبه کسری ریمان-لیوویل. در هر دو روش با استفاده از تکنیک نقطه‌گذاری به یک دستگاه معادلات جبری خطی یا غیرخطی خواهیم رسید با کمک روش تکراری نیوتن حل می‌شوند. روش‌های ارائه شده روی چند مثال پیاده‌سازی شده است و نتایج عددی حاصل بیانگر کارایی بالای هر دو روش است. لازم به ذکر است که تمامی محاسبات با کمک نرم افزار متمتیکا<sup>۱</sup> انجام شده است. نتایج عددی نشان می‌دهد که برای معادله دیفرانسیلی که جواب آن بصورت چند جمله‌ای می‌باشد بهتر است از روش اول و در معادله غیرخطی که جواب آن بصورت تابع متعالی است بهتر است که روش دوم استفاده شود.

**واژه‌های کلیدی:** معادله دیفرانسیل-انتگرال کسری، ماتریس عملیاتی، ماتریس عملیاتی مشتق مرتبه کسری کاپوتو، ماتریس عملیاتی انتگرال مرتبه کسری ریمان-لیوویل، تکنیک نقطه‌گذاری.

۱- مقدمه

حساب دیفرانسیل و انتگرال کسری شاخه‌ای از ریاضیات است که به بررسی و تحقیق در مورد خواص و کاربردهای انتگرال و مشتقات مراتب دلخواه می‌پردازد. در سه دهه گذشته حساب دیفرانسیل غیرصحيح و کاربرد آن در فیزیک و مهندسی کانون بسیاری از تحقیقات بوده است که می‌توان به موارد زیر اشاره کرد [۱].

یک مدل ریاضی برای سیستم میکرو الکترو مکانیک با توجه به معادله:

$$\alpha_c D_t^2 x + \beta \sqrt{\pi} \alpha_c D_t^{\frac{1}{2}} x + \alpha_c D_t x(t) + x(t) = 0$$

$$x(0) = 1, x'(0) = 0$$

ارائه شده است که دستگاهی برای اندازه‌گیری گرانروی مایعاتی است، که در هنگام اکتشاف چاه‌های نفت با آن مواجه می‌شوند. همچنین روند حل یک گاز در یک سیال توسط یک معادله دیفرانسیل کسری به فرم زیر شرح داده شده است

$$F(t) \alpha_c D_t^{\frac{1}{2}} x(t) + G(t) \alpha_c D_t x(t) + x(t) = -1$$

و معادله دیفرانسیل کسری زیر:

$$m \alpha_c D_t^2 x(t) + c \alpha_c D_t^{\frac{1}{2}} x(t) + kx(t) = AF_0(t).$$

که توصیف جرم در حال حرکت با نیروی مشخصه و مخالف با ویسکوالاستیک نوسانات میرای نیرو می‌باشد. همچنین از برنامه‌های کاربردی دیگر مانند فرآیند سیستم اعصاب و سنتیک واکنش پروتئین، مسائل دینامیکی مکانیک جامدات، مدل‌سازی رابط الکتروود بافت قلب و پردازش سیگنال‌های آن را می‌توان نام برد. مبحث حسابان کسری (انتگرال و مشتق‌ها از هر مرتبه دلخواه حقیقی یا مختلط) را می‌توان به عنوان موضوعی قدیمی و در حال حاضر بسیار مهم تلقی کرد. شاید بتوان منشاء پیدایش این علم را در نامه‌ای که در سال ۱۶۹۵ هویپیتال (۱۶۶۱-۱۷۰۴) به لایبنیتز (۱۶۴۶-۱۷۱۶) نوشته جستجو کرد. در پی انتشاری وی در زمینه مشتق مراتب صحیح

این سوال را مطرح کرده بود که اگر به جای  $\frac{d^n}{dx^n}$  در مفهوم مشتق مرتبه  $n = 1, 2, 3, \dots$

داشته باشیم  $n = \frac{1}{2}$  در این صورت این چه مفهومی می‌تواند داشته باشد، که در جواب لایبنیتز اعلام داشت که: "این امر در حال حاضر پارادکسی آشکار است که روزی به عنوان یکی از مفیدترین مباحث علمی مطرح خواهد گشت" [۲].

بیشتر معادلات دیفرانسیل-انتگرال کسری جواب تحلیلی ندارند. بنابراین باید از روش‌های عددی برای یافتن جواب‌های آنها استفاده شود. وجود و یکتایی جواب برای معادلات دیفرانسیل-انتگرال کسری توسط محققان زیادی بررسی شده است [۳، ۴]. اخیرا چندین روش عددی و نیمه تحلیلی برای حل معادلات دیفرانسیل-انتگرال کسری بیان شده است مثل روش تجزیه آدومیان<sup>۱</sup> [۵، ۶، ۷، ۸، ۹]، روش تکراری تغییراتی<sup>۲</sup> [۱۰، ۱۱، ۱۲]، روش آشفستگی هموتویی<sup>۳</sup> [۱۳ و ۱۴]، روش آنالیز هموتویی<sup>۴</sup> [۱۵] و روش نقطه‌گذاری<sup>۵</sup> [۱۶].

آنچه که به عنوان نوآوری این مقاله می‌توان بیان نمود این است که در این مقاله علاوه بر پیاده‌سازی و نوشتن برنامه‌های روش اول [۱۷، ۱۸] در نرم افزار متمتیکا برای تمامی مثال‌ها، روش دوم جدیدی بیان شده است که براساس دورون‌یابی شرایط اولیه و سپس همگن‌سازی مساله پایه‌ریزی شده است و از ماتریس‌های عملیاتی انتگرال استفاده می‌نماید. این دو روش از اساس و پایه با هم تفاوت دارند. نتایج این دو روش با هم مقایسه شده و مزایای و برتری این دو روش نسبت به هم در قسمت نتیجه‌گیری به صراحت توضیح داده شده است. مطالب این مقاله در ۶ بخش تنظیم شده، که به شرح زیر می‌باشد:

در بخش ۲، این مقاله ابتدا تعاریف مورد نیاز را ارائه می‌نمایم و با بیان برخی قضایا به خواص مهم مشتق و انتگرال مرتبه کسری می‌پردازیم. در فصل ۳، ماتریس عملیاتی مشتق از مرتبه صحیح و از ماتریس عملیاتی مشتق کسری کاپوتو چندجمله‌ای های ژاکوبی انتقال

1. Adomian's decomposition method
2. Variational iteration method
3. Homotopy perturbation method
4. Homotopy analysis method
5. Collocation method

تعمیم می‌دهیم. در این صورت سمت راست دستور انتگرال کوشی، در واقع تعریف انتگرال ریمان-لیوویل می‌باشد. دستور انتگرال کوشی را به صورت زیر داریم:

$$\int_a^x \int_a^{t_1} \dots \int_a^{t_{n-1}} f(t) dt dt_{n-1} \dots dt_1 = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt, \quad x > a, \quad n \in \mathbb{N}$$

حال فرض کنید  $-\infty < a < b < +\infty$  و  $\Omega = [a, b]$  یک بازه متناهی بر محور حقیقی  $\mathbb{R}$  باشد در اینصورت انتگرال مرتبه کسری چپ و راست ریمان-لیوویل از مرتبه  $\alpha$  را به ترتیب با نمادهای  ${}_a I_x^\alpha$  و  ${}_x I_b^\alpha$  نشان می‌دهیم که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$${}_a I_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad x > a, \quad \text{Re}(\alpha) > 0, \quad (3-2)$$

$${}_x I_b^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad x < b, \quad \text{Re}(\alpha) > 0 \quad (4-2)$$

زمانیکه  $\alpha = n \in \mathbb{N}$  تعاریف فوق از انتگرال‌های کسری ریمان - لیوویل به صورت انتگرال‌های  $n$  گانه زیر در می‌آیند:

$${}_a I_x^\alpha f(x) = \int_a^x \int_a^{t_1} \dots \int_a^{t_{n-1}} f(t) dt dt_{n-1} \dots dt_1 = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt, \quad x > a, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (5-2)$$

همچنین

$${}_x I_b^\alpha f(x) = \int_x^b \int_{t_1}^b \dots \int_{t_{n-1}}^b f(t) dt dt_{n-1} \dots dt_1 = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x (t-x)^{n-1} f(t) dt, \quad x < b, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (6-2)$$

به همین ترتیب مشتق کسری چپ و راست ریمان - لیوویل از مرتبه  $\alpha$  به صورت زیر تعریف می‌شود. فرض کنید  $\text{Re}(z) \geq 0, \alpha \in \mathbb{C}$  داریم:

$${}_a D_x^\alpha f(x) = \frac{d^n}{dx^n} I_x^{n-\alpha} f(x) =$$

یافته ارائه می‌شود. همچنین، ماتریس عملیاتی انتگرال مرتبه کسری ریمان-لیوویل در فصل ۴، بیان می‌شود. در فصل ۵، دو مدل برای تحلیل عددی معادلات دیفرانسیل-انتگرال کسری مطرح و به منظور بررسی عملکرد آنها، این دو مدل بر روی چندین مثال پیاده‌سازی شده است که نتایج عددی در فصل ۶ قابل رویت می‌باشد.

در فصل ۷، نتایج برآمده از این مقاله به طور مختصر بیان می‌گردد.

## ۲- تعاریف

### ۲-۱- چند جمله‌ای‌های ژاکوبی انتقال یافته

فرم تحلیلی چندجمله‌ای‌های ژاکوبی انتقال یافته به بازه  $[0, L]$ ، از درجه  $i$  به صورت زیر است: [۱۷]

$$p_{L,i}^{(\alpha,\beta)}(x) = \sum_{k=0}^i (-1)^{i-k} \frac{\Gamma(i+\beta+1)\Gamma(i+k+\alpha+1)}{\Gamma(k+\beta+1)\Gamma(i+\alpha+\beta+1)(i-k)! k! L^k} x^k \quad (1-2)$$

همچنین داریم:

$$p_{L,i}^{(\alpha,\beta)}(0) = (-1)^i \frac{\Gamma(i+\beta+1)}{\Gamma(\beta+1)i!}, \quad p_{L,i}^{(\alpha,\beta)}(L) = \frac{\Gamma(i+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)i!}.$$

چندجمله‌ای‌های ژاکوبی توابعی متعامد هستند یعنی داریم:

$$\int_0^L p_{L,j}^{(\alpha,\beta)}(x) p_{L,k}^{(\alpha,\beta)}(x) W_L^{(\alpha,\beta)}(x) dx = h_k \quad W_L^{(\alpha,\beta)}(x) = x^\beta (L-x)^\alpha \quad (2-2)$$

برای حل مسائل از چندجمله‌ای‌های انتقال یافته ژاکوبی با  $\alpha = -\frac{1}{2}$  و  $\beta = -\frac{1}{2}$  استفاده می‌نماییم که به چند جمله‌ای‌های چیشف نوع اول انتقال یافته به بازه  $[0, L]$  هستند.

### ۲-۲- مشتق و انتگرال کسری

عملگر انتگرال ریمان - لیوویل تعمیمی از دستور انتگرال کوشی است. در واقع در دستور انتگرال کوشی مقادیر را که متعلق به اعداد صحیح می‌باشند به مقادیر غیر صحیح

یکی از ویژگی‌های مهم که از خواص ذکر شده می‌توان درک کرد، آن است که مشتقات چپ و راست ریمان لیوویل توابع ثابت صفر نمی‌شود.

**نتیجه ۲.** فرض کنید  $\text{Re}(\alpha) > 0$  و  $n = [\text{Re}(\alpha)] + 1$  در اینصورت داریم [۲۱]:

الف) معادله  ${}_a D_x^\alpha f(x) = 0$  برقرار است اگر و تنها اگر

$$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j (x-a)^{\alpha-j}, c_j \in \mathbb{R}, j = 1, 2, \dots, n. \quad (18-2)$$

ب) معادله  ${}_x D_b^\alpha f(x) = 0$  برقرار است اگر و تنها اگر

$$f(x) = \sum_{j=1}^n d_j (b-x)^{\alpha-j}, d_j \in \mathbb{R}, j = 1, 2, \dots, n. \quad (19-2)$$

**۳-۲- مشتق مرتبه کسری کاپوتو**

در این قسمت به ارائه‌ی تعریف و برخی خواص مشتق مرتبه کسری کاپوتو می‌پردازیم. فرض کنید  $\Omega = [a, b]$  و  $-\infty < a < b < +\infty$  یک بازه متناهی بر محور حقیقی  $\mathbb{R}$  باشد. مشتقات از مرتبه کسری ریمان-لیوویل (۷-۲) و (۸-۲) را در نظر بگیرید. در اینصورت مشتق مرتبه کسری چپ و راست کاپوتو تابع دلخواه  $f(x)$  را به ترتیب با نمادهای  ${}_a^C D_x^\alpha f(x)$  و  ${}_x^C D_b^\alpha f(x)$  نمایش داده و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$${}_a^C D_x^\alpha f(x) = {}_a D_x^\alpha \left( f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right), \quad (20-2)$$

$${}_x^C D_b^\alpha f(x) = {}_x D_b^\alpha \left( f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(b)}{k!} (b-x)^k \right), \quad (21-2)$$

که در آن

$$n = \begin{cases} [\text{Re}(\alpha)] + 1 & \alpha \notin \mathbb{N}_0 \\ \alpha & \alpha \in \mathbb{N}_0 \end{cases}. \quad (22-2)$$

در حالت خاص وقتی  $0 < \text{Re}(\alpha) < 1$  روابط فوق به صورت زیر در می‌آیند:

$${}_a^C D_x^\alpha f(x) = {}_a D_x^\alpha (f(x) - f(a)), \quad (23-2)$$

$${}_x^C D_b^\alpha f(x) = {}_x D_b^\alpha (f(x) - f(b)). \quad (24-2)$$

$$\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t) dt, \quad n = [\text{Re}(\alpha)] + 1, x > a, \quad (7-2)$$

$${}_x D_b^\alpha f(x) = (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} I_b^{n-\alpha} f(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_x^b (t-x)^{n-\alpha-1} f(t) dt, \quad n = [\text{Re}(\alpha)] + 1, x < b. \quad (8-2)$$

در حالت خاص وقتی  $\alpha = n \in \mathbb{N}_0$  در اینصورت داریم:

$${}_a D_x^0 f(x) = f(x), \quad {}_a D_x^n f(x) = f^{(n)}(x), \quad (9-2)$$

$${}_x D_b^0 f(x) = f(x), \quad {}_x D_b^n f(x) = (-1)^n f^{(n)}(x). \quad (10-2)$$

اگر  $0 < \text{Re}(\alpha) < 1$  در اینصورت روابط (۷-۲) و (۸-۲) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$${}_a D_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x (x-t)^{-\alpha} f(t) dt, \quad x > a, \quad 0 < \text{Re}(\alpha) < 1 \quad (11-2)$$

$${}_x D_b^\alpha f(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_x^b (t-x)^{-\alpha} f(t) dt, \quad x < b, \quad 0 < \text{Re}(\alpha) < 1 \quad (12-2)$$

**نتیجه ۱.** اگر  $\text{Re}(\beta) > 0$  آنگاه داریم [۲۱]:

$${}_a I_x^\alpha (x-a)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)} (x-a)^{\beta+\alpha-1}, \quad \text{Re}(\alpha) > 0 \quad (13-2)$$

$${}_a D_x^\alpha (x-a)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (x-a)^{\beta-\alpha-1}, \quad \text{Re}(\alpha) \geq 0 \quad (14-2)$$

$${}_x I_b^\alpha (b-x)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)} (b-x)^{\beta+\alpha-1}, \quad \text{Re}(\alpha) > 0, \quad (15-2)$$

$${}_x D_b^\alpha (b-x)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (b-x)^{\beta-\alpha-1}, \quad \text{Re}(\alpha) \geq 0 \quad (16-2)$$

و همچنین برای  $j = 1, 2, \dots, [\text{Re}(\alpha)] + 1$  داریم:

$${}_a D_x^\alpha (x-a)^{\alpha-j} = 0, \quad {}_x D_b^\alpha (b-x)^{\alpha-j} = 0 \quad (17-2)$$

مرتبه کسری ریمان لیوویل و مشتق مرتبه کسری کاپوتو رو دید. همانطور که مشاهده شد، مشتق مرتبه کسری ریمان لیوویل عدد ثابت مخالف صفر می‌باشد در حالی که مشتق کاپوتو عددی ثابت برابر صفر می‌باشد.

**لم ۵.** فرض کنید  $\text{Re}(\alpha) > 0$  و  $f \in C[a, b]$  یا  $f \in L_\infty[a, b]$  در این صورت داریم [۲۱]:

$$\begin{aligned} \text{الف) اگر } \alpha \in \mathbb{N} \text{ و } \text{Re}(\alpha) \notin \mathbb{N} \text{ آنگاه داریم:} \\ {}_a^C D_x^\alpha I_x^\alpha f(x) = f(x), \quad (۳۲-۲) \\ {}_x^C D_b^\alpha I_b^\alpha f(x) = f(x). \end{aligned}$$

ب) اگر  $\text{Re}(\alpha) \in \mathbb{N}$  و  $\text{Im}(\alpha) \neq 0$  (قسمت موهومی  $\alpha$  آنگاه داریم:

$$\begin{aligned} {}_a^C D_x^\alpha I_x^\alpha f(x) = & \quad (۳۳-۲) \\ f(x) - \frac{(x-a)^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)} {}_a I_x^{\alpha-n+1} f(a^+), \\ {}_x^C D_b^\alpha I_b^\alpha f(x) = & \quad (۳۴-۲) \\ f(x) - \frac{(b-x)^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)} {}_x I_b^{\alpha-n+1} f(b^-), \end{aligned}$$

**لم ۶.** فرض کنید  $\text{Re}(\alpha) > 0$  و همچنین  $n$  به گونه‌ای باشد که در رابطه (۲۲-۲) صدق نماید و  $f \in C^n[a, b]$  یا  $f \in AC^n[a, b]$ ، در این صورت داریم [۲۱]:

$$\begin{aligned} {}_a I_x^\alpha {}_a^C D_x^\alpha f(x) = & \quad (۳۵-۲) \\ f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \\ {}_x I_b^\alpha {}_x^C D_b^\alpha f(x) = & \\ f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(b)}{k!} (b-x)^k & \quad (۳۶-۲) \end{aligned}$$

در حالت خاص چنانچه  $0 < \text{Re}(\alpha) < 1$  و  $f \in C[a, b]$  یا  $f \in AC[a, b]$ ، داریم:

$$\begin{aligned} {}_a I_x^\alpha {}_a^C D_x^\alpha f(x) = f(x) - f(a), \quad (۳۷-۲) \\ {}_x I_b^\alpha {}_x^C D_b^\alpha f(x) = f(x) - f(b). \end{aligned}$$

### ۳- ماتریس عملیاتی مشتق

فرض کنید  $u(x)$  یک چندجمله‌ای از درجه  $n$  باشد، می‌توان  $u(x)$  را به صورت زیر با چندجمله‌ای ژاکوبی تقریب زد [۲۲]:

**قضیه ۳.** فرض کنید  $\text{Re}(\alpha) > 0$  همچنین فرض کنیم به گونه‌ای باشد که در رابطه (۲۲-۲) صدق کند. در این صورت چنانچه  $f \in AC^n[a, b]$  آنگاه مشتقات مراتب کسری چپ و راست کاپوتو تقریباً همه جا موجود است و داریم:

الف) اگر  $\alpha \notin \mathbb{N}_0$  در این صورت تعاریف زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} {}_a^C D_x^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{f^{(n)}(t)}{(x-t)^{\alpha-n+1}} dt \\ &= {}_a I_x^{n-\alpha} f^{(n)}(x) \quad (۲۵-۲) \\ {}_x^C D_b^\alpha f(x) &= \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^b \frac{f^{(n)}(t)}{(t-x)^{\alpha-n+1}} dt \\ &= (-1)^n {}_x I_b^{n-\alpha} f^{(n)}(x) \quad (۲۶-۲) \end{aligned}$$

که در آن  $n = [\text{Re}(\alpha)] + 1$

ب) اگر  $\alpha = n \in \mathbb{N}_0$  در این صورت داریم:

$$\begin{aligned} {}_a^C D_x^\alpha f(x) &= f^{(n)}(x), \\ {}_x^C D_b^\alpha f(x) &= (-1)^n f^{(n)}(x). \quad (۲۷-۲) \end{aligned}$$

برهان. برای جزئیات اثبات به منابع [۳، ۴، ۱۹، ۲۰] مراجعه شود.

**نتیجه ۴.** فرض کنید  $\text{Re}(\alpha) > 0$  و همچنین فرض کنیم  $n$  به گونه‌ای باشد که در رابطه (۲۲-۲) صدق کند، در این صورت داریم:

$$\begin{aligned} {}_a^C D_x^\alpha (x-a)^{\beta-1} &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (x-a)^{\beta-\alpha-1} \\ \text{Re}(\beta) > n, & \quad (۲۸-۲) \\ {}_x^C D_b^\alpha (b-x)^{\beta-1} &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (b-x)^{\beta-\alpha-1} \\ \text{Re}(\beta) > n, & \quad (۲۹-۲) \end{aligned}$$

و همچنین

$$\begin{aligned} {}_a^C D_x^\alpha (x-a)^k = 0, \quad {}_x^C D_b^\alpha (b-x)^k = 0 \\ k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (۳۰-۲) \end{aligned}$$

در حالت خاص داریم:

$${}_a^C D_x^\alpha 1 = 0, \quad {}_x^C D_b^\alpha 1 = 0 \quad (۳۱-۲)$$

از نتیجه قبل می‌توان یکی از تفاوت‌های مهم بین مشتق

$$\frac{d^n \phi(x)}{dx^n} = (D^{(1)})^n \phi(x), \quad (5-3) \quad u(x) = \sum_{j=0}^m c_j p_{L,j}^{(\alpha,\beta)}(x) = c^T \phi(x) \quad (1-3)$$

که  $n \in N$  توان ماتریس  $D^{(1)}$  است و داریم:

$$D^{(n)} = (D^{(1)})^n, n = 1, 2, \dots \quad (6-3) \quad \phi(x) = [p_{L,0}^{(\alpha,\beta)}(x), p_{L,1}^{(\alpha,\beta)}(x), \dots, p_{L,m}^{(\alpha,\beta)}(x)]^T$$

**لم ۷.** فرض کنید  $p_{L,i}^{(\alpha,\beta)}(x)$  چندجمله‌ای ژاکوبی منتقل شده باشد آنگاه

$$D^v p_{L,i}^{(\alpha,\beta)}(x) = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, [v] - 1, \quad v > 0 \quad (2-3)$$

آنگاه ضرایب  $c_j$  به صورت زیر قابل محاسبه‌اند:

$$c_j = \frac{1}{h_j} \int_0^L W_L^{(\alpha,\beta)}(x) u(x) p_{L,j}^{(\alpha,\beta)}(x) dx$$

$$j = 0, 1, \dots$$

برهان. برای اثبات به منبع [۱۷] مراجعه شود. قضیه زیر ماتریس عملیاتی مشتق با مرتبه کسری چندجمله‌ای ژاکوبی انتقال یافته رابطه (۳-۳) را در حالت کلی نشان می‌دهد.

مشتق مرتبه اول بردار  $\phi(x)$  به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\frac{d\phi(x)}{dx} = D^{(1)}\phi(x) \quad (3-3)$$

که  $D^{(1)}$  یک ماتریس عملیاتی مشتق  $(m+1) \times (m+1)$  به صورت زیر است:

$$D^{(1)} = (d_{i,j}) = \begin{cases} C_1(i,j) & i > j, \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (4-3)$$

**قضیه ۸.** فرض کنید  $\phi(x)$  بردار ژاکوبی منتقل شده تعریف شده در رابطه (۱-۳) و  $v > 0$  باشد. آنگاه

$$D^v \phi(x) \simeq D^{(v)} \phi(x) \quad (7-3)$$

که  $C_1(i,j)$  به صورت زیر بدست می‌آید [۲۴، ۲۳]:

$$C_1(i,j) = \frac{L^{\alpha+\beta} (i+\alpha+\beta+1)(i+\alpha+\beta+2) \dots (i+j-1) \Gamma(j+\alpha+\beta+1)}{(i-j-1)! \Gamma(2j+\alpha+\beta+1)} \times {}_3F_2 \left( \begin{matrix} -i+1+j, & i+j+\alpha+\beta+2, & j+\alpha+1 \\ j+\alpha+2, & 2j+\alpha+\beta+2 \end{matrix}; 1 \right)$$

که  $D^{(v)}$  ماتریس عملیاتی مشتق  $(m+1) \times (m+1)$  از مرتبه  $v$  نوع کاپوتو به صورت زیر است [۱۷]:

$$D^{(v)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \Delta_v([v],0) & \Delta_v([v],1) & \Delta_v([v],2) & \dots & \Delta_v([v],m) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \Delta_v(i,0) & \Delta_v(i,1) & \Delta_v(i,2) & \dots & \Delta_v(i,m) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \Delta_v(m,0) & \Delta_v(m,1) & \Delta_v(m,2) & \dots & \Delta_v(m,m) \end{pmatrix}$$

برای اثبات به منبع [۲۳] مراجعه شود همچنین برای تعریف کلی سری‌های فوق هندسی بخصوص  $F_2$  به منبع [۲۴]، صفحه ۴۱ و صفحات ۱۰۴ - ۱۰۳. مراجعه شود.)

برای مثال، برای  $m$  زوج داریم:

$$D^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ C_1(1,0) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ C_1(2,0) & C_1(2,1) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ C_1(3,0) & C_1(3,1) & C_1(3,2) & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ C_1(m,0) & C_1(m,1) & C_1(m,2) & \dots & C_1(m,m-1) & 0 \end{pmatrix}$$

$$\delta_{ijk} = \frac{(-1)^{i-k} L^{\alpha+\beta-v+1} \Gamma(j+\beta+1) \Gamma(i+\beta+1) \Gamma(i+k+\alpha+\beta+1)}{h_j \Gamma(j+\alpha+\beta+1) \Gamma(k+\beta+1) \Gamma(i+\alpha+\beta+1) \Gamma(k-v+1) (i-k)!} \times \sum_{l=0}^j \frac{(-1)^l \Gamma(j+l+\alpha+\beta+1) \Gamma(\alpha+1) \Gamma(l+k+\beta-v+1)}{\Gamma(l+\beta+1) \Gamma(l+k+\alpha+\beta-v+2) (j-l)! l!}$$

همچنین در  $[v]$ ،  $D^{(v)}$  سطر اول ماتریس صفر است.

**۳-۱- ماتریس عملیاتی مشتق از مرتبه کسری چندجمله‌ای ژاکوبی**

با استفاده از رابطه (۳-۳) بدست می‌آوریم:

$$\times \sum_{l=0}^j \frac{(-1)^{j-l} \Gamma(j+l) \Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(l+k-v+\frac{1}{2})}{\Gamma(1+\frac{1}{2}) \Gamma(1+k-v+1) (j-l)!!}$$

به کمک خواص چندجمله‌ای‌های ژاکوبی انتقال یافته و انجام محاسبات طولانی داریم:

$$\delta_{ijk} = \theta_{ijk} = \frac{(-1)^{j-k} 2^i (i+k-1)! \Gamma(k-v+\frac{1}{2})}{\epsilon_j L^v \Gamma(k+\frac{1}{2}) (i-k)! \Gamma(k-v-j+1) \Gamma(k+j-v+1)}$$

$j = 0, 1, \dots, N$ .

سپس به راحتی می‌توان نشان داد:

$$\Delta_v(i, j) = S_v(i, j) = \sum_{k=[v]}^i \theta_{ijk}$$

برای آشنایی با  $\theta_{ijk}$ ,  $\epsilon_j$  و  $S_v(i, j)$  به مرجع [۱۷] رجوع شود.)

**نتیجه ۱۰.** اگر  $\alpha = \beta = 0$  و  $L = 1$  باشد، آنگاه  $\delta_{ijk}$  به صورت زیر است.

$$\delta_{ijk} = \frac{(-1)^{i-k} \Gamma(j+1) \Gamma(i+1) \Gamma(i+k+1)}{h_j \Gamma(j+1) \Gamma(k+1) \Gamma(i+1) \Gamma(k-v+1) (i-k)!}$$

$$\times \sum_{l=0}^j \frac{(-1)^{j-l} \Gamma(j+l+1) \Gamma(l+k-v+1)}{\Gamma(1+k-v+2) (j-l)!!}$$

به کمک خواص چندجمله‌ای‌های ژاکوبی انتقال یافته و انجام محاسبات طولانی داریم:

$$\delta_{ijk} = \theta_{ijk} = \frac{(-1)^{i+j+k+1} (i+k)! (j+l)!}{(2j+1) \sum_{l=0}^j \frac{(-1)^{i+j+k+1} (i+k)! (j+l)!}{(i-k)! (k)! \Gamma(i-v+1) (j-l)! (l!)^2 \Gamma(k+1-v+1)}}$$

سپس به راحتی می‌توان نشان داد:

$$\Delta_v(i, j) = \sum_{k=[v]}^i \theta_{ijk}$$

برای آشنایی با  $\theta_{ijk}$ ,  $\epsilon_j$  و  $S_v(i, j)$  به مرجع [۱۷] رجوع شود.)

#### ۴- ماتریس‌های عملیاتی انتگرال مرتبه کسری

##### ریمان-لیوویل

**تعریف ۱۱.** اگر عملگر انتگرال کسری ریمان-لیوویل از مرتبه  $v > 0$  بردار ژاکوبی  $\phi(x)$  را با  $I^v$  تعریف کنیم آنگاه داریم:

برهان. با استفاده از فرم تحلیلی چندجمله‌ای ژاکوبی  $p_{L,i}^{(\alpha,\beta)}(x)$  از درجه  $i$  داریم:

$$D^v p_{L,i}^{(\alpha,\beta)}(x) = \sum_{k=0}^i (-1)^{i-k} \frac{\Gamma(i+\beta+1) \Gamma(i+k+\alpha+1)}{\Gamma(k+\beta+1) \Gamma(i+\alpha+\beta+1) (i-k)! k! L^k} D^v x^k$$

$$= \sum_{k=[v]}^i (-1)^{i-k} \frac{\Gamma(i+\beta+1) \Gamma(i+k+\alpha+1)}{\Gamma(k+\beta+1) \Gamma(i+\alpha+\beta+1) (i-k)! k! L^k} x^{k-v}$$

که  $i = [v], [v] + 1, \dots$

حال می‌توان  $x^{k-v}$  با چند جمله‌ای‌های ژاکوبی انتقال یافته به شکل زیر تقریب زد.

$$x^{k-v} \simeq \sum_{j=0}^N b_{kj} p_{L,i}^{(\alpha,\beta)}(x)$$

به طوری که

$$b_{kj} = \frac{L^{\alpha+\beta-v+1} \Gamma(j+\beta+1)}{h_j \Gamma(j+\alpha+\beta+1)} \times \sum_{l=0}^j \frac{(-1)^{j-l} \Gamma(j+l+\alpha+\beta+1) \Gamma(\alpha+1) \Gamma(l+k+\beta-v+1)}{\Gamma(l+\beta+1) \Gamma(l+k+\alpha+\beta-v+2)}$$

با استفاده از معادله‌های (۹-۳)، (۸-۳) داریم:

$$D^v p_{L,i}^{(\alpha,\beta)}(x) = \sum_{j=0}^N \Delta_v(i, j) p_{L,i}^{(\alpha,\beta)}(x),$$

$i = [v], [v] + 1, \dots, N$ . (۱۰-۳)

بر این اساس با بازنویسی معادله (۱۰-۳) به شکل برداری داریم:

$$D^v p_{L,i}^{(\alpha,\beta)}(x) \simeq [\Delta_v(i, 0), \Delta_v(i, 1), \Delta_v(i, 2), \dots, \Delta_v(i, N)] \phi(x),$$

همچنین با توجه به لم (۷) می‌توان نوشت

$$D^v p_{L,i}^{(\alpha,\beta)}(x) \simeq [0, 0, 0, \dots, 0] \phi(x),$$

$i = 0, 1, 2, \dots, [v] - 1$ , (۱۲-۳)

با ترکیبی از معادله‌های (۱۱-۳)، (۱۲-۳) نتیجه مورد نظر به دست می‌آید.

در قضیه قبل اگر  $v = n \in \mathbb{N}$  آنگاه قضیه قبل همان نتیجه رابطه (۶-۳) را می‌دهد.

**نتیجه ۹.** اگر  $\alpha = \beta = \frac{-1}{2}$  باشد،  $\delta_{ijk}$  به صورت زیر است.

$$\delta_{ijk} = \frac{(-1)^{i-k} L^{-v} \Gamma(j+\frac{1}{2}) \Gamma(i+\frac{1}{2}) \Gamma(i+k)}{h_j \Gamma(j) \Gamma(k+\frac{1}{2}) \Gamma(i) \Gamma(k-v+1) (i-k)!}$$

می‌کنیم:

$$I^v \phi(x) \simeq P^{(v)} \phi(x) \quad (۱-۴)$$

روش اول: با استفاده از ماتریس عملیاتی مشتق مرتبه کسری کاپوتو [۱۷، ۱۸]

روش دوم: با استفاده از ماتریس عملیاتی انتگرال مرتبه کسری ریمان-لیوویل

که  $P^{(v)}$  ماتریس عملیاتی کسری ریمان-لیوویل از مرتبه  $v$  می‌باشد.

**قضیه ۱۲.** فرض کنید  $\phi(x)$  بردار ژاکوبی منتقل شده و  $v > 0$  باشد آنگاه

$$I^v \phi(x) \simeq P^{(v)} \phi(x) \quad (۲-۴)$$

**روش اول:** در این روش، توابع  $g(x)$ ،  $u(x)$  و  $f(x)$  را بصورت زیر تقریب زد:

$$u(x) \simeq \sum_{j=0}^m c_j p_{L,j}^{(\alpha,\beta)}(x) = c^T \phi(x), \quad (۳-۵)$$

$$g_i(x) \simeq \sum_{j=0}^m g_{i,j} p_{L,j}^{(\alpha,\beta)}(x) = G_i^T \phi(x), \quad (۴-۵)$$

$$f(x) \simeq \sum_{j=0}^m f_j p_{L,j}^{(\alpha,\beta)}(x) = F^T \phi(x), \quad (۵-۵)$$

که  $P^{(v)}$  ماتریس عملیاتی کسری ریمان - لیوویل  $(m+1) \times (m+1)$  از مرتبه  $v$  به صورت زیر می‌باشد [۱۸]:

$$P^{(v)} = \begin{pmatrix} \Omega_v(0,0,\alpha,\beta) & \Omega_v(0,1,\alpha,\beta) & \dots & \Omega_v(0,m,\alpha,\beta) \\ \Omega_v(1,0,\alpha,\beta) & \Omega_v(1,1,\alpha,\beta) & \dots & \Omega_v(1,m,\alpha,\beta) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \Omega_v(i,0,\alpha,\beta) & \Omega_v(i,1,\alpha,\beta) & \dots & \Omega_v(i,m,\alpha,\beta) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \Omega_v(m,0,\alpha,\beta) & \Omega_v(m,1,\alpha,\beta) & \dots & \Omega_v(m,m,\alpha,\beta) \end{pmatrix}$$

$$\Omega_v(i,j,\alpha,\beta) = \quad (۳-۴)$$

به طوریکه  $c \in \mathbb{R}^{(m+1) \times 1}$  بردار مجهول و  $G \in \mathbb{R}^{(m+1) \times 1}$ ،  $F \in \mathbb{R}^{(m+1) \times 1}$  بردار معلوم می‌باشد که از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$G_i = Q^{-1} \int_0^L W_L^{(\alpha,\beta)}(x) g_i(x) \phi(x) dx. \quad (۶-۵)$$

$$F = Q^{-1} \int_0^L W_L^{(\alpha,\beta)}(x) f(x) \phi(x) dx. \quad (۷-۵)$$

$$\sum_{k=0}^i \frac{(-1)^{i-k} \Gamma(i+\beta+1)(i+k+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(k+\beta+1)\Gamma(i+\alpha+\beta+1)(i-k)!\Gamma(k+v+1)} \times \sum_{j=0}^i \frac{(-1)^{i-j} \Gamma(j+f+\alpha+\beta+1)\Gamma(\alpha+1)\Gamma(f+k+v+\beta+1)(2j+\alpha+\beta+1)j! i^j}{\Gamma(j+\alpha+1)\Gamma(f+\beta+1)(j-i)!\Gamma(f+k+\alpha+\beta+v+2)}$$

با استفاده از روابط (۷-۳) و (۵-۳) داریم:

$$D^v u(x) \simeq c^T D^v \phi(x) \simeq c^T D^{(v)} \phi(x) \quad (۸-۵)$$

که برهان به منبع [۱۸] مراجعه شود.

بنابراین با استفاده از روابط (۳-۵)، (۴-۵)، (۵-۵) و (۵-۸) باقیمانده  $R_m(x)$  برای مساله (۱-۵) به صورت زیر در خواهد آمد:

$$R_m(x) = (c^T D^v \phi(x) + \sum_{i=0}^k G_i^T \phi(x) c^T D^{v_i} \phi(x) - F^T \phi(x) - \int_0^x K(x,s) c^T \phi(s) ds) \quad (۹-۵)$$

همچنین با جایگذاری روابط (۳-۵) و (۷-۳) در رابطه (۵-۹) داریم:

$$u^{(i)}(0) = c^T D^{(i)} \phi(0) = d_j, \quad (۱۰-۵)$$

$$j = 0, 1, \dots, n-1$$

به کمک روش نقطه گذاری [۲۵، ۱۷] دستگاه معادلات خطی با  $m+1$  معادله بدست می‌آید که با حل این

## ۵- حل عددی مساله

در این بخش ما با معادلات دیفرانسیل-انتگرال با مشتقات مرتبه کسری از نوع کاپوتو به شکل زیر سرو کار داریم:

$$D^v u(x) + \sum_{i=0}^k g_i(x) D^{v_i} u(x) = f(x) + \int_0^x K(x,s) u(s) ds, \quad 0 \leq x \leq T, \quad (۱-۵)$$

و شرایط اولیه

$$u^{(i)}(0) = d_i, \quad i = 0, 1, \dots, n-1 \quad (۲-۵)$$

که  $g_i(x)$  ( $i = 1, \dots, k$ ) و  $f(x)$  توابع معلوم،  $n-1 < v \leq n$ ،  $0 < v_k < v_{k-1} < \dots < v_1 < v$  و  $u(x)$  تابع مجهول می‌باشد. و تابع  $K$  یک تابع پیوسته از  $\{(x,s): 0 \leq s \leq x \leq T\}$  به  $\mathbb{R}$  می‌باشد. برای حل این مساله از دو روش استفاده



$$z(x) = I^{\nu} D^{\nu} z(x) \simeq c^T I^{\nu} \phi(x) \simeq c^T P^{(\nu)} \phi(x). \quad (18-5)$$

همچنین با استفاده از تعریف ۱۱ و روابط (۲-۷) و (۵-۱۴) داریم:

$$D^{\nu_i} z(x) \simeq c^T I^{\nu-\nu_i} \phi(x) \simeq c^T P^{(\nu-\nu_i)} \phi(x), \quad (19-5)$$

$i = 0, 1, \dots, k.$

بنابراین با استفاده از روابط (۵-۱۴)، (۵-۱۵) و (۵-۱۸) باقیمانده  $R_m(x)$  برای مساله (۵-۱۲) به صورت زیر خواهد بود:

$$R_m(x) = (c^T \phi(x) + \sum_{i=0}^k G_i^T \phi(x) c^T P^{(\nu-\nu_i)} \phi(x) - F^T \phi(x) - \int_0^x \hat{K}(x, s) c^T P^{(\nu)} \phi(s) ds) \quad (20-5)$$

با استفاده از رابطه (۵-۲۰) و روش نقطه‌گذاری، با  $(m+1)$  دستگاه معادله خطی ایجاد می‌شود که با حل این دستگاه بردار ضرایب مجهول  $c$  بدست می‌آید. در نتیجه از رابطه (۵-۱۸) داریم:

$$z(x) = c^T P^{(\nu)} \phi(x),$$

همچنین تقریبی از تابع مجهول  $u(x)$  که جواب مساله (۵-۱) و (۵-۲) می‌باشد از رابطه (۵-۱۱) به صورت زیر بدست می‌آید:

$$u(x) = \hat{u}(x) + c^T P^{(\nu)} \phi(x). \quad (21-5)$$

### ۶. نتایج عددی

برای نشان دادن میزان اثربخشی روش‌های بیان شده، آنها را بر روی چند مثال پیاده‌سازی می‌کنیم. در همه مثال‌ها از مشتق کسری کاپوتو استفاده شده است و  $u(x)$  را به عنوان جواب دقیق مساله و  $u_m(x)$  را به عنوان جواب تقریبی مساله می‌باشند. همچنین چندجمله‌ای‌های ژاکوبی مرتبه  $m$  با  $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$  (چندجمله‌ای چبیشف نوع اول) را در نظر می‌گیریم. لازم به ذکر است در بعضی از مثال‌ها فقط جواب دقیق معادله با مشتق صحیح وجود دارد و جواب معادله با مشتق کسری در دسترس نیست. در اینگونه معادلات

دستگاه به راحتی می‌توان بردار مجهول  $c$  را بدست آورد و سپس با استفاده از رابطه (۵-۳) تقریبی از تابع مجهول  $u(x)$  که جواب مساله اصلی می‌باشد حاصل می‌شود.

**روش دوم:** در این روش ابتدا با یک تغییر متغیر سعی می‌شود مساله اصلی را به یک مساله با شرایط اولیه صفر تبدیل نماییم. بنابراین شرایط اولیه مساله اصلی در مساله جدید صفر خواهد بود. بنابراین تعریف می‌کنیم:

$$z(x) = u(x) - \hat{u}(x), \quad (11-5)$$

که  $\hat{u}(x)$  تابعی معلوم می‌باشد که در شرایط اولیه (۵-۲) صدق می‌نماید و با استفاده از چندجمله‌ای تیلور تعیین می‌شود. به راحتی می‌توان دید که  $z^{(i)}(0) = 0$  ( $i = 0, 1, \dots, n-1$ ) بنابراین با جایگذاری (۵-۱۱) در مساله (۵-۱) و (۵-۲) به مساله زیر خواهیم رسید:

$$D^{\nu} z(x) + \sum_{i=0}^k \hat{g}_i(x) D^{\nu_i} z(x) = \hat{f}(x) + \int_0^x \hat{K}(x, s) z(s) ds, \quad 0 \leq x \leq T; \quad (12-5)$$

$$z^{(i)}(0) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n-1, \quad (13-5)$$

برای حل مساله (۵-۱۲) حال توابع  $D^{\nu} z(x)$ ،  $\hat{g}(x)$  و  $\hat{f}(x)$  را با چندجمله‌ای ژاکوبی انتقال یافته به صورت زیر تقریب زد:

$$D^{\nu} z(x) \simeq \sum_{j=0}^m c_j p_{L,j}^{(\alpha,\beta)}(x) = c^T \phi(x), \quad (14-5)$$

$$\hat{g}_i(x) \simeq \sum_{j=0}^m g_{i,j} p_{L,j}^{(\alpha,\beta)}(x) = G_i^T \phi(x), \quad (15-5)$$

$$\hat{f}(x) \simeq \sum_{j=0}^m f_j p_{L,j}^{(\alpha,\beta)}(x) = F^T \phi(x), \quad (16-5)$$

که  $F^T = [f_0, \dots, f_m]$ ، و  $G_i^T = [g_{i,0}, \dots, g_{i,m}]$ ، بردار معلوم و  $c^T = [c_0, \dots, c_m]$  بردار مجهول می‌باشد. با استفاده از لم ۶ و شرایط اولیه (۵-۱۳) می‌توان نتیجه گرفت:

$$z(x) = I^{\nu} D^{\nu} z(x) + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{z^{(i)}(0)}{i!} x^i = I^{\nu} D^{\nu} z(x). \quad (17-5)$$

با استفاده از تعریف ۱۱ و روابط (۵-۱۴)، (۵-۱۷) داریم:

شده است و خطای ریشه میانگین مربع آن برای  $k = 3$  و  $M = 2$  مضربی از  $10^{-7}$  است. (با استفاده از ۲۴ پایه در بازه  $[0, 1]$ ) و ما با هر دو روش با  $m = 9$  (یعنی ۱۰ پایه) تقریب قابل قبولی در مقایسه با آن روش بدست آوردیم.

**مثال ۲.** مسالهی غیرخطی با مقدار اولیه زیر را در نظر بگیرید [۲۷]:

$$D^{\frac{3}{4}}u(x) - \int_0^x xt[u(t)]^4 dt = f(x), \quad (۲-۶)$$

$$0 \leq x < 1, \quad u(0) = 0$$

که در آن

$$f(x) = \frac{32x^{\frac{5}{4}}}{5\Gamma[\frac{1}{4}]} - \frac{4x^{\frac{1}{4}}}{\Gamma[\frac{1}{4}]} - \frac{x^7}{6} + \frac{4x^8}{7} - \frac{3x^9}{4} + \frac{4x^{10}}{9} - \frac{x^{11}}{10},$$

جواب دقیق این مساله به صورت زیر می‌باشد [۲۷]:

$$u(x) = x^2 - x$$

این مساله را با هر دو روش حل می‌نماییم. شکل ۲ مقایسه جواب دقیق با جواب‌های تقریبی را با روش اول برای  $m = 9$  و  $m = 4$  را نشان می‌دهد.

نمی‌توان خطای مطلق در مشتق مرتبه کسری را رسم نمود زیرا جواب دقیقی وجود ندارد، بلکه با میل کردن جواب‌های مشتق کسری به سمت جواب مشتق صحیح می‌توان گفت که روش بدرستی عمل می‌نماید و از نزدیکی جواب تقریبی مشتق کسری و جواب دقیق مشتق صحیح می‌توان استدلال نمود که روش کارایی و عملکرد خوبی دارد.

**مثال ۱.** مسالهی مقدار اولیه غیرخطی با مرتبه کسری زیر را در نظر بگیرید [۲۶]:

$$D^{\frac{5}{3}}u(x) - \int_0^1 (x+t)^2[u(t)]^3 dt = \quad (۱-۶)$$

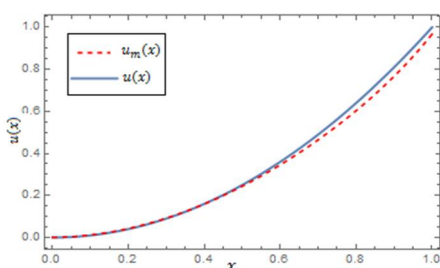
$$\frac{6}{\Gamma(\frac{1}{3})}x^{\frac{1}{3}} - \frac{x^2}{7} - \frac{x}{4} - \frac{1}{9}, \quad 0 \leq x < 1,$$

$u(0) = u'(0) = 0$  جواب دقیق این مساله به صورت زیر است [۲۶]:

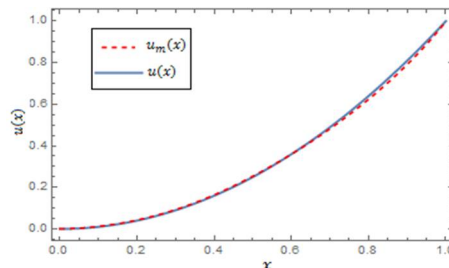
$$u(x) = x^2$$

این مساله بوسیله هر دو روش حل شده است. نمودارهای مقایسه جواب تقریبی و جواب دقیق برای  $m = 9$  در شکل‌های ۱ آمده است. زمان محاسباتی لازم برای روش اول ( $T_1$ ) و روش دوم ( $T_2$ ) در جدول ۱ بیان شد. این مثال در مقاله [۲۶] با کمک موجک چیشف نوع دوم حل

شکل ۱: مقایسه  $u_m(x)$  و  $u(x)$  با  $m = 9$  برای مثال ۱



(ب) روش اول

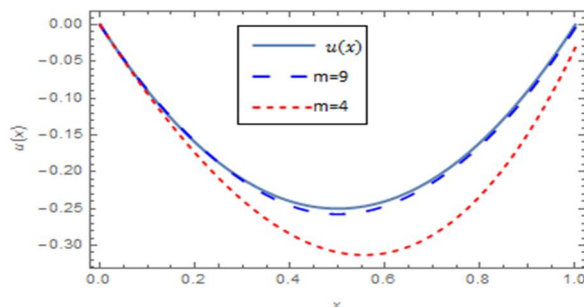


(ا) روش دوم

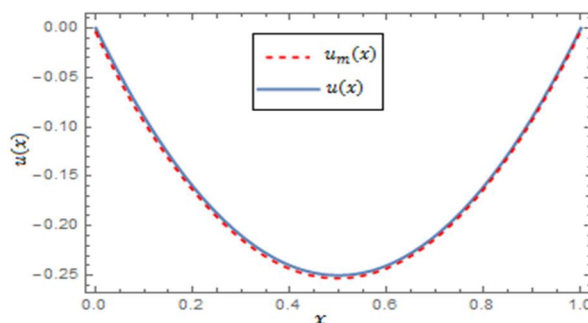
جدول ۱: زمان محاسباتی برای مثال ۱ با روش اول ( $T_1$ ) و روش دوم ( $T_2$ ) برحسب ثانیه

$m$	۴	۹
$T_1$	۲۲۱	۲۵۴
$T_2$	۲۶۶	۳۰۸

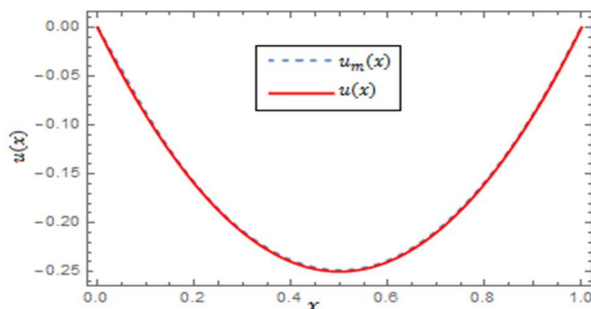
شکل ۲: نمودار مقایسه  $u(x)$  و  $u_m(x)$  برای  $m=4,9$  در مثال ۲ با روش اول



شکل ۳: نمودار مقایسه  $u(x)$  و  $u_m(x)$  برای  $m=9$  در مثال ۲ با روش دوم



شکل ۴: مقایسه  $u(x)$  و  $u_m(x)$  برای  $m=9$  در مثال ۳ با روش اول



**مثال ۳.** معادله‌ی دیفرانسیل-انتگرال کسری زیر را در نظر بگیرید [۲۶]:

$$D_x^{\frac{1}{2}} u(x) - \int_0^1 xt[u(t)]^4 dt = \quad (3-6)$$

$$\frac{1}{\Gamma(1/2)} \left( \frac{8}{3} x^{3/2} - 2x^{1/2} \right) - \frac{x}{1260}, \quad 0 \leq x < 1$$

جواب دقیق این مساله با شرط  $y(0) = 0$  به صورت  $u(x) = x^2 - x$  می‌باشد. نمودار مقایسه جواب تقریبی و جواب دقیق با استفاده از روش اول در شکل ۴

همچنین شکل ۳ مقایسه جواب دقیق با جواب‌های تقریبی را با روش دوم برای  $m=9$  را نشان می‌دهد. در مقاله [۲۷] روش موجک چبیشف نوع دوم با مقادیر  $M, K$  مختلف برای حل این مثال بکار برده شده است و مقایسه نتایج عددی نشان می‌دهد که هر دو روش عددی ارائه شده در این مقاله با تعداد پایه‌های کمتر، جواب‌های دقیق تری بدست می‌دهد. که این مزیت و برتری این دو روش نسبت به روش موجک چبیشف نوع دوم می‌باشد.

با استفاده از روش اول و دوم، با  $m=9$  این مساله را حل کردیم، مقایسه  $u(x)$  و  $u_m(x)$  با  $m=9$  و  $0.95$  و  $v = 0.98$  با روش اول و مقایسه  $u(x)$  و  $u_m(x)$  با  $m=9$  و  $v = 0.98$  با روش دوم در شکل ۸ ارائه شده است. خطای مطلق برای  $m=9$  و  $v = 0.98$  با روش اول و روش دوم در جدول ۲ ارائه شده است.

**مثال ۵.** مساله‌ی معادله دیفرانسیل -انتگرال کسری زیر را در نظر بگیرید [۲۹]:

$$D^{5/3}y(x) = g(x) - xy(x) + \frac{1}{\Gamma(6.5)} \int_0^x (x-s)^{5.5} (y(s))^3 ds, x \in [0,1] \quad (5-6)$$

جواب دقیق به صورت  $y(x) = x^{5/3}$  می‌باشد و مقدار  $g(x)$  از حل معادله برای مقدار دقیق جواب حاصل می‌شود. مقایسه  $u(x)$  و  $u_m(x)$  با  $m=9$  با روش اول و دوم در شکل ۸ ارائه شده است. خطای مطلق برای  $m=9$  با روش اول و روش دوم در جدول ۳ ارائه شده است. همچنین زمان محاسباتی لازم برای روش اول ( $T_1$ ) و روش دوم ( $T_2$ ) در جدول ۴ نشان داده شده است.

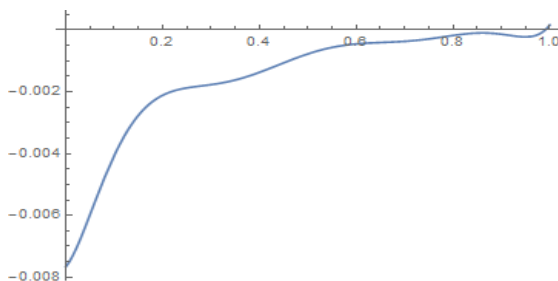
و نمودار خطای  $u(x) - u_m(x)$  با  $m=9$  و  $m=19$  با روش دوم در شکل‌های ۵ و ۶ ارائه شده است. این مثال در مقاله [۲۶] با کمک موجک چیشف نوع دوم حل شده است و خطای ریشه میانگین مربع آن برای  $k = 3$  و  $M = 2$  مضربی از  $10^{-5}$  است (با استفاده از پایه در بازه  $[0,1]$ ) و ما با روش دوم با  $m=9$  حل نمودیم. شکل ۵ نشان می‌دهد که خطای مطلق روش ارائه شده (با استفاده از  $10^{-3}$  پایه در بازه  $[0,1]$ ) مضربی از  $10^{-3}$  است. در مقام مقایسه، این مقدار خطا با این تعداد پایه خطای معقول می‌باشد و نشان می‌دهد که روش با تعداد پایه‌ها و محاسبات کمتری جواب قابل قبولی می‌دهد.

**مثال ۴.** معادله‌ی دیفرانسیل -انتگرال کسری زیر را در نظر بگیرید [۲۸]:

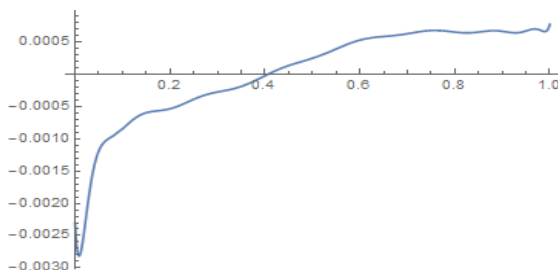
$$D^v u(x) = 1 + 2x - u(x) + x(1 + 2x) \int_0^x e^{t(x-t)} u(t) dt \quad (4-6)$$

که  $y(0) = 1$  و جواب دقیق برای  $v = 1$  برابر است با  $u(x) = e^{x^2}$

شکل ۵: نمودار خطای  $u(x) - u_m(x)$  با  $m=9$  برای مثال ۳ با روش دوم



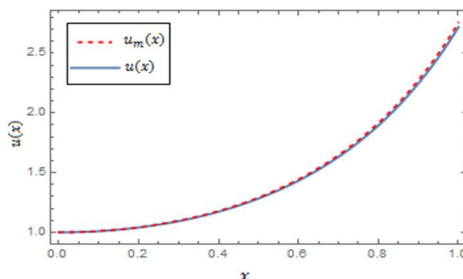
شکل ۶: نمودار خطای  $u(x) - u_m(x)$  با  $m=19$  برای مثال ۳ با روش دوم



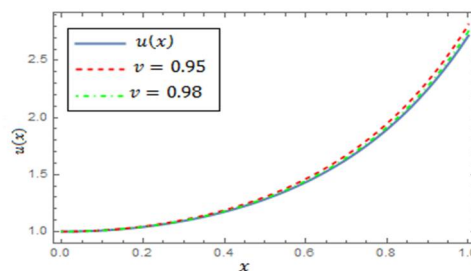
جدول ۲: خطای مطلق با  $m = 9$  برای مثال ۴ با روش اول ( $E_1$ ) و روش دوم ( $E_2$ )

$v=0.98$	$E_1$	$E_2$
$x=0.1$	$6.78998 \times 10^{-4}$	$6.67875 \times 10^{-4}$
$x=0.3$	$3.72515 \times 10^{-3}$	$3.74314 \times 10^{-3}$
$x=0.6$	$1.13288 \times 10^{-2}$	$8.2422 \times 10^{-3}$
$x=0.8$	$2.04401 \times 10^{-2}$	$2.04057 \times 10^{-3}$

شکل ۷: مقایسه  $u(x)$  و  $u_m(x)$  برای مثال ۴



(ب) روش دوم



(ا) روش اول

$y(0) = 0$

$$f(t) = \frac{2}{\Gamma(2.5)}t^{1.5} + \frac{1}{\Gamma(1.5)}t^{.5} + 2t - 3t\cos(t) + t^3\cos(t) - t^2\sin(t)$$

می‌باشد و جواب دقیق آن  $y(t) = t^2 + t$  می‌باشد: مقایسه  $y(t)$  و  $y_m(t)$  با  $m=9$  برای روش اول و دوم در شکل ۱۰ و خطای مطلق برای  $m=4,9$  با روش اول در جدول ۵ ارائه شده است. این که خطا جواب تقریبی مضریمی از  $10^{-3}$  است، به ما اطمینان خاطر می‌دهد که روش بدرستی عمل می‌نماید و می‌توان به آن اعتماد نمود.

که

و

مثال ۶. مسالهی معادله دیفرانسیل-انتگرال کسری زیر را در نظر بگیرید [۲۹]:

$$D_{\frac{5}{3}}y(x) + y'(x) + xy(x) = g(x) + \frac{1}{2} \int_0^x (x-s)^2 y(s) ds, \quad (6-6)$$

جواب دقیق به صورت  $y(x) = \frac{x^{\frac{10}{3}}}{\Gamma(\frac{13}{3})} + \frac{2x^{\frac{11}{3}}}{\Gamma(\frac{14}{3})} - \frac{x^4}{12}$  می‌باشد و مقدار  $g(x)$  از حل معادله برای مقدار دقیق جواب حاصل می‌شود. مقایسه  $u(x)$  و  $u_m(x)$  با روش اول و دوم در شکل ۹ ارائه شده است.

مثال ۷. مسالهی مقدار اولیه غیرخطی زیر را در نظر بگیرید [۸]:

$$D_t^5 y(t) = (\cos(t) - \sin(t))y(t) + t \int_0^t \sin(s)y(s) ds + f(t) \quad (7-6)$$

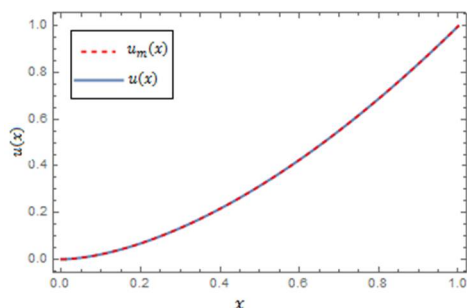
جدول ۳: خطای مطلق با  $m=9$  برای مثال ۵ با روش اول ( $E_1$ ) و روش دوم ( $E_2$ )

	$E_1$	$E_2$
$x=0.1$	$5.63281 \times 10^{-4}$	$4.42189 \times 10^{-4}$
$x=0.3$	$8.32659 \times 10^{-3}$	$4.25731 \times 10^{-3}$
$x=0.6$	$4.51231 \times 10^{-2}$	$7.54126 \times 10^{-3}$
$x=0.8$	$3.0124 \times 10^{-2}$	$1.53912 \times 10^{-2}$

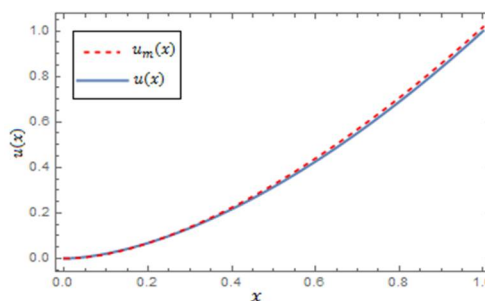
جدول ۴: زمان محاسباتی برای مثال ۵ با روش (T<sub>1</sub>) و روش دوم (T<sub>2</sub>) بر حسب ثانیه

$m$	۴	۹
$T_1$	۲۵۸	۳۹۳
$T_2$	۲۳۵	۳۲۱

شکل ۸: مقایسه  $u_m(x)$  و  $u(x)$  برای  $m=9$  مثال ۵



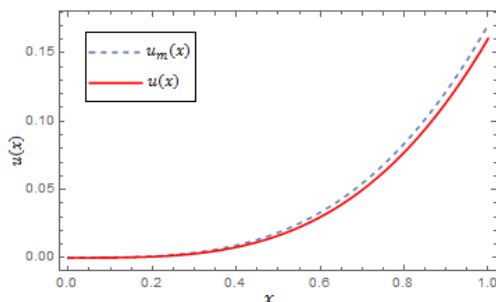
(ب) روش دوم



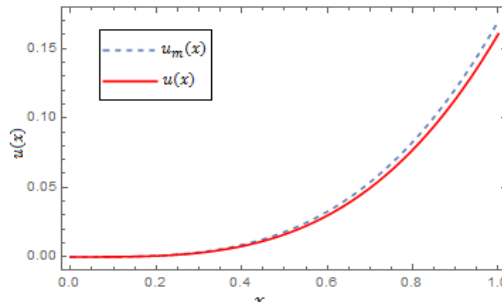
(ا) روش اول

مثال ۸. مساله‌ی مقدار اولیه غیرخطی زیر را در نظر بگیرید [۱]:  
 $D_x^5 u(x) = g(x)u(x) + f(x) + \sqrt{x} \int_0^x u^2(t) dt$  (۸-۶)  
 $g(x) = 2\sqrt{x} + 2x^{\frac{3}{2}} - (\sqrt{x} + x^{\frac{3}{2}}) \ln(1+x)$  ,  
 $f(x) = \frac{2\text{Arcsinh}\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}\sqrt{1+x}} - 2x^{\frac{3}{2}}$ ,  
 که  $u(0) = 0$  و جواب دقیق آن  $u(x) = \ln(1+x)$  می‌باشد. این مساله را با استفاده از روش اول و دوم، با  $m=9$  حل شده و مقایسه میان  $u(x)$  و  $u_m(x)$  در شکل ۱۱ ارائه شده است. بعلاوه زمان محاسباتی لازم برای روش اول ( $T_1$ ) و روش دوم ( $T_2$ ) در جدول ۶ نشان داده شده است. این مثال در مقاله [۱] با استفاده از روش هم مکانی حل شده است و ماکزیمم خطا برای  $N=4$  مضربی از  $10^{-2}$  است. خطای نتایج ارائه شده برای  $m=9$  در روش اول مضربی از  $10^{-3}$  و در روش دوم مضربی از  $10^{-3}$  می‌باشد که نشان می‌دهد این دو روش، کارایی همانند روش مقاله [۱] دارند.

شکل ۹: مقایسه  $u_m(x)$  و  $u(x)$  برای  $m=9$  مثال ۶



(ب) روش دوم



(ا) روش اول

جدول ۵: خطای مطلق با  $m=4,9$  برای مثال ۷ از روش اول

m	4	9
x=0.1	$5.12349 \times 10^{-3}$	$2.6936 \times 10^{-3}$
x=0.3	$8.07784 \times 10^{-3}$	$4.25731 \times 10^{-3}$
x=0.5	$1.31722 \times 10^{-3}$	$3.39864 \times 10^{-3}$
x=0.8	$8.18285 \times 10^{-3}$	$4.50265 \times 10^{-3}$

$$f(x) = \sinh(x) + \frac{1}{2} \cosh(x) \sinh(x) - \frac{x}{2}$$

مثال ۹. معادله‌ی دیفرانسیل-انتگرال غیرخطی کسری

زیر را در نظر بگیرید [۲۷]:

می‌باشد و جواب دقیق آن برای  $v=2$  برابراست با  $u(x) = \sinh(x)$  می‌باشد.

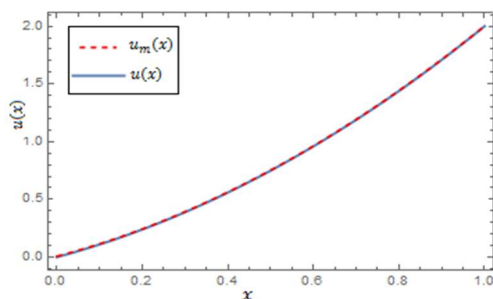
$$D^v u(x) + \int_0^x [u(s)]^2 ds = f(x) \quad (9-6)$$

$$0 \leq x < 1, \quad 1 < v \leq 2,$$

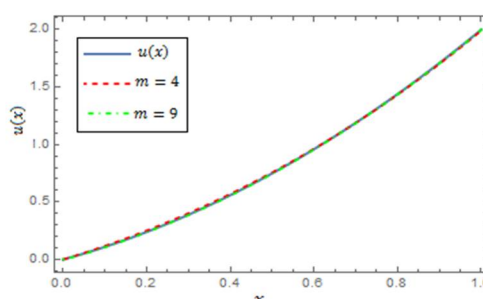
$$y(0) = 0, y'(0) = 1$$

9

شکل ۱۰: مقایسه  $y(t)$  و  $y_m(t)$  برای  $m=9$  مثال ۷



(ب) روش دوم

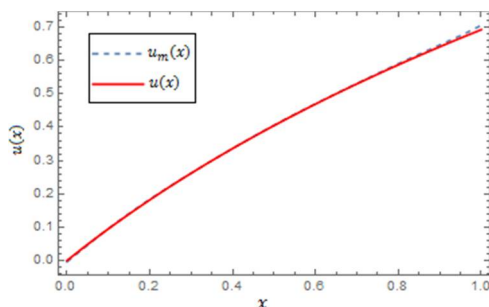


(ا) روش اول

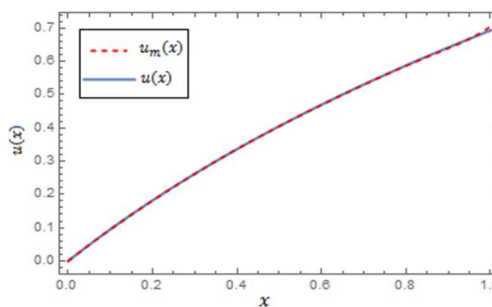
جدول ۶: زمان محاسباتی برای مثال ۸ با روش اول ( $T_1$ ) و روش دوم ( $T_2$ ) برحسب ثانیه

m	۴	۹
$T_1$	۲۶۸	۴۰۳
$T_2$	۲۲۳	۳۷۵

شکل ۱۱: مقایسه  $u_m(x)$  و  $u(x)$  برای  $m=9$  مثال ۸



(ب) روش دوم

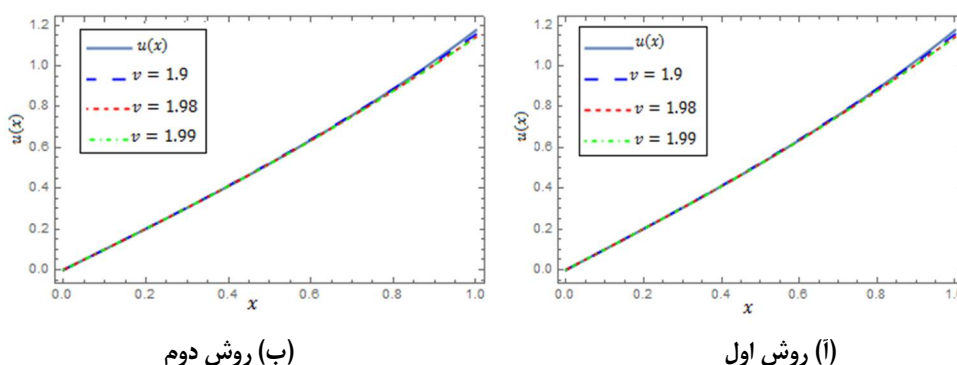


(ا) روش اول

دوم حل نموده می‌توان گفت که برای  $k=3$  و  $M=2$  خطا مضربی از  $10^{-3}$  می‌باشد (یعنی با کمک ۲۴ پایه)، امادر این مقاله با استفاده از ۱۰ پایه در هر دو روش خطا مضربی از  $10^{-3}$  است که نشان می‌دهد که با تعداد پایه کمتر می‌توان جواب مشابهی یافت.

این مساله را با هر دو روش حل می‌نماییم. شکل ۱۲ مقایسه جواب دقیق با جواب‌های تقریبی برای  $m=9$  و  $v=1/99, 1/98, 1/9$  با روش اول و روش دوم را نشان می‌دهد. همچنین مقادیر خطای مطلق با  $m=9$  و  $v=2$  برای مثال ۹ با روش اول و روش دوم در جدول ۷ ارائه شده است. به منظور انجام مقایسه روش ارائه شده در مقاله [۲۷] که این مثال را با روش موجک چبیشف نوع

شکل ۱۲: مقایسه  $u(x)$  و  $u_m(x)$  با  $m=9$  و  $v=1/99, 1/98, 1/9$  برای مثال ۹



جدول ۷: خطای مطلق با  $m=9$  و  $v=2$  برای مثال ۹ با روش اول ( $E_1$ ) و روش دوم ( $E_2$ )

m	$E_1$	$E_2$
x=0.1	$1.49744 \times 10^{-5}$	$1.19482 \times 10^{-5}$
x=0.3	$1.5202 \times 10^{-4}$	$1.41267 \times 10^{-4}$
x=0.5	$1.46057 \times 10^{-3}$	$2.79892 \times 10^{-4}$
x=0.8	$9.37089 \times 10^{-3}$	$9.40075 \times 10^{-3}$

می‌دهد که برای معادلات دیفرانسیل هایی که جواب آنها بصورت چند جمله‌ای می‌باشد بهتر است از روش اول استفاده شود زیرا با درجه‌ی کم چندجمله‌ای دقت بالایی بدست می‌آید. اما در معادلاتی غیرخطی که جوابی بصورت توابع متعالی یا مثلثاتی دارند بهتر است که روش دوم بکار گرفته شود. همچنین با بررسی هر دو روش به نتیجه دست یافته شد که هر دو روش پایدارند و برای انجام محاسبات سنگین و معادلات پیچیده قابل اعتماد می‌باشند.

### ۷- نتیجه گیری

در این مقاله، ماتریس‌های عملیاتی پایه‌های چندجمله‌ای ژاکوبی انتقال یافته برای عملگرهای انتگرال با مرتبه کسری ریمان - لیوویل و مشتق با مرتبه کسری کاپوتو توضیح داده شده است. سپس دو روش برای حل معادلات دیفرانسیل چندگانه خطی و غیرخطی با استفاده از ریشه‌های چندجمله‌ای ژاکوبی انتقال یافته مطرح شد. در روش اول از ماتریس عملیاتی مشتق کسری کاپوتو و در روش دوم با کمک ماتریس عملیاتی انتگرال کسری ریمان لیوویل استفاده گردید. در هر دو روش با استفاده از تکنیک نقطه‌گذاری به یک دستگاه معادلات جبری خطی یا غیرخطی خواهیم رسید. نتایج عددی بدست آمده نشان



Adomian decomposition method, Appl. Math. Comput. 182, 2006, 1048-1055.

[10] M. Inc, The approximate and exact solutions of the space - and time-fractional Burgers equations with initial conditions by variational iteration method, J. Math. Anal. Appl. 345, 2008, 476-484.

[11] S. Momani, Z. Odibat, Analytical approach to linear fractional partial differential equations arising in fluid mechanics, Phys. Lett. A 355, 2006, 271-279.

[12] Z. Odibat, S. Momani, Application of variational iteration method to nonlinear differential equations of fractional order, Int. J. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 7, 2006, 271-279.

[13] S. Momani, Z. Odibat, Homotopy perturbation method for nonlinear partial differential equations of fractional order, Phys. Lett. A 365, 2007, 345-35

[14] N. H. Sweilam, M. M. Khader, R. F. Al-Bar, Numerical studies for a multi-order fractional differential equation, Phys. Lett. A 371, 2007, 26-33.

[15] I. Hashim, O. Abdulaziz, S. Momani, Homotopy analysis method for fractional IVPs, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 14, 2009, 674-684.

[16] E. A. Rawashdeh, Numerical solution of fractional integro-differential equations by collocation method, Appl. Math. Comput. 176, 2006, 1-6.

[17] E. H. Doha, A. H. Bhrawy, S. S. Ezz-Eldien, A new Jacobi operational matrix :an application for solving fractional differential equations, Appl. Math. Model. 36, 2012, 4931-4943.

[18] A. H. Bhrawy, M. M. Tharwat, M.

## فهرست منابع

[1] M.R. Eslahchi , Mehdi Dehghan , M. Parvizi, Application of the collocation method for solving nonlinear fractional integro-differential equations, Applied Mathematics 257 (2014) 105–128.

[2] K. Oldham, J. Spanier, The Fractional Calculus. Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order, in: Mathematics in Science and Engineering, Academic Press, 1974.

[3] I. Podlubny, Fractional Differential Equations, Academic Press, New York, NY, USA, 1999.

[4] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo, Theory and Applications of Fractional Differential Equations, Elsevier, San Diego, Calif, USA, 2006.

[5] S. Momani, N.T. Shawagfeh, Decomposition method for solving fractional Riccati differential equations, Appl. Math. Comput. 182, 2006, 1083-1092.

[6] S. Momani, M.A. Noor, Numerical methods for fourth-order fractional integro-differential equations, Appl. Math. Comput. 182, 2006, 754-76

[7] V. D. Gejji, H. Jafari, Solving a multi-order fractional differential equation, Appl. Math. Comput. 189, 2007, 541-548.

[8] S. S. Ray, K. S. Chaudhuri, R. K. Bera, Analytical approximate solution of nonlinear dynamic system containing fractional derivative by modified decomposition method, Appl. Math. Comput. 182, 2006, 544-552.

[9] Q. Wang, Numerical solutions for fractional KdV-Burgers equation by

Volterra integro-differential equations by SCW, *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat.* 18 ,2013, 1203–1213.

[28] Y. Yang, Y. Chen, Y. Huang, Convergence Analysis of the Jacobi Spectral-Collocation Method for Fractional Integro-Differential Equations, *Acta Mathematica Scientia.* 2014, 673–69

[29] S. Mashayekhi, M. Razzaghi, Numerical solution of nonlinear fractional integro-differential equations by hybrid functions, *Engineering Analysis with Boundary Elements.* 56, 2015, 81–89.

A. Alghamdi, A new operational matrix of fractional integration for shifted Jacobi polynomials, *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.*, 2013.

[19] R. Hilfer, Applications of fractional calculus in physics, World Scientific Publishing Co. Inc. River Edge, NJ, 200

[20] D. Baleanu, K. Diethelm, E. Scalas, J. J. Trujillo, Fractional Calculus Models and Numerical Methods, Series on Complexity, Nonlinearity and Chaos, World Scientific, Hackensack, NJ, USA, 2012.

[21] M. Alipour, Numerical solution for fractional differential equations and optimal control problems, PhD Thesis, 2013.

[22] E. Kreyszig, Introductory functional analysis with applications, John Wiley and Sons Incorporated, 1978.

[23] E. H. Doha, On the construction of recurrence relations for the expansion and connection coefficients in series of Jacobi polynomials, *J. Phys. A Math. Gen.* 37, 2004, 657-675.

[24] Y. Luke, The special functions and their approximations, Academic Press, New York, 1969.

[25] C. Canuto, M. Y. Hussaini, A. Quarteroni, T. A. Zang, Spectral Methods in Fluid Dynamic, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1988.

[26] Li Zhu , Qibin Fan, Solving fractional nonlinear Fredholm integro-differential equations by the second kind Chebyshev wavelet, *Commun Nonlinear Sci. Numer Simulat.* 17 ,2012, 2333–2341.

[27] Li Zhu , Qibin Fan, Numerical solution of nonlinear fractional-order

