دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال پنجم، شماره بیستم، مهر و آبان ۱۳۹۸
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
پژوهش‌های نوین در ریاضی

عملگر $\mathrm{L_r}$ و نگاشت گاوس رویه‌های درجه دوم

اکرم محمدپوری[۱*]، لیلا کفیلی[۲]، رحیم حسین اوغلی[۳]

[(۱و۲و۳)] گروه ریاضی محض، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه تبریز، تبریز، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۶/۱۰/۰۵ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۸/۰۴/۱۵

چکیده

چندجمله‌ای‌های درجه دوم بر حسب متغیرهای x, y, z یک رویه درجه دوم را مشخص می‌کند. در این مقاله با استفاده از عملگر L_1 (عملگر چنگ-یاو) که بر تابع‌های هموار روی رویه‌ها اثر می‌کند به مطالعه نگاشت گاوس رویه‌های درجه دوم در فضای اقلیدسی سه بعدی $\mathcal{R}^3$ می‌پردازیم. فرض کنید f یک تابع هموار بر رویه M باشد، آنگاه $L_1 f = tr(P_1 o\, \nabla^2 f)$ که P_1 اولین تبدیل نیوتن وابسته به دومین فرم اساسی رویه و $\nabla^2 f$ عملگر خودالحاق و هم‌ارزی متری با هسیان f است، $G = (G_1, G_2, G_3)$ و $L_1 G = (L_1 G_1, L_1 G_2, L_1 G_3)$. در این مقاله نشان می‌دهیم تنها رویه‌های درجه دوم با نگاشت گاوس G صادق در شرط $L_1 \mathrm{G} = \mathrm{AG}$ که در آن A یک ماتریس ۳ × ۳ است، کره‌ها و رویه‌های درجه دوم تخت هستند. بعلاوه کره‌ها تنها رویه‌های درجه دوم فشرده با نگاشت گاوس G صادق در شرط $L_1 G = AG$ برای یک ماتریس ۳ × ۳ مانند A هستند.

واژه‌های کلیدی: رویه‌های درجه دوم، رویه‌های خطی، عملگر خطی شده $\mathrm{L_1}$، نگاشت گاوس.

*. عهده‌دار مکاتبات: Email pouri@tabriz.ac.ir

۱. مقدمه

مفهوم نگاشت گاوس متناهی نوع در مطالعه هندسه ابر رویه‌ها نقش مهم و اساسی دارد (مرجع‌های [۳،۲،۱] را ببینید). ابر رویه اقلیدسی جهت‌پذیر M، نگاشت گاوس G، ۱– نوع دارد، اگر G در شرط $\Delta G = \lambda(G + C)$، برای یک $\lambda \in \mathcal{R}$، صدق کند. در سال ۱۹۸۷ چن و پیچینی به مطالعه ابر رویه‌های فشرده با نگاشت گاوس متناهی نوع پرداختند. آنها نشان دادند که ابر رویه فشرده M در $\mathcal{R}^{n+1}$ نگاشت گاوس G، ۱–نوع دارد اگر و تنها اگر M یک ابرکره باشد. همچنین ابر رویه‌های صادق در شرط $\Delta G = \lambda G$، $(C = 0)$، یعنی حالتی که نگاشت گاوس G یک تابع ویژه لاپلاسین است، را در برخی حالت‌های خاص رده‌بندی کردند [۴]. با تعمیم این معادله، دیلن و دیگران ثابت کردند تنها رویه‌های دوار $\mathcal{R}^3$ صادق در شرط $\Delta G = AG, A\in \mathcal{R}^{3\times 3}$، صفحه‌ها، کره‌ها و استوانه‌های دوارند [۵]. همچنین بایکوسیس و بلیر ثابت کردند تنها رویه‌های خطی $\mathcal{R}^3$ صادق در شرط بالا، صفحه‌ها و استوانه‌های مدورند [۲]. در این راستا کیم، ابر رویه‌های درجه دوم در فضای اقلیدسی $\mathcal{R}^{n+1}$ را مطالعه و قضیه زیر را ثابت کرد [۶].

قضیه ۱[۶]: تنها ابررویه‌های درجه دوم در فضای اقلیدسی $\mathcal{R}^{n+1}$ با نگاشت گاوس G که در شرط زیر صدق می‌کند، ابرصفحه‌ها، ابرکره‌ها و استوانه‌های مدورند.

$$\Delta G = AG, \quad A \in \mathcal{R}^{(n+1)\times(n+1)} \qquad (۱)$$

چنانچه می‌دانیم عملگر لاپلاس ابررویه M، در فضای اقلیدسی $\mathcal{R}^{n+1}$، یک عملگر دیفرانسیل‌پذیر خطی مرتبه دوم است که بخش خطی تغییر اول خمیدگی میانگین برای تغییرهای نرمال ابررویه است. با این دیدگاه، عملگر لاپلاس، عضو اول مجموعه‌ای از n عملگر $L_0 = \Delta, L_1, \dots, L_{n-1}$ است که در آن L_r، عملگر خطی شده تغییر اول $(r + 1)$– امین خمیدگی میانگین برای تغییرات نرمال ابررویه است [۷]، $L_1 = \square$ عملگر چنگ یاو معرفی شده در مرجع [۸] است. این عملگرها برای هر $f \in C^\infty(M)$ با رابطه $L_r(f) = tr(P_r \circ \nabla^2 f)$، داده می‌شود که در آن P_r، r–امین تبدیل نیوتن وابسته به دومین فرم اساسی ابررویه و $\nabla^2 f$ هسیان f است. پس از این دیدگاه، طبیعی و جالب به نظر می‌رسد اگر مفهوم نگاشت گاوس متناهی نوع برای ابر رویه‌های اقلیدسی را با جایگذاری L_r به جای Δ گسترش دهیم و به مطالعه و رده‌بندی چنین ابررویه‌هایی بپردازیم. در این راستا محققان مختلفی رویه‌های اقلیدسی صادق در شرط $L_1 G = f(G + C)$ را مطالعه و با اعمال برخی شرایط هندسی چنین رویه‌هایی را رده‌بندی کردند [۱۰،۹]. به ویژه اثبات شد که تنها رویه‌های دوار صادق در شرط $L_1 G = AG$، $A \in \mathcal{R}^{3\times 3}$، صفحه‌ها، مخروط‌های مدور، استوانه‌های مدور و کره‌ها هستند [۹]. با تعمیم این نتایج به حالت ابررویه‌ها نویسنده اول در مراجع [۱۲،۱۱] به بررسی و رده‌بندی برخی از ابررویه‌های صادق در شرط $L_r G = f(G + C)$ پرداخته است. در همین راستا در این مقاله نیز به تعمیم طبیعی قضیه برای رویه‌های درجه دوم با جایگذاری عملگر L_1 به جای Δ می‌پردازیم و همه‌ی رویه‌های درجه دوم که نگاشت گاوس G آنها در شرط زیر صدق می‌کند، رده‌بندی خواهیم کرد

$$L_1 G = AG, \qquad A \in \mathcal{R}^{(3)\times(3)}. \qquad (۲)$$

این مقاله ادامه کارهایی است که در مرجع‌های [۱۳،۶] اثبات شده‌اند. در مرجع [۱۳] نویسنده اول و کاشانی به رده‌بندی ابررویه‌های درجه دوم L_r متناهی نوع پرداخته‌اند.

۲. مفهوم‌های پایه‌ای

دراین بخش ابتدا به معرفی و مطالعه خواص عملگر L_r پرداخته و در ادامه ابررویه‌های درجه دوم را معرفی می‌کنیم. در پایان نیز مثال‌هایی از ابررویه‌های اقلیدسی n بعدی که در شرط $L_r G = AG$، $A\in \mathcal{R}^{(n+1)\times(n+1)}$، صدق می‌کند، ارائه می‌دهیم [۱۴،۱۳].

ابررویه فرو برده شده $x: M^n \to \mathcal{R}^{n+1}$ را در فضای اقلیدسی با نگاشت گاوس G در نظر بگیرید. فرض کنید ∇^0 و ∇ به ترتیب مشتق‌های لوی سویتا روی $\mathcal{R}^{n+1}$ و

M باشند. بنابراین فرمول گاوس و وینگاتن ابررویه‌ها به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\nabla^0_X Y = \nabla_X Y + < SX, Y > G,$$
$$SX = \nabla^0_X G,$$

که $X,Y \in \mathcal{X}(M)$ و $S: \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$ عملگر شکلی M نسبت به نگاشت گاوس G است. S یک عملگر خطی خودالحاق روی صفحه مماس T_pM تعریف می‌کند و مقدارهای ویژه وابسته به این عملگر، $\kappa_1(p), \dots, \kappa_n(p)$ خمیدگی‌های اصلی ابررویه نامیده می‌شود. متناظر با عملگر شکلی، n پایای جبری به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$S_r(P) = \sigma_r(\kappa_1(p), \dots, \kappa_n(p)), \quad 1 \le r \le n,$$

که $\sigma_r: \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}$ تابع متقارن مقدماتی در $\mathcal{R}^n$ است که با رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$\sigma_r(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i_1 < \dots < i_r} x_{i_1}, \dots, x_{i_r}.$$

چند جمله‌ای مشخصه S را می‌توان به صورت جملاتی بر حسب S_r نوشت،

$$Q_s(t) = \det(tI - S) = \sum_{r=0}^n (-1)^r S_r t^{n-r}, \qquad (۳)$$

که $s_0 = 1$ تعریف شده است. r- امین خمیدگی اصلی H_r از ابررویه به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\binom{n}{r} H_r = S_r, \qquad 0 \le r \le n.$$

به ویژه برای $r = 1$ و $r = n$ به ترتیب داریم

$$H_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \kappa_i = \frac{1}{n} \operatorname{tr}(S) = H,$$
$$H_n = \kappa_1 \dots \kappa_n.$$

H_1 همان خمیدگی میانگین M است و H_n خمیدگی گاوس–کرونکر M نامیده می‌شود. ابررویه با $(r+1)$– امین خمیدگی میانگین صفر در $\mathcal{R}^{n+1}$، r–مینیمال نامیده می‌شود.

تبدیل‌های نیوتن کلاسیک $P_r: \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$، وابسته به عملگر شکلی S، برای هر $r = 1, \dots, n$ بصورت استقرائی چنین تعریف می‌شود.

$$P_0 = I \ , \qquad P_r = \binom{n}{r} H_r I - S o P_{r-1} \ ,$$

که I، تبدیل همانی در $\mathcal{X}(M)$ را نشان می دهد. معادلاً داریم:

$$P_r = \sum_{j=0}^r (-1)^j \binom{n}{r-j} H_{r-j} S^j. \qquad (۴)$$

از اینرو با استفاده از قضیه کیلی–همیلتن که بیان می‌کند هر عملگری توسط چند جمله‌ای مشخصه اش پوچ می‌شود، نتیجه می‌گیریم که $P_n = 0$. برای هر $p \in M$، $P_r(p)$ عملگر خطی خود الحاق است که با $S(p)$ جابجا می‌شود. در واقع $S(p)$ و $P_r(p)$ همزمان قطری شدنی هستند. اگر $\{e_1, \dots, e_n\}$ بردارهای ویژه $S(p)$ به ترتیب متناظر با مقدارهای ویژه $\lambda_1(p), \dots, \lambda_n(p)$ باشد، آنگاه آنها همچنین بردارهای ویژه $P_r(p)$، متناظر با مقدارهای ویژه زیر می‌باشند.

$$\mu_{i,r}(p) = \sum_{i_1 < \dots < i_r, i_j \neq i} \lambda_{i_1}(p) \dots \lambda_{i_r}(p), \qquad (۵)$$

که در آن $1 \le i \le n$.

عملگر دیفرانسیل خطی مرتبه دوم $L_r: C^\infty(M) \to C^\infty(M)$، وابسته به تبدیل نیوتن P_r چنین تعریف می‌شود

$$L_r(f) = \operatorname{tr}(P_r \ o \ \nabla^2 f),$$

که $\nabla^2 f: \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$، عملگر خطی خود الحاق است که با هسیان f هم ارز متریکی است و چنین تعریف می‌شود

$$< \nabla^2 f(X), Y > = < \nabla_X(\nabla f), Y >,$$

که در آن $X,Y \in \mathcal{X}(M)$ و ∇f گرادیان f است.

فرض کنید $\{E_1, \dots, E_n\}$ قاب متعامد موضعی بر M باشد، آنگاه داریم

$$P_r(\nabla f)) = \sum_{i=1}^n < (\nabla_{E_i} P_r)(\nabla f), E_i >$$

$$+\sum_{i=1}^{n} < P_r(\nabla_{E_i}\nabla f), E_i >$$
$$= < \mathrm{div}P_r, \nabla f > + L_r(f), \qquad (۶)$$

که div عملگر دیورژانس بر M است. چون $\mathrm{div}P_r = 0$ [۱۴]، از (۶) نتیجه می‌گیریم

$$L_r(f) = (\mathrm{div}P_r(\nabla f)). \qquad (۷)$$

با استفاده از (۷) می‌توان فرمول صریحی در دستگاه مختصات موضعی برای L_r بیان کرد. در دستگاه مختصات موضعی، $\mathrm{div}\, X$ برای میدان برداری X بر M چنین بیان می‌شود

$$\mathrm{div}\, X = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\sum_i \partial_i \left(\sqrt{|g|}X^i\right), \qquad (۸)$$

که X_i ها مولفه‌های میدان برداری X و $|g| = |\det g^{ij}|$ قدر مطلق دترمینان مولفه‌های تانسور متریک است.
با استفاده از (۷)، (۸) و تعریف گرادیان فرمول زیر بدست می‌آید

$$L_r(f) = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\sum_{i,j,k} \partial_i \left(\sqrt{|g|}g^{jk}P_{ri,k}\, \partial_j f\right), \qquad (۹)$$

که

$$P_i\partial_i = \sum_k P_{ri,k}\, \partial_k.$$

در سراسر مقاله برای محاسبه عملگر L_r از فرمول (۹) استفاده می‌کنیم.

لم ۲: [۱۴] فرض کنید $x: M^n \to \mathcal{R}^{n+1}$ ابررویه فرو برده شده جهت پذیر هموار بتوی فضای اقلیدسی $\mathcal{R}^{n+1}$، با نگاشت گاوس G باشد. آنگاه نگاشت گاوس G از M در رابطه زیر صدق می‌کند.

$$L_rG = \binom{n}{r+1}\nabla H_{r+1} + \binom{n}{r+1}$$
$$(nH_1H_{r+1} - (n-r-1)H_{r+2})G \qquad (۱۰)$$

۱. ۲. ابررویه‌های درجه دوم

تعریف ۳: زیر مجموعه M از فضای اقلیدسی n–بعدی $\mathcal{R}^n$ متشکل از نقاط $(x_1, \dots, x_n)$ ابررویه درجه دوم نامیده می‌شود، هرگاه M در رابطه زیر صدق کند،

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\, x_i x_k$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} b_i\, x_i + c = 0, \qquad (۱۱)$$

که در آن a_{ik} , b_i , c اعداد حقیقی‌اند.
بدون از دست دادن کلیت فرض می‌کنیم ماتریس $\mathcal{A} = (a_{ik})$ متقارن و ناصفر است. با تغییر مختصات می‌توان فرض کرد (۱۱) به صورت یکی از فرم‌های استاندارد زیر است.

$$(I) \quad \sum_{i=1}^{s} a_i x_i^2 + 2x_{s+1} = 0,$$
$$(II) \quad \sum_{i=1}^{s} a_i x_i^2 + 1 = 0,$$
$$(III) \quad \sum_{i=1}^{s} a_i x_i^2 = 0,$$

که $\{a_1, \dots, a_s, 0, \dots, 0\}$ (با $n - s$ صفر) متناظر با مقدارهای ویژه ماتریس $\mathcal{A}$، $1 \le s \le n$ است. در (II) و (III) وقتی $s = n$ و در (I) وقتی $s + 1 = n$، M ابررویه درجه دوم $(n-1)$– بعدی سره نامیده می‌شود، در بقیه حالت‌ها M ابررویه استوانه‌ای درجه دوم نامیده می‌شود. ابررویه درجه دوم، $(n-1)$– بعدی سره از نوع (III)، ابررویه مخروطی جبری نامیده می‌شود. در حالت‌های (II) و (III) ابررویه استوانه‌ای درجه دوم، حاصلضرب زیر فضای خطی (n-s) – بعدی و ابررویه درجه دوم سره (s-1) – بعدی است. در حالت (I)، ابررویه استوانه‌ای درجه دوم، حاصلضرب زیر فضای خطی (n-s-1)- بعدی و ابررویه درجه دوم سره s– بعدی است.
فرض کنید M یک ابررویه اقلیدسی در $\mathcal{R}^{n+1}$ باشد. پرمایش زیر را برای M در نظر بگیرید

$$X(u_1, \dots, u_n) = (u_1, \dots, u_n, v),$$

که $v = v(u_1, \dots, u_n)$ و $\partial_i v = \frac{\partial v}{\partial u_i}$ را با v_i نشان می‌دهیم. آنگاه

$$g_{ij} = \delta_{ij} + v_iv_j, \quad g^{ij} = \delta_{ij} - \frac{v_iv_j}{g}, \qquad (۱۲)$$
$$g = \det(g_{ij}) = 1 + \sum_{i=1}^{n} v_i^2, \qquad (۱۳)$$

و $g_{ij}=<\partial_i X, \partial_j X>$. با استفاده از فرمول (۹)، عملگر L_r از M به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$L_r = -\sum_{i,j,k}(\frac{\partial_i g}{2g} g^{jk} P_{ri,k} + \partial_i g^{jk} P_{ri,k} + \partial_i P_{ri,k} g^{jk})\, \partial_j - \sum_{i,j,k} g^{jk} P_{ri,k}\, \partial_i\, \partial_j. \quad (۱۴)$$

با توجه به تعریف تابع هسیان لم زیر به راحتی اثبات می‌شود.

لم ۴: برای هر $f \in C^{\infty}(M)$ و تابع هموار $\varphi: \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ داریم

$$L_r(\varphi o f) = \varphi'(f) L_r(f) + \varphi''(f) < P_r(\nabla f), \nabla f >. \quad (۱۵)$$

۲.۲: مثال‌ها

الیاس و گوربوز در بخش ۳ از مرجع [۱۴] نشان دادند که ابر صفحه‌ها، ابرکره‌ها و استوانه‌های مدور در شرط $L_r X = AX + b$ صدق می‌کند، مشابهاً در این بخش نشان می‌دهیم که این ابررویه‌ها در شرط $L_r G = AG$ و همچنین n– مینیمال‌ها در شرط $L_{n-1} G = AG$ صدق می‌کنند.

الف) ابرصفحه [۱۴]**:** در این حالت G ثابت است، و برای هر $r = 0, \ldots, n-1$، $L_r G = 0$ ، لذا ابرصفحه‌ها در شرط $L_r G = AG$ با فرض $A = 0$ صدق می‌کند.

ب) ابرکره[۱۴]**:** فرض کنید $S^n(a)$ یک ابرکره به مرکز 0 و شعاع a در $\mathcal{R}^{n+1}$ باشد. با توجه به مرجع [۱۴] و با استفاده از رابطه (۱۰)، $L_r G$ به ازای هر $r = 0, \ldots, n-1$ در رابطه زیر صدق می‌کند

$$L_r G = -(r+1)\binom{n}{r+1}\frac{1}{a^{r+2}}. \quad (۱۶)$$

از این‌رو $S^n(a)$ در شرط (۲) با فرض

$$A = -(r+1)\binom{n}{r+1}\frac{1}{a^{r+2}} I$$

صدق می‌کند.

ج) استوانه مدور[۱۴]**:** فرض کنید M یک استوانه مدور به صورت $S^m(a) \times \mathcal{R}^{n-m}$ باشد، که a شعاع و $1 \le m \le n-1$. با توجه به مرجع [۱۴] و با استفاده از رابطه (۱۰) نتیجه می‌گیریم M در شرط (۲) به صورت زیر صدق می‌کند.

برای $r + 1 \le m$

$$L_r G = -(n - m + r + 1)\binom{m}{r+1}\frac{1}{a^{r+2}} G,$$

در نتیجه

$$A = -(n - m + r + 1)\binom{m}{r+1}\frac{1}{a^{r+2}} I.$$

و برای $r+1 \ge m+1$، $L_r G = 0$ و در نتیجه $A = 0$.

د) ابررویه n– مینیمال [۱۴]**:** فرض کنید M^n یک ابررویه n– مینیمال در $\mathcal{R}^{n+1}$ باشد، با توجه به رابطه (۱۰) نتیجه می‌گیریم $L_{n-1} G = 0$، بنابراین M در شرط (۲) با در نظر گرفتن $A = 0$ صدق می‌کند، به ویژه مخروط مدور در $\mathcal{R}^3$ در شرط $L_1 G = 0$ صدق می‌کند. چون خمیدگی گاوس آن، H_2 برابر صفر است.

۳. قضیه رده‌بندی

فرض کنید M رویه درجه دوم باشد، در اینصورت M یا رویه درجه دوم سره از نوع I یا رویه درجه دوم سره از نوع II و یا رویه درجه دوم خطی است. رویه‌های درجه دوم خطی در مرجع [۱۵] مورد مطالعه قرار گرفته‌اند و ثابت شده است که تنها رویه‌های خطی صادق در شرط $L_1 G = AG$، $A \epsilon \mathcal{R}^{3\times 3}$، رویه‌های تخت‌اند. بنابراین کافیست برای رده‌بندی رویه‌های درجه دوم صادق در شرط (۲)، رویه‌های درجه دوم سره از نوع I یا رویه‌های درجه دوم سره از نوع II را در نظر بگیریم. برای این منظور در بخش ۳.۱ نشان می‌دهیم هیچ رویه درجه دوم سره از نوع I صادق در شرط (۲) وجود ندارد و در بخش ۳.۲ نشان می‌دهیم که رویه‌های درجه دوم سره از نوع II صادق در شرط (۲)، کره‌ها هستند. پس قضیه رده‌بندی زیر اثبات می‌شود.

قضیه: تنها رویه‌های درجه دوم صادق در شرط $L_1G = AG$، $A \in \mathcal{R}^{3\times 3}$، کره‌ها و رویه‌های تخت‌اند.

۳.۱. رویه‌های درجه دوم سره از نوع (I)

گزاره ۵: هیچ رویه درجه دوم سره از نوع (I) در $\mathcal{R}^3$ صادق در شرط $L_1G = AG\,, A \in \mathcal{R}^{3\times 3}$، وجود ندارد.

پیش از بیان برهان گزاره، نیاز به محاسبه عملگر L_1 و بیان لم‌های ۶ و ۷ داریم. برای چنین رویه‌هایی پرمایش زیر را بکار می‌بریم

$$X = (u_1, u_2, v), \quad v = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} a_i u_i^2, \quad a_1, a_2 \neq 0$$

از (۱۲) و (۱۳) بدست می‌آوریم

$$g_{ij} = \delta_{ij} + a_i a_j u_i u_j, \quad g^{ij} = \delta_{ij} - \frac{a_i a_j u_i u_j}{g}, \quad g = \det(g_{ij}) = 1 + \sum_{i=1}^{2} a_i^2 u_i^2. \qquad (۱۷)$$

نگاشت گاوس M چنین بدست می‌آید

$$G = (G_1, G_2, G_3) = \frac{1}{\sqrt{g}}((-v_1, -v_2, 1). \qquad (۱۸)$$

برای محاسبه عملگر L_1 نیاز به محاسبه تبدیل نیوتن P_1 داریم.

با استفاده از (۱۸) بدست می‌آوریم

$$SX_1 = g^{-\frac{3}{2}}(a_1(1 + a_2^2 u_2^2)x_1 - (a_2^2 a_1 u_1 u_2)x_2), \qquad (۱۹)$$
$$SX_2 = g^{-\frac{3}{2}}(-(a_1^2 a_2 u_1 u_2)x_1 + a_2(1 + a_1^2 u_1^2)x_2).$$

با استفاده از تعریف P_1 و (۱۹) نتیجه می‌گیریم

$$P_{1i,j} = g^{-\frac{3}{2}} Q_{1i,j}(u_1, u_2), \qquad (۲۰)$$

که در آن $Q_{1i,j}$ چند جمله‌ای با ۲ متغیر است و $\frac{Q_{1i,j}}{g}$ چندجمله‌ای بر حسب u_1, u_2 نیست.

با استفاده از (۹) و (۱۴) بدست می‌آوریم

$$L_1 = g^{-\frac{3}{2}} \left(\sum_{i,j,k=1}^{2} \frac{\partial_i g}{g} g^{jk} Q_{1i,k} + \partial_i g^{jk} Q_{1i,k} + \partial_i Q_{1i,k} g^{jk}\right) \partial_j + \sum_{i,j,k=1}^{2} g^{jk} Q_{1i,k}\, \partial_i\, \partial_j). \qquad (۲۱)$$

با توجه به رابطه‌های (۱۷) و (۲۱) لم زیر را داریم

لم ۶: $L_1 g$ در رابطه زیر صدق می‌کند،

$$g^{\frac{7}{2}} L_1 g = Q_1(u_1, u_2) + gT_1(u_1, u_2), \qquad (۲۲)$$

بعلاوه داریم

$$< P_1 \nabla g, \nabla g > = -\frac{1}{2} g^{-\frac{5}{2}} Q_1(u_1, u_n), \qquad (۲۳)$$

که Q_1 و T_1 چند جمله‌ای‌هایی بر حسب u_1, u_2 است.

برهان: از رابطه‌های (۱۷) و (۲۱) بدست می‌آوریم

$$L_1 g = g^{\frac{-7}{2}}(\sum_{i,j,k=1}^{2}(g\ \partial_i g\, g^{jk}\, Q_{1i,k} + g^2\, \partial_i g^{jk} Q_{1i,k} + g^2\, \partial_i Q_{1i,k} g^{jk}\, \partial_j g + \sum_{i,j,k=1}^{2} g^2 g^{jk} Q_{1i,k}\, \partial_i g\, \partial_j g). \qquad (۲۴)$$

چون gg^{ij} و $g^2\, \partial_i g^{jk}$ چند جمله‌ای‌اند پس اگر قرار دهیم

$$Q_1 = \sum_{i,j,k=1}^{2}\left(g\, \partial_i g g^{jk} Q_{1i,k} + g^2\, \partial_i g^{jk} Q_{1i,k}\right) \partial_j g, \qquad (۲۵)$$

و

$$T_1 = \sum_{i,j,k=1}^{2} g\, \partial_i Q_{1i,k}\, g^{jk}\, \partial_j g + \sum_{i,j,k=1}^{2} g g^{jk} Q_{1i,k}\, \partial_i g\, \partial_j g,$$

آنگاه (۲۲) بدست می‌آید. واضح است که Q_1 و T_1 چندجمله‌ای‌هایی برحسب u_1, u_2 هستند. رابطه (۲۳) از تعریف ∇g و رابطه‌های (۱۷) و (۲۵) بدست می‌آید.

لم ۷: برای $L_1 g^{-\frac{1}{2}}$ رابطه زیر را داریم:

$$L_1 g^{-\frac{1}{2}} = -g^{-5}\left(\left(\frac{1}{8}\right) Q_1 + \frac{1}{2} T_1\right).$$

برهان: با استفاده از لم ۴ داریم

$$L_1\left(g^{-\frac{1}{2}}\right) = -\frac{1}{2}g^{-\frac{3}{2}}L_1 g - \frac{3}{4}g^{-\frac{5}{2}} < P_1\nabla g, \nabla g >,$$

با جایگذاری (۲۲) و (۲۳) در معادله بالا رابطه (۲۷) بدست می‌آید.

اثبات گزاره ۵: فرض کنید M در شرط (۲) برای $A = (a_{ij})$، $1 \le i, j \le 3$، صدق کند. با استفاده از رابطه‌های (۱۸) و (۲۷) داریم

$$g^{\frac{9}{2}}\left(-\sum_{j=1}^{3} a_{3\,j}a_j u_j + a_{33}\right) = -\left(\frac{1}{8}Q_1 + \frac{1}{2}gT_1\right) \qquad (۲۸)$$

چون طرف چپ تساوی بالا چندجمله‌ای است، نتیجه می‌گیریم $\frac{1}{8}Q_1 + \frac{1}{2}gT_1 = 0$ و در نتیجه $\frac{Q_1}{g}$ چند جمله‌ای است. از طرفی $\frac{Q_1}{g} = \sum g^{jk}Q_{1i,k}\,\partial_i g\,\partial_j g$، با توجه به ضابطه g^{jk} در رابطه (۱۷) و از اینکه $\frac{Q_{1i,k}}{g}$ چندجمله‌ای نیست، نتیجه می‌شود $\frac{Q_1}{g}$ چندجمله‌ای نیست و این یک تناقض است. بدین ترتیب گزاره ۵ اثبات می‌شود.

۳.۲. رویه‌های سره از نوع (II)

گزاره ۸: فرض کنید M، رویه درجه دوم سره از نوع (II) باشد. آنگاه M در شرط (۲) صدق می‌کند اگر و تنها اگر M یک کره باشد.

برای اثبات به محاسبه L_1 و بیان لم ۹ نیاز داریم.

پرمایش زیر را برای M در نظر می‌گیریم

$$X = (u_1, u_2, v),\quad v^2 = a_1u_1^2 + a_2u_2^2 + c,\quad a_1, a_2 \neq 0. \qquad (۲۹)$$

پس داریم $v_i = \partial_i v = {}^{a_iu_i}/_{v}$ که $i = 1,2$ از (۱۲) و (۱۳) بدست می‌آوریم

$$g_{ij} = \delta_{ij} + \frac{a_ia_ju_iu_j}{v^2},\quad g^{ij} = \delta_{ij} - \frac{a_ia_ju_iu_j}{gv^2}, \qquad (۳۰)$$

همچنین

$$g = 1 + \frac{1}{v^2}\sum_{i=1}^{2}(a_iu_i)^2,\quad \frac{1}{g} = 1 - \frac{1}{gv^2}\sum_{i=1}^{2}(a_iu_i)^2 \qquad (۳۱)$$

با استفاده از (۳۱) نتیجه می‌گیریم

$$\partial_i g = \frac{2}{v^2}\left(a_iu_i(1 + a_i - g)\right),$$

نگاشت گاوس M چنین بدست می‌آید

$$G = (G_1, G_2, G_3) = \frac{1}{\sqrt{g}}(-v_1, -v_2, 1) \qquad (۳۲)$$

برای محاسبه عملگر L_1، نیاز به محاسبه تبدیل نیوتن P_1 داریم با استفاده از (۳۲) بدست می‌آوریم

$$SX_1 = -\nabla^0_{X_1}G = -\frac{g^{-\frac{3}{2}}}{v}\{v_1^2(1 + a_1 - 2g)X_1 + v_1v_2(1 + a_2 - 2g)X_2\},$$
$$SX_2 = -\nabla^0_{X_2}G = -\frac{g^{-\frac{3}{2}}}{v}\{v_1v_2(1 + a_1 - 2g)X_1 + v_2^2(1 + a_2 - 2g)X_2\}. \qquad (۳۳)$$

با استفاده از تعریف P_1 و رابطه (۳۳) نتیجه می‌گیریم

$$P_{1i,j} = g^{-\frac{3}{2}}Q_{1i,j},. \qquad (۳۴)$$
$$Q_{1i,j} = \frac{1}{v^3}S_{1i,j}(u_1, u_2) + gR_{1i,j}\left(u_1, u_2, \frac{1}{v}\right),$$

که در آن $S_{1i,j}$ و $R_{1i,j}$ به ترتیب چند جمله‌ای‌هایی با ۲ و ۳ متغیراند و ضریب‌های $S_{1i,j}$ چنین بدست می‌آید

$$\prod_{k=1}^{2}(-1)^{\alpha_k}(1 + a_j)(1 + a_K)^{\beta_k}a_k^{\gamma_k}, \qquad (۳۵)$$

که در آن α_k، β_k و γ_k اعداد صحیح‌اند، از رابطه‌های (۱۴) و (۳۴) بدست می‌آوریم

$$L_1 = g^{-\frac{3}{2}}\Big(\sum_{i,j,k=1}^{2}\frac{\partial_i g}{g}g^{jk}Q_{1i,k}\,\partial_j - \sum_{i,j,k=1}^{2}\partial_i g^{jk}Q_{1i,k}\,\partial_j - g^{-\frac{3}{2}}\partial_i Q_{1i,k}g^{jk}\,\partial_j - \sum_{i,j,k=1}^{2}g^{jk}Q_{1i,k}\,\partial_i\,\partial_j\Big). \qquad (۳۶)$$

فرض کنید

$$A_j = -2g\sum_{i,k=1}^{2}\partial_i g\, g^{jk}Q_{1i,k}, \qquad (۳۷)$$

آنگاه با استفاده از (۳۶) و (۳۷) داریم

$$L_1 = g^{-\frac{7}{2}}\sum_{j=1}^{2} A_j\,\partial_j - g^{-\frac{5}{2}}\sum_{i,j,k=1}^{2}(2\,\partial_i g\,Q_{1i,j} - \frac{2}{v^4} a_i a_j a_k u_i u_j u_k Q_{1i,k} + \frac{1}{v^2} a_j a_k u_j Q_{1k,k} + \frac{1}{v^2} a_j a_k u_k Q_{1j,k} + \frac{1}{v^2} a_i a_j u_i u_j\,\partial_i Q_{1j,k} - g\,\partial_i Q_{1i,k})\,\partial_j - g^{-\frac{3}{2}}\sum_{i,j,k} g^{jk} Q_{1i,k}\,\partial_i\,\partial_j. \quad (۳۸)$$

اگر قرار دهیم

$$c_{jk} = g g^{jk}, \quad (۳۹)$$

آنگاه از رابطه‌های (۳۰)، (۳۱) و (۳۹) نتیجه می‌گیریم

$$c_{jk} = \delta_{jk} + \frac{1}{v^2}(\delta_{jk}\sum_{i=1}^{2} b_i^2 u_i^2 - a_k a_j u_k u_j). \quad (۴۰)$$

بنابراین از (۳۷) و (۴۰) بدست می‌آوریم

$$\sum_{i,j,k=1}^{2} c_{jk} Q_{1i,k}\,\partial_i g\,\partial_j g = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2} A_j\,\partial_j g \quad (۴۱)$$

لم ۹: برای $L_1 g^{-\frac{1}{2}}$ رابطه زیر را داریم

$$L_1 g^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{8} g^{-5}\sum_{j=1}^{2} A_j\,\partial_j g + g^{-4}\widetilde{P}_1(u_1, u_2, \frac{1}{v}),$$

که $\widetilde{P}_1(u_1, u_2, \frac{1}{v})$ چندجمله‌ای با ۳ متغیر است.

برهان: با استفاده از رابطه‌ی (۳۸) داریم

$$L_1 g^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}\, g^{-\frac{3}{2}} L_1 g - \frac{3}{4} g^{-4}\sum_{i,j,k=1}^{2} g^{jk} Q_{1i,k}\,\partial_i g\ \partial_j g = -\frac{1}{2}\, g^{-5}\sum_{j=1}^{2} A_j\,\partial_j g + g^{-4}\widetilde{P}_1(u_1, u_2, \frac{1}{v}) - \frac{3}{4}\, g^{-5}\sum g\, g^{jk} Q_{ri,k}\,\partial_i g\ \partial_j g \quad (۴۳)$$

حال با استفاده از رابطه (۴۱) و رابطه بالا رابطه (۴۲) بدست می‌آید.

اثبات گزاره ۸: فرض کنید M در شرط (۲) برای $A = (a_{ij})$، $1 \le i, j \le 3$، صدق کند. با استفاده از رابطه‌های (۴۲) و (۲) داریم

$$g^{\frac{9}{2}}\left\{\sum_{j=1}^{2} a_{3j} a_j \frac{u_j}{v} - a_{33}\right\} = -\frac{1}{8}\, g^{-\frac{9}{2}}\sum_{j=1}^{2} A_j\,\partial_j g + g\widetilde{P}_1.$$

بنابراین نتیجه می‌گیریم چندجمله‌ای مانند $\widetilde{T}_r$ با ۳ متغیر وجود دارد چنانچه

$$\sum_{j=1}^{2} A_j\,\partial_j g = g\,\widetilde{T}_1\left(u_1, u_2, \frac{1}{v}\right). \quad (۴۵)$$

بنابر رابطه (۳۴) می‌توان فرض کرد

$$B_j = -2g\sum_{i,j,k=1}^{2}\partial_i g g^{jk} S_{1i,k} \quad (۴۶)$$

چون v^2 چندجمله‌ای برحسب u_1, u_2 است، از رابطه‌های (۴۵) و (۴۶) نتیجه می‌گیریم چندجمله‌ای مانند R_1 بر حسب u_1, u_2 وجود دارد چنانچه

$$v^{15}(\sum_{i=1}^{2} B_i\,\partial_i g) = gR_1(u_1, u_2) \quad (۴۷)$$

در رابطه (۴۷) قرار می‌دهیم $v_1 = 0$ یا $v_2 = 0$، آنگاه از رابطه‌های (۵)، (۲۸)، (۲۹) و (۴۷) بدست می‌آوریم

$$R_1(0, u_2) = 0, \quad R_1(u_1, 0) = 0.$$

در نتیجه، $R_1 = 0$. بنابراین از رابطه‌های (۲۱)، (۴۶) و (۴۷) نتیجه می‌گیریم، $u_j = -1$. پس M کره است.

فهرست منابع

1. Baikoussis, C., Ruled submanifolds with finite type Gauss map, Journal of Geometry, (1994), 49, 42-45.

2. Baikoussis, C., Blair D. E., On the Gauss map of ruled surfaces, Glasgow Mathematical, (1992), 34, 355-359.

3. Dursun, U., Hypersurfaces with pointwise 1-type Gauss map, Taiwanese Journal of Mathematics, (2007), 11, 1407-1416.

4. Chen, B.Y., Piccinni P., Submanifolds with finite type Gauss map, Bulletin of the Australian Mathematical Society, (1987), 35 (2) 161-186.

5. Dillen, F., Pas, J., Verstraelen, L., On the Gauss map of surfaces of revolution, Library of Institute of Mathematics, Academia Sinica, (1990), 18, 239-246.

6. Kim, D. S., On the Gauss map of quadric hypersurfaces, Korean Mathematical Society. (1994), 429-437.

7. Reilly, R. C., Variational properties of functions of the mean curvatures for hypersurfaces in space forms, Journal of Differential Geometry, (1973), 8 (3), 465-477.

8. Cheng, S .Y., Yau, S. T., Hypersurfaces with constant scaler curvature, Mathematische Annalen, (1977), 225 (3), 195-204.

9. Kim, D. S., Kim, J. R., Kim, Y. H., Cheng-Yau operator and Gauss map of surfaces of revolution B. Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society, (2016), 39, 1319-1327.

10. Kim, Y. H., Turgay, N. C., Surfaces in E3 with L1- pointwise 1-type Gauss map, Bulletin of the Korean Mathematical Society. (2013), 50, 935-949.

11. Mohammadpouri, A., Rotational hypersurfaces with Lr-pointwise 1-type Gauss map, Bulletin of Parana´s Mathematical Society, (2018), 363, 195-205.

12. Mohammadpouri, A., Hypersurfaces Lr-pointwise 1-type Gauss map. Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry, 14, (1), (2018), 67-77.

13. Mohammadpouri, A., Kashani, S.M.A., Quadric hypersurfaces of L_r finite type, Beiträge zur Algebra und Geometrie. (2012), 625-641.

14. Alias, L. J., Gurbuz, N., An extension of Takahashi theorem for the linearized operators of the higher order mean curvatures, Geometriae Dedicata, (2006), 121, 113-127.

15. Kim, D. S., Ruld surfaces and Gauss map, Bulletin of the Korean Mathematical Society, (2015), 52, 1661-1668.