

## مدل‌بندی مسأله هضم جزئی بصورت مسأله شبکه جریان

رضا ندیمی<sup>۱\*</sup>، امید رنجبر<sup>۲</sup>

<sup>(۱)</sup> استادیار، گروه علوم کامپیوتر، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه مازندران، بابلسر، ایران

<sup>(۲)</sup> گروه علوم کامپیوتر، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه مازندران، بابلسر، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۶/۰۷/۰۶ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۸/۰۴/۲۲

### چکیده

نگاشت نقاط مرزی<sup>۱</sup> یکی از مسائل جالب توجه در زیست‌شناسی محاسباتی به شمار می‌رود. یک رشته DNA به صورت دنباله‌ای از حروف A, T, C, G می‌باشد. هنگامی که یک آنزیم محدود کننده به یک محل DNA اضافه می‌شود، مولکول DNA از مکان‌های خاصی بریده می‌شود. هدف از نگاشت نقاط مرزی پیدا کردن نقاط برش برای یک آنزیم معین است. در روش هضم جزئی، برش‌ها طوری انجام می‌شود که فاصله دو به دوی همه نقاط برش حاصل شود. در بیان ریاضی مسأله، فاصله دو به دوی n نقطه واقع بر یک پاره خط داده شده است و هدف بدست آوردن خود این نقاط است. در بیوانفورماتیک این مسأله به مسأله هضم جزئی<sup>۲</sup> معروف شده است. در این مقاله یک مدل شبکه جریان تعمیم یافته برای مسأله ارایه می‌دهیم. با توجه به اینکه کلاس پیچیدگی این مسأله یکی از قدیمی‌ترین و مهمترین مسایل باز در بیوانفورماتیک نظری است (تاکنون نه الگوریتمی با زمان چند جمله‌ای و نه اثباتی بر Np-complete بودن آن ارایه شده است)، کاهش مسأله PDP به مسأله شبکه جریان درجه جدیدی را برای چالش با این مسأله می‌گشاید.

**واژه‌های کلیدی:** نگاشت نقاط مرزی، شبکه جریان، مسأله هضم جزئی، توالی DNA.

۱- مقدمه

یکی از مسائل جالب توجه در زیست‌شناسی محاسباتی، نگاشت نقاط مرزی است. هنگامی که یک آنزیم محدود کننده خاص به یک محلول DNA اضافه شود، DNA از مکان‌های با توالی مشخصی بریده می‌شود. هدف از نگاشت نقاط مرزی، محاسبه‌ی موقعیت محل‌های برش برای یک آنزیم مشخص است. با استفاده از برخی از آزمایشات بیوشیمیایی می‌توان فاصله‌ی بین هر جفت از مکان‌های مرزی را پیدا کرد. در مسأله‌ی PDP فاصله‌های بدست آمده از عمل هضم توسط یک آنزیم به ما داده شده است (شکل ۱) و هدف محاسبه‌ی همه‌ی محل‌های برش است.

فرض کنید  $X = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  مجموعه‌ی محل‌های برش توسط یک آنزیم خاص روی یک رشته DNA باشد. تعداد  $N = \binom{n+1}{2}$  فاصله‌ی دو به دو بین این مکان‌ها را با چند مجموعه‌ای  $\Delta X$  نشان می‌دهیم:

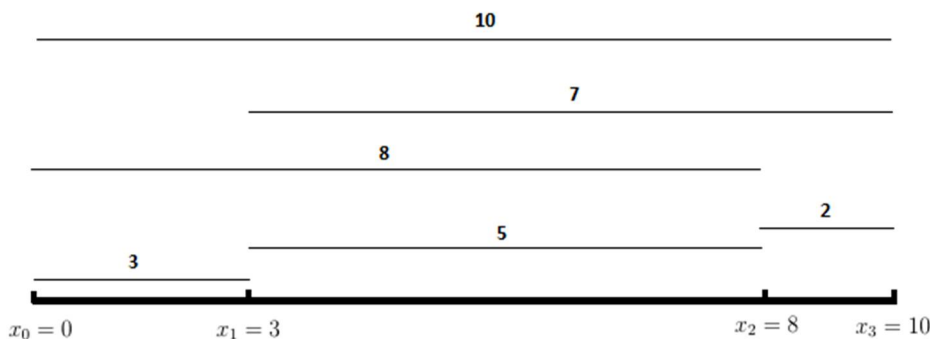
$$\Delta X = \{x_j - x_i | x_j > x_i; i, j = 0, 1, \dots, n\} \quad (۱)$$

در مسأله‌ی PDP چندمجموعه‌ای  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_N\}$  از فاصله‌ها داده شده است، هدف یافتن مجموعه‌ی  $Y = \{y_0, y_1, y_2, \dots, y_n\}$  از نقاط واقع بر روی یک خط است به طوری که فاصله‌های دو به دوی این نقاط از هم برابر چندمجموعه‌ای  $B$  باشد. در این مقاله یک مدل شبکه‌ی جریان برای حل مسأله‌ی PDP ارائه می‌کنیم. در ادامه، در بخش دوم پیشینه

تحقیق را مرور خواهیم کرد. در بخش سوم مدل جدید را به فرم یک مسأله‌ی شبکه جریان معرفی می‌کنیم. در بخش چهارم با تبدیل مسأله شدنی بودن به مسأله حداکثر جریان آن را حل می‌کنیم و در بخش پنجم به اثبات صحت مدل خواهیم پرداخت.

۲- پیشینه تحقیق

این مسأله در دهه‌ی ۱۹۳۰ در حوزه‌ی کریستالوگرافی اشعه X مطرح شد [۶]. در سال ۱۹۸۸ P.Lemke و M.Werman این مسأله را در زمان شبه چندجمله‌ای حل کردند (زمان اجرای الگوریتم ارائه شده‌ی آنها به بزرگترین مقدار عضو B وابسته بود) [۵]. Skiena و همکارانش یک الگوریتم عقبگرد برای حل این مسأله ابداع کردند که زمان اجرای آن تنها به اندازه ورودی وابسته بود [۷]. در سال ۱۹۹۴ Z.Zhang با استفاده از یک مثال، نشان داد که زمان اجرای الگوریتم عقبگرد در بدترین حالت نمایی است [۸]. T. Dakice در رساله‌ی دکترای خود یک مدل برنامه‌نویسی صفر و یک درجه دوم برای مسأله‌ی PDP ارائه کرد و آن را با استفاده از یک الگوریتم مکاشفه‌ای برنامه ریزی نیمه معین متوالی حل کرد [۴]. صالحی فتح‌آبادی و ندیمی یک مدل پیوسته برای این مسأله در سال ۲۰۱۰ ارائه کردند [۹]. ندیمی و همکارانش در سال ۲۰۱۱ الگوریتم سریعی برای حل این مسأله ارائه کردند که عملکرد بهتری نسبت به الگوریتم‌های پیشین دارد [۱۰].



شکل ۱. قطعه‌های بریده شده روی مولکول DNA

**۳- مدل شبکه جریان برای مسأله PDP**

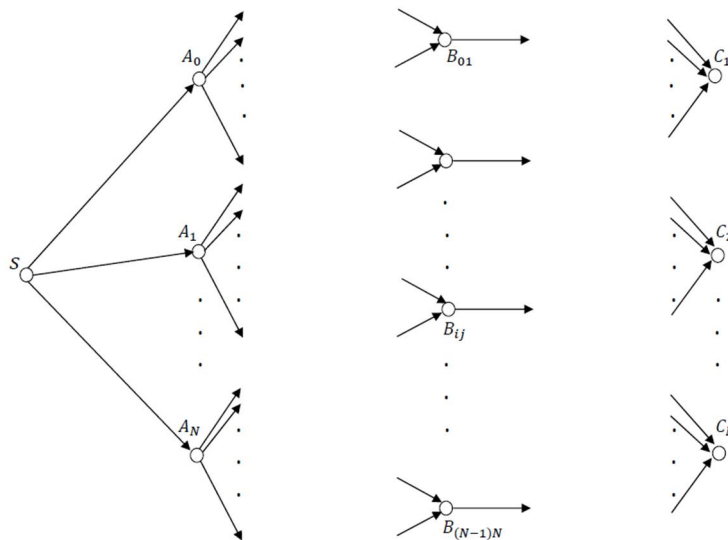
در بخش قبل دیدیم که در مسأله‌ی PDP، چندمجموعه‌ای  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_N\}$  از فاصله‌ها داده شده است و هدف پیدا کردن مجموعه‌ی  $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_N\}$  از نقاط واقع بر یک خط است به طوری که فاصله‌های دوبه دوی این نقاط از هم برابر چند-مجموعه‌ای  $B$  باشد. از آنجایی که با اضافه یا کم کردن یک مقدار ثابت به همه اعضای مجموعه‌ی  $Y$ ، چند-مجموعه‌ای حاصل از فاصله‌های دوبه دوی آنها تغییر نمی‌کند، بدون از دست دادن کلیت مسأله می‌توان با انتقال همه اعضای  $Y$ ،  $y_0$  را برابر صفر در نظر گرفت. بدین ترتیب واضح است که  $y_1, y_2, \dots, y_N$  در چندمجموعه‌ای  $B$  وجود خواهند داشت و  $y_n$  برابر بزرگترین عضو  $Y$  خواهد بود. بنابراین مسأله‌ی PDP معادل است با پیدا کردن  $n$  عضو از  $B$  به طوری که فاصله‌ی دوبه دوی مجموعه‌ی حاصل از این نقاط به همراه نقطه صفر، برابر  $B$  باشد. به منظور پیدا کردن این  $n$  عضو از  $B$ ، یک مدل شبکه جریان طراحی می‌کنیم که هر جریان شدنی برای این شبکه مشخص‌کننده‌ی این نقاط باشد.

در (شکل ۲) یک مدل شبکه جریان "صفر و یک" با

چهار لایه از گره‌ها و سه لایه از یال‌ها می‌سازیم. لایه‌ی اول از گره‌ها تنها شامل یک گره‌ی شروع  $S$  است. در لایه دوم  $N + 1$  گره داریم که آنها را با  $A_0, A_1, \dots, A_N$  نشان می‌دهیم.  $A_0$  را متناظر با  $b_0 = 0$  در نظر می‌گیریم. همچنین گره‌های  $A_1, A_2, \dots, A_N$  را به  $b_1, b_2, \dots, b_N$  اختصاص می‌دهیم. برای اعضای تکراری می‌توان در این لایه فقط یک گره در نظر گرفت که در اینصورت اندازه شبکه کوچکتر خواهد شد. ما در اینجا همه  $N + 1$  گره را در نظر گرفته‌ایم.

در لایه‌ی سوم گره‌ها، برای هر جفت  $i < j$  یک گره به نام  $B_{ij}$  در نظر می‌گیریم اگر و فقط اگر داشته باشیم  $|b_i - b_j| \in B$ . در این لایه حداکثر  $\frac{N(N+1)}{2}$  گره وجود دارد.

در لایه‌ی آخر از گره‌ها،  $|B| = N = \binom{n+1}{2}$  گره وجود دارد که متناظر با  $b_i$ ها هستند. گره‌ها در این لایه را با  $C_1, C_2, \dots, C_N$  نمایش می‌دهیم. در صورت وجود اعداد تکراری در  $B$  برای هر یک گره‌ای مجزا در لایه آخر در نظر گرفته می‌شود. حال به یال‌های شبکه می‌پردازیم.



شکل ۲. مدل شبکه جریان (G)

گره‌ها در لایه‌ی چهارم به گره‌ی چاه متصل می‌شوند با توجه به مقدار تقاضا در گره‌های سطح آخر، از همه‌ی گره‌ها کمانی با ظرفیت ۱ به  $t$  وارد می‌شود. همچنین گره  $S_1$  را مطابق شکل ۳ به شبکه اضافه کرده و یالی با ظرفیت  $n + 1$  از آن به  $S$  رسم می‌کنیم. ظرفیت این یال را برابر با میزان عرضه در  $S$  یعنی  $n + 1$  قرار می‌دهیم. به اینصورت شبکه جریان جدید  $G_1$  مطابق شکل ۳ حاصل می‌شود.

به منظور یافتن جریان شدنی در شبکه  $G$ ، کافی است مسأله‌ی حداکثر جریان<sup>۱</sup> را در شبکه  $G_1$  از گره‌ی منبع  $S_1$  به چاه  $t$  حل کنیم. نشان می‌دهیم که اگر حداکثر جریان در شبکه  $G_1$  تمامی یال‌های متصل به منبع و چاه را اشباع<sup>۲</sup> کند، در این صورت می‌توان گفت که مسأله اصلی یک جواب شدنی دارد، در غیر این صورت شدنی نخواهد بود. منظور از اشباع شدن یک یال عبور حداکثر جریان ممکن (برابر ظرفیت کمان) از آن یال است. زمانی که در شبکه‌ی  $G_1$  یال خروجی از منبع اشباع می‌شود، مقدار  $n + 1$  واحد جریان به گره  $S$  می‌رسد که دقیقاً برابر مقدار عرضه این گره در شبکه  $G$  است. همچنین اشباع شدن یال‌های ورودی به چاه به این معنی است که روی هر یال ورودی به چاه، ۱ واحد جریان داشته باشیم. در این صورت در واقع از هر گره لایه آخر، یک واحد جریان به چاه وارد شده است که دقیقاً برابر مقدار تقاضا در گره‌های لایه آخر  $G$  است. نتیجه اینکه شبکه  $G$  شدنی است اگر و فقط اگر در  $G_1$  به ازای حداکثر جریان، یال‌های منبع و چاه اشباع شوند. با توجه به توضیح فوق، در صورت شدنی بودن شبکه  $G$ ، مقدار حداکثر جریان در  $G_1$  برابر  $n + 1$  خواهد بود. به همین صورت نتیجه می‌شود که اگر مقدار حداکثر جریان در  $G_1$  کمتر از  $n + 1$  باشد، به مفهوم این است که  $G$  دارای جواب شدنی نمی‌باشد. پس با بدست آوردن حداکثر جریان در شبکه  $G_1$ ، در صورتیکه مقدار جریان بیشینه برابر  $n + 1$  باشد، با حذف گره‌های  $S_1$  و  $t$ ، به یک جریان شدنی در  $G$  می‌رسیم.

لایه‌ی اول یال‌ها حداکثر شامل  $N + 1$  یال از گره‌ی مبدا به  $A_i$ ‌ها است. در این لایه، هر یال یک ضریب با مقدار  $n$  دارد. به این معنی که اگر  $f(S, A_i)$  مقدار جریان ورودی به یال  $(S, A_i)$  باشد،  $n \times f(S, A_i)$  مقدار جریانی است که گره‌ی  $A_i$  دریافت خواهد کرد. در لایه‌ی دوم یال‌ها، دو یال ورودی به هر گره‌ی  $B_{ij}$  خواهیم داشت، یک یال از  $A_i$  و یک یال از  $A_j$ . همه‌ی یال‌های این لایه ضریب  $\frac{1}{2}$  دارند.

در لایه آخر، یک یال از هر گره‌ی  $B_{ij}$  خارج می‌شود. از گره‌ی  $B_{ij}$  به گره‌ی  $C_k$  یک یال داریم اگر و فقط اگر  $|b_i - b_j| = b_k$ . در این لایه هیچ ضریبی روی یال‌ها وجود ندارد (برابر ۱ است).

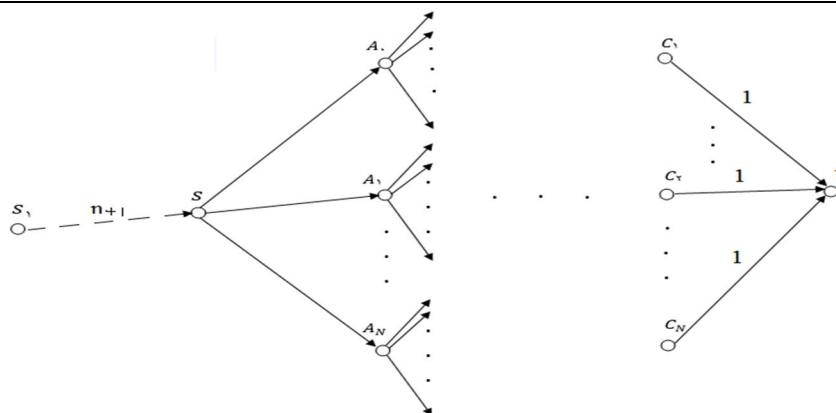
در این شبکه متغیرهای  $f(u, v)$  به ازای همه کمان‌های  $(u, v)$  متغیرهای "صفر و یک" هستند. در گره‌ی  $S$  به مقدار  $n + 1$  واحد عرضه‌ی جریان و در گره‌های  $C_i$  به مقدار  $-1$  واحد تقاضا وجود دارد. در گره‌های لایه‌ی دوم و سوم هیچ عرضه و تقاضایی وجود ندارد. لازم به ذکر است که با در نظر گرفتن ضرایب افزایش و کاهش لایه اول و دوم کمان‌ها، مجموع عرضه دقیقاً به مقدار تقاضا افزایش می‌یابد. زیرا  $(n + 1)$  واحد جریان ارسالی از مبدا بعد از عبور از لایه اول با ضریب  $n$  به مقدار  $n(n + 1)$  واحد جریان تبدیل می‌شود. بعد از عبور از لایه دوم که همه کمان‌های آن دارای ضریب  $\frac{1}{2}$  هستند، مقدار جریان به  $n(n + 1)/2$  کاهش می‌یابد که دقیقاً برابر مجموع تقاضا در لایه آخر یعنی  $N = n(n + 1)/2$  است.

در ادامه، ابتدا با تبدیل مسأله شدنی بودن به مسأله حداکثر جریان، روشی برای حل آن ارائه می‌دهیم و سپس ثابت می‌کنیم که هر جواب شدنی برای این شبکه یک جواب برای مسأله PDP را به دست می‌دهد.

#### ۴- حل مسأله شدنی بودن

برای پیدا کردن یک جواب شدنی، به مدل شبکه جریان ساخته شده یک گره‌ی انتهایی  $t$  یا چاه اضافه می‌کنیم،

1. Maximum Flow
2. Saturate



شکل ۳. مسأله ماکزیم جریان (شبکه  $G_1$ )

شرط صفر و یک را برای جریان همه کمان‌ها بجز کمان  $(s_1, s)$  به صورت زیر در نظر می‌گیریم:  
 $\forall (u, v) \neq (s_1, s): f(u, v) = 0 \text{ or } 1$

**۵- تبدیل جریان شدنی به جواب مسأله‌ی PDP**

نشان می‌دهیم هر جریان شدنی در شبکه جریان  $G$ ، یک راه حل برای مسأله‌ی PDP است. جواب شدنی در  $G$  جریانی است که  $n + 1$  واحد عرضه را با اعمال ضرایب موجود به  $t$  انتقال دهد به طوری که شرط بقای جریان برای گره‌های لایه‌های میانی رعایت شود.

با توجه به صفر و یک بودن شبکه  $G$ ، باید  $n + 1$  گره از گره‌های  $A_i$  برای دریافت مقدار جریان موجود در  $S$  انتخاب شوند. گره‌های انتخاب شده بی شک شامل  $A_0$  و  $A_N$  خواهند بود زیرا تنها راه فرستادن جریان به  $C_N$  استفاده همزمان از این دو گره است. نشان می‌دهیم اعضای از چندمجموعه‌ای  $B$  که متناظر گره‌های انتخاب شده از  $A_i$  هستند تشکیل یک جواب برای مسأله PDP می‌دهند. با توجه به ضریب روی یال‌های خروجی گره  $s$ ، به هر یک از گره‌های انتخاب شده از لایه دوم مقدار  $n \times 1 = n$  واحد جریان وارد می‌شود. به دلیل صفر و یک بودن متغیرها، هر یک از گره‌های انتخاب شده از لایه دوم، جریان دریافتی را توسط  $n$  یال خروجی به  $n$  گره از لایه سوم می‌فرستد. گره‌های لایه سوم دارای یک یال خروجی با ضریب ۱ و دو یال ورودی با ضریب  $\frac{1}{2}$  هستند، بنابراین یا هیچ جریانی از این گره‌ها

در اینجا مدل ریاضی مسأله حداکثر جریان شبکه فوق را ارائه می‌دهیم.  
 الف - تابع هدف:

Maximize  $z$

ب - محدودیت ظرفیت یال‌ها:

$$0 \leq f(u, v) \leq c(u, v)$$

در اینجا  $c(u, v)$  ظرفیت جریان ورودی به کمان  $(u, v)$  است. در کمان خروجی از مبدا، این ظرفیت برابر  $n + 1$  و در بقیه کمان‌ها برابر ۱ است.

ج - شرط بقای جریان:

برای تمام  $u \in V - \{s, t\}$  شرط بقای جریان برای تابع جریان  $f$  به صورت زیر است:

$$\sum_{v \in V} \alpha(v, u) f(v, u) = \sum_{v \in V} f(u, v)$$

که در آن  $\alpha(u, v)$  ضریب افزایش (کاهش) روی کمان‌هاست. همچنین برای گره مبدا داریم:

$$\sum_{v \in V} f(s_1, v) = z$$

با توجه به شرط بقای جریان در گره‌های میانی و تعمیم یافته بودن جریان، قیدی برای گره مقصد لازم نیست زیرا هر جریان خروجی از مبدا بعد از افزایش و کاهش توسط ضرایب کمان‌ها در نهایت به مقصد خواهد رسید.

کمان‌هایی که در لایه دوم جریان غیرصفر (برابر با یک) دارند:

$$(A_0 \cdot B_{02}) \cdot (A_0 \cdot B_{05}) \cdot (A_0 \cdot B_{06}) \cdot (A_2 \cdot B_{02}) \cdot (A_2 \cdot B_{25}) \cdot (A_2 \cdot B_{26}) \cdot (A_5 \cdot B_{05}) \cdot (A_5 \cdot B_{25}) \cdot (A_5 \cdot B_{56}) \cdot (A_6 \cdot B_{06}) \cdot (A_6 \cdot B_{26}) \cdot (A_6 \cdot B_{56})$$

کمان‌هایی که در لایه سوم جریان غیرصفر (برابر با یک) دارند:

$$(B_{02} \cdot C_2) \cdot (B_{05} \cdot C_5) \cdot (B_{06} \cdot C_6) \cdot (B_{25} \cdot C_3) \cdot (B_{26} \cdot C_4) \cdot (B_{56} \cdot C_1)$$

دقت کنید که جواب PDP و همچنین شبکه جریان متناظر منحصر به فرد نیست. در مثال مذکور

$$X = \{x_0 = 0, x_1 = 2, x_2 = 7, x_3 = 10\}$$

جواب دیگری برای PDP محسوب می‌شود و جریان شدنی متناظر با آن به صورت زیر است:

کمان‌هایی که در لایه اول جریان غیرصفر (برابر با یک) دارند:

$$(s \cdot A_0) \cdot (s \cdot A_1) \cdot (s \cdot A_4) \cdot (s \cdot A_6)$$

کمان‌هایی که در لایه دوم جریان غیرصفر (برابر با یک) دارند:

$$(A_0 \cdot B_{01}) \cdot (A_0 \cdot B_{04}) \cdot (A_0 \cdot B_{06}) \cdot (A_1 \cdot B_{01}) \cdot (A_1 \cdot B_{14}) \cdot (A_1 \cdot B_{16}) \cdot (A_4 \cdot B_{04}) \cdot (A_4 \cdot B_{14}) \cdot (A_4 \cdot B_{46}) \cdot (A_6 \cdot B_{06}) \cdot (A_6 \cdot B_{16}) \cdot (A_6 \cdot B_{46})$$

کمان‌هایی که در لایه سوم جریان غیرصفر (برابر با یک) دارند:

$$(B_{01} \cdot C_1) \cdot (B_{04} \cdot C_4) \cdot (B_{06} \cdot C_6) \cdot (B_{14} \cdot C_3) \cdot (B_{16} \cdot C_5) \cdot (B_{46} \cdot C_2)$$

عبور نمی‌کند و یا هر سه یال اشباع می‌شوند. به همین دلیل زمانی که یکی از گره‌های  $B_{ij}$  واسط جریان است، اولاً تقاضای دقیقاً یک گره از لایه آخر متناظر با یک  $b_k$  را برآورده می‌کند و ثانیاً با توجه به اینکه در ساخت  $G$  کمان‌های ورودی  $B_{ij}$ ها از گره‌های  $A_i$  و  $A_j$  انتخاب شدند که متناظر اعداد  $b_i$  و  $b_j$  بودند و در شرط  $|b_i - b_j| = b_k$  صدق می‌کردند، تفاضل  $b_i$ های دو گره انتخاب شده از لایه دوم دقیقاً برابر  $b_k$  است. بنابراین وقتی یک جواب شدنی داریم و همه تقاضاهای گره‌های لایه آخر برآورده شده‌اند، می‌توان گفت تفاضل دو بدوی اعضایی از  $B$  که متناظر گره‌های انتخاب شده لایه دوم هستند، دقیقاً برابر خود چندمجموعه‌ای  $B$  است. یعنی گره‌های انتخاب شده از لایه دوم توسط یک جریان شدنی، اعضایی از  $B$  را مشخص می‌کنند که جواب مساله PDP هستند.

**مثال:** در اینجا برای درک بهتر مدل، یک نمونه از مساله‌ی PDP را به همراه دو جواب ممکن از آن ارائه می‌دهیم. برای هر دو جواب PDP، جریان‌های شدنی معادل را در مدل شبکه جریان ارائه می‌دهیم.

ورودی مساله (در اینجا:  $n=3$  و  $N=6$ ):

$$B = \{2.3.5.7.8.10\}$$

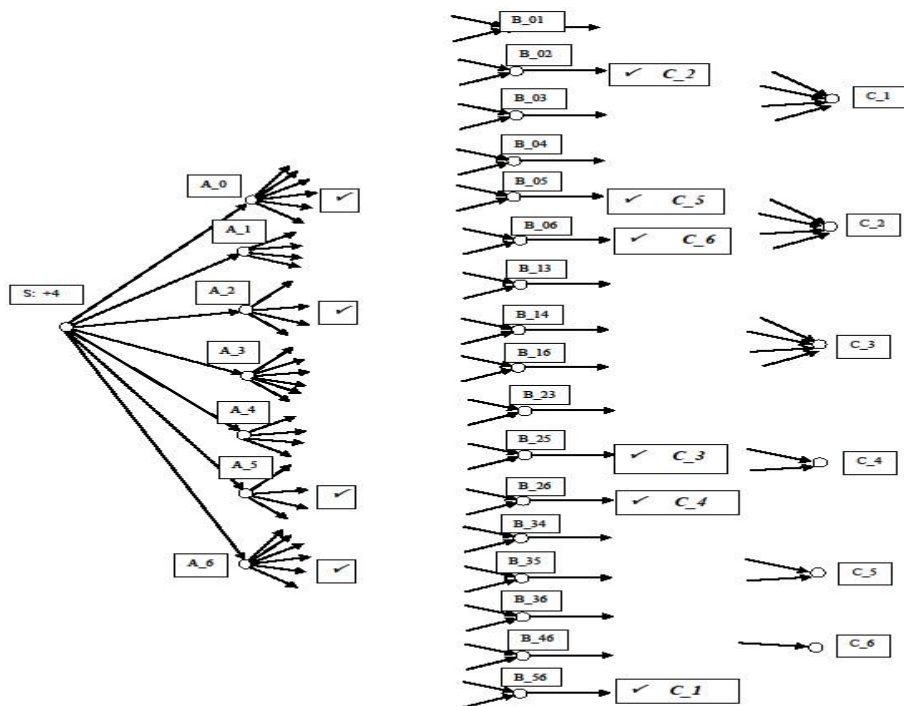
یکی از جواب‌ها:

$$X = \{x_0 = 0, x_1 = 3, x_2 = 8, x_3 = 10\}$$

مدل شبکه جریان و جریان شدنی متناظر جواب در شکل ۴ آورده شده‌اند.

کمان‌هایی که در لایه اول جریان غیر صفر (برابر با یک) دارند:

$$(s \cdot A_0) \cdot (s \cdot A_2) \cdot (s \cdot A_5) \cdot (s \cdot A_6)$$



شکل ۴: مدل شبکه جریان و یک جریان شدنی متناظر یک جواب مسأله PDP. گره های فعال در لایه دوم و سوم که با علامت تیک مشخص شده‌اند، تمامی یالهای ورودی و خروجی شان اشباع شده‌اند. نام  $C_j$  که جلوی گره‌های انتخاب شده از لایه سوم آمده‌اند، گره مقصد را نشان می‌دهند.

مدل‌های شبکه جریان در به کار گیری این الگوریتم‌ها، ماتریس ضرایب تکنولوژی ساده آنهاست. مدل‌های ریاضی در مسائل بهینه سازی دارای پیشینه‌ی زیادی هستند و روش‌های قدرتمندی نیز برای حل آنها وجود دارد. با توجه به اینکه کلاس پیچیدگی مسأله PDP هنوز هم یک مسأله‌ی باز محسوب می‌شود، امیدواریم این مدل نکات و دیدگاه‌های خوبی برای مسأله پیش روی پژوهشگران قرار دهد. لازم به تاکید است روش ارایه شده در این مقاله کلاس پیچیدگی مسأله‌ی PDP را مشخص نمی‌کند و کلاس پیچیدگی این مسأله به عنوان یکی از مهمترین و قدیمی‌ترین مسایل باز حوزه پیچیدگی مسایل باقی می‌ماند.

### نتیجه گیری

در این مقاله یک مدل جدید با استفاده از شبکه جریان برای مسأله PDP ارائه کردیم. در این شبکه، جریان‌های شدنی را پیدا کردیم و نشان دادیم که هر یک از این جریان‌ها جوابی برای مسأله‌ی PDP خواهد بود. برای حل مسأله آن را به یک مسأله حداکثر جریان صفر و یک تعمیم یافته تبدیل کردیم. روش‌های کلاسیک مسأله حداکثر جریان در زمان چند جمله‌ای حل می‌شوند و با توجه به اینکه تاکنون هیچ الگوریتم چند جمله‌ای برای مسأله PDP ارایه نشده است، عدم توفیق این الگوریتم‌ها دور از ذهن نخواهد بود. برای مسأله حداکثر جریان صفر و یک نیز روش‌های چندجمله‌ای وجود دارد [1]. لیکن برای مسایل شبکه جریان صفر و یک تعمیم یافته از الگوریتم‌های برنامه‌ریزی صفر و یک استفاده می‌شود و برتری

[9] Salehi Fathabadi, H. Nadimi, R. (2010). A Continuous Optimization Model for Partial Digest Problem. Journal of Sciences, Islamic Republic of Iran 21.2

[10] Nadimi, Reza, Hassan Salehi Fathabadi, and Mohammad Ganjtabesh. (2011). A fast algorithm for the partial digest problem. Japan journal of industrial and applied mathematics 315-325.

### فهرست منابع

[1] R. K. Ahuja; T. L. Magnanti.; J. B. Orlin, (1993). Network flow: theory, algorithms, and applications. Prentice Hall.

[2] M. S. Bazaraa, H. D. Sherali, and C. M. Shetty. (1993). Nonlinear programming theory and algorithms, Second edition, John Wiley and Sons, Inc. p:512.

[3] M. Cieliebak, S. Eidenbenz, and P. Penna. (2005). Partial Digest is hard to solve for erroneous input data. Theory. Computer. Sci., 349(3): 361-381.

[4] T. Dakic, (2000). On the Turnpike Problem. PhD thesis, Simon Fraser University.

[5] P. Lemke, M. Werman. (1988). on the complexity of inverting the autocorrelation function of a finite integer sequence, and the problem of locating  $n$  points on a line, given the  $\binom{n}{2}$  unlabeled distances between them. Preprint 453, Institute for Mathematics and its Application IMA.

[6] A. L. Patterson. (1935). A direct method for the determination of the components of interatomic distances in crystals, Zeitschr. Krist. 90: 517-542,

[7] S. S. Skiena, W. Smith, and P. Lemke. (1990). Reconstructing sets from interpoint distances. In Proc. of the 6th ACM Symposium on Computational Geometry (SoCG 1990), pages 332-339.

[8] Z. Zhang. (1994). An exponential example for a partial digest mapping algorithm. Journal of Computational Biology, 1(3):235-239.