دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال پنجم، شماره بیست و یکم، آذر و دی ۱۳۹۸
شماره شاپا: ۵۸۸X-۲۵۸۸

پژوهش‌های نوین در ریاضی

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

یک روش لونبرگ-مارکوارت جدید بر پایه ساختار گرادیان مزدوج برای حل معادلات قدرمطلقی

فرزاد راهپیمایی[۱]، کیوان امینی*[۲]، توفیق اللهویرنلو[۳]

[۱و۳] گروه ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات، تهران، ایران
[۲] گروه ریاضی، دانشگاه رازی، کرمانشاه، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۷/۰۹/۲۴   تاریخ پذیرش مقاله: ۹۷/۱۱/۲۷

چکیده

در این مقاله، یک روش گرادیان مزدوج جدید برای حل معادله قدرمطلقی ارائه می‌شود که از روش لونبرگ–مارکوارت بر پایه ساختار گرادیان مزدوج استفاده می‌کند. در روش‌های گرادیان مزدوج جهت جستجوی جدید ترکیب جهت تندترین شیب با جهت جستجوی تکرار قبلی می‌باشد که ممکن است به نتایج عددی خوبی منجر نشود. بنابراین، ما با استفاده از جهت لونبرگ–مارکوارت جهت تندترین شیب را اصلاح می‌کنیم. جهت‌های جستجوی تولید شده توسط الگوریتم جدید در شرط کاهشی کافی صدق می‌کنند. همچنین، همگرایی سراسری الگوریتم جدید تحت بعضی فرض‌های استاندارد ثابت شده است. نتایج عددی نیز کارایی روش جدید را تایید می‌کنند.

واژه‌های کلیدی: معادله قدرمطلقی، روش لونبرگ–مارکوارت، روش گرادیان مزدوج، همگرایی سراسری.

*. عهده‌دار مکاتبات: Email: :kamini@razi.ac.ir

۱. مقدمه

معادله قدرمطلقی (AVE) زیر را در نظر می‌گیریم:

$$F(x) = \mathrm{A}x - |x| - b = 0, \qquad (۱)$$

که در آن $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$، $b \in \mathbb{R}^n$ و $|\cdot|$ نشان دهنده تابع قدرمطلق است. هر جواب معادله (۱) یک جواب مسأله بهینه‌سازی کمترین مربعات به‌صورت زیر است:

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x) = \frac{1}{2}\|F(x)\|^2 = \frac{1}{2}\|Ax - |x| - b\|^2 \qquad (۲)$$

که $\|.\|$ نرم اقلیدسی است. منگسریان [۱] نشان داد که یک مسأله مکملی خطی (LCP) با یک معادله قدرمطلقی معادل است. با توجه به اینکه نشان داده شده است که یک مسأله مکملی خطی NP–سخت است [۲و۳]، بنابراین معادله قدرمطلقی نیز یک مسأله NP–سخت خواهد بود. برخی پژوهشگران الگوریتم‌های تکراری مختلفی را برای حل معادله قدرمطلقی ارائه کرده‌اند [۱و۴].

روش لونبرگ–مارکوارت یک روش محبوب و شناخته‌شده برای حل دستگاه معادلات غیرخطی می‌باشد که یک اصلاح روش نیوتن است. جهت تولید شده توسط روش لونبرگ–مارکوارت یک ترکیب جهت تندترین شیب و جهت گاوس–نیوتن در نظر گرفته شده است. در روش لونبرگ–مارکوارت جهت جستجوی d_k به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$d_k^{LM} = -\left(J_k^T J_k + \lambda_k^{LM}\right)^{-1} J_k^T F_k, \qquad (۳)$$

که $J_k = F'(x_k)$، $F_k = F(x_k)$، I ماتریس همانی و λ_k^{LM} یک پارامتر می‌باشد. اگر ماتریس ژاکوبین J_k در جواب بهینه x^* از معادله (۱) نامنفرد باشد و نقطه آغازین $x_0 \in \mathbb{R}^n$ به اندازه کافی به x^* نزدیک باشد، آن‌گاه روش لونبرگ–مارکوارت همگرایی مرتبه دوم دارد [۵].

همان‌طور که از رابطه (۳) مشهود است جهت لونبرگ–مارکوارت را می‌توان به نوعی یک ترکیب از روش‌های گرادیان و نیوتن در نظر گرفت. روش‌های گرادیان مزدوج یک کلاس مشهور از روش‌های تکراری برای حل مسائل بهینه‌سازی نامقید، به‌خصوص مسائل با بعد بالا می‌باشند. در این روش‌ها تکرارهای جدید به‌صورت

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k,$$

می‌باشند که α_k طول گام است و جهت جستجوی d_k به‌صورت زیر تولید می‌شود:

$$d_k = \begin{cases} -g_k, & k = 0, \\ -g_k + \beta_k d_{k-1}, & k \geq 1, \end{cases}$$

که $g_k = \nabla f(x_k)$ و $\beta_k \in \mathbb{R}$ یک پارامتر است. در حالت کلی، فرمول‌های مختلف برای پارامتر β_k به روش‌های گرادیان مزدوج غیرخطی مجزا منجر می‌شوند. بعضی فرمول‌های مشهور برای پارامتر β_k توسط فلچر–ریوز (FR) [۶]، پولاک–ریبیر–پولیاک (PRP) [۷] و دای–یوان (DY) [۸] به‌صورت زیر ارائه شده اند:

$$\beta_k^{FR} = \frac{\|g_k\|^2}{\|g_{k-1}\|^2},$$

$$\beta_k^{PRP} = \frac{g_k^T y_{k-1}}{\|g_{k-1}\|^2},$$

$$\beta_k^{DY} = \frac{\|g_k\|^2}{d_{k-1}^T y_{k-1}},$$

که در آن $y_{k-1} = g_k - g_{k-1}$ است. در این مقاله، یک روش تکراری جدید با استفاده از روش لونبرگ–مارکوارت بر پایه ساختار روش‌های گرادیان مزدوج برای حل معادله قدرمطلقی ارائه می‌شود که در آن برای تعیین طول گام α_k از جستجوی خطی گلدشتاین استفاده می‌گردد [۵]. جهت جدید در شرط کاهشی کافی صدق می‌کند. علاوه بر این، همگرایی سراسری روش جدید را به کمک بعضی فرض‌های استاندارد ثابت می‌کنیم. در نهایت به کمک برخی مثال‌های عددی کارایی روش ارائه شده را مورد آزمون قرار می‌دهیم.

ساختار این مقاله به‌صورت زیر سازمان‌دهی شده است. در بخش ۲، بر پایه ساختار گرادیان مزدوج یک فرآیند جدید

لونبرگ-مارکوارت برای حل معادله قدرمطلقی ارائه شده است. همگرایی سراسری روش جدید در بخش ۳ ثابت شده است. در بخش ۴، نتایج عددی الگوریتم با پیاده‌سازی الگوریتم و مقایسه آن با برخی از روش‌های موجود مورد بررسی قرار می‌گیرد. بخش ۵ مقاله به بیان برخی از نتایج ارائه شده می‌پردازد.

۲. روش جدید

در این بخش، یک روش جدید برای حل معادله قدرمطلقی (۱) معرفی می‌گردد. مجموعه D را همه ترکیبات خطی متناهی از عناصر آن به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\operatorname{span}(D)=\left\{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i d_i \ \mid\ k\in\mathbb{N}, d_i\in D,\ \lambda_i\in\mathbb{R}\right\}. \quad (۴)$$

چون معادله قدرمطلقی (۱) مشتق‌پذیر نیست بنابراین ژاکوبی آن و در نتیجه گرادیان تابع $f(x)$ موجود نیستند. لذا مشابه [۸] برای تولید جهت جدید از مشتقات تعمیم‌یافته کلارک استفاده می‌کنیم. در این جهت ابتدا ماتریس ژاکوبین تعمیم‌یافته تابع $|x|$ را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$D(x)=\partial|x|=\operatorname{diag}(\operatorname{sgn}(x)), \quad (۵)$$

که در آن $\operatorname{sgn}(x)$ تابع علامت است. با توجه به اینکه

$$|x|=D(x)x,$$

لذا روابط (۱) و (۵) نتیجه می‌دهند

$$F(x)=Ax-|x|-b=(A-D(x))x-b. \quad (۶)$$

با توجه به (۵)، ژاکوبین تعمیم‌یافته تابع $F(x)$ به‌صورت زیر قابل تعریف است.

$$\partial F(x)=A-D(x). \quad (۷)$$

بنابراین گرادیان تعمیم‌یافته $f(x)$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$\begin{aligned}\partial f(x)&=\partial F(x)^T F(x)\\&=(A-D(x))^T\left((A-D(x))x-b\right).\end{aligned} \quad (۸)$$

در نهایت از روابط (۷) و (۸) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}J_k&=\partial F(x_k)=A-D(x_k),\\ \partial f_k&=J_k^T F_k,\end{aligned} \quad (۹)$$

که در آن $\partial f_k=\partial f(x_k)$ است.
روش‌های گرادیان مزدوج برای حل معادله قدرمطلقی از ترکیب جهت تندترین شیب $-\partial f_k$ و جهت جستجوی تکرار قبل d_{k-1} استفاده می‌کند. به عبارت دیگر جهت گرادیان مزدوج d_k به‌صورت زیر تولید می‌شود:

$$d_k\in\operatorname{span}\{-\partial f_k, d_{k-1}\}.$$

چون همگرایی جهت تندترین شیب $-\partial f_k$ کند است و ممکن است به نتایج عددی مطلوبی منجر نشود لذا در این مقاله ما با تعمیم این ایده جهت را یک ترکیب از جهت لونبرگ-مارکورات اصلاح‌شده با گام قبلی مشابه با ایده گرادیان مزدوج در نظر می‌گیریم.
جهت لونبرگ-مارکوارت با استفاده از مشتق کلارک بهُصورت زیر قابل تعریف است

$$d_k^{LM}=-\left(J_k^T J_k+\lambda_k^{LM} I\right)^{-1}\partial f_k, \quad (۱۰)$$

که در آن λ_k^{LM} پارامتر لونبرگ-مارکوارت نامیده می‌شود. در این مقاله به دنبال تعریف جهت جستجوی جدید d_k هستیم به‌طوری‌که

$$d_k\in\operatorname{span}\langle-\partial f_k, d_k^{LM}, d_{k-1}, y_{k-1}\rangle,$$

که در آن $y_{k-1}=\partial f_k-\partial f_{k-1}$ است. با این هدف جهت لونبرگ-مارکوارت بر پایه ساختار گرادیان مزدوج را به‌صورت زیر پیشنهاد می‌دهیم

$$d_k=-\partial f_k+d_k^{LM}+\gamma_k\left(\beta_k^1 d_{k-1}-\beta_k^2 y_{k-1}\right), \quad (۱۱)$$

که در آن پارامترهای β_k^1 و β_k^2 به‌صورت

$$\beta_k^1=\frac{\partial f_k^T y_{k-1}}{\|\partial f_{k-1}\|^2},\qquad \beta_k^2=\frac{\partial f_k^T d_{k-1}}{\|\partial f_{k-1}\|^2}, \quad (۱۲)$$

تعریف می‌شوند و $\{\gamma_k\}_{k\geq 0}$ یک دنباله نزولی است که

$$\lim_{k\to\infty} \gamma_k = 0,$$

می‌باشد.

با شروع از نقطه آغازین $x_0 \in \mathbb{R}^n$، دنباله تکرارهای جدید به‌صورت $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$ است که طول گام α_k در شرایط جستجوی خطی گلدشتاین زیر صدق می‌کند[۵]:

$$\begin{aligned} & f(x_k) + (1-c)\alpha_k \partial f_k^T d_k \\ & \le f(x_k + \alpha_k d_k) \\ & \le f(x_k) + c\alpha_k \partial f_k^T d_k \end{aligned} \tag{۱۳}$$

که در آن $c \in (0, 0/5)$ است. در نتیجه، الگوریتم لونبرگ-مارکوارت بر پایه ساختار گرادیان مزدوج برای حل معادله قدرمطلقی به‌صورت زیر خواهد بود.

الگوریتم۱: الگوریتم لونبرگ-مارکوارت اصلاح شده برای حل معادله قدرمطلقی (ILM).

ورودی الگوریتم: بردار آغازین $x_0 \in \mathbb{R}^n$، ماتریس $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$، بردار $b \in \mathbb{R}^n$، پارامترهای $\delta \in (0,1)$، $\beta > 0$، $c \in (0, 0/5)$ و $\varepsilon > 0$ را انتخاب کنید. قرار ده $k = 0$

گام اول: قرار ده

$$d_k = -\partial f_k, \qquad F_k = A - D(x_k).$$

گام دوم: تا زمانی که $\|F_k\| \le \varepsilon$ گام‌های سوم تا دهم را تکرار کن.

گام سوم: با استفاده از جستجوی خطی گلدشتاین (۱۳) طول گام α_k را تعیین کن.

گام چهارم: تکرار جدید را به‌صورت $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$ به‌دست آور.

گام پنجم: پارامتر لونبرگ-مارکوارت λ_{k+1}^{LM} را محاسبه کن.

گام ششم: ماتریس ژاکوبین J_{k+1} را با (۹) و جهت جستجوی جدید d_{k+1}^{LM} را با (۱۰) به‌دست آور.

گام هفتم: پارامترهای β_{k+1}^1 و β_{k+1}^2 را از رابطه (۱۲) محاسبه کن.

گام هشتم: پارامتر γ_{k+1}^{LM} را انتخاب کن.

گام نهم: جهت جستجوی d_{k+1} را از رابطه (۱۱) محاسبه کن.

گام دهم: قرار ده $k = k + 1$.

در بخش بعد خواص همگرایی الگوریتم فوق مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۳. آنالیز همگرایی

برای بررسی همگرایی سراسری روش لونبرگ-مارکوارت اصلاح شده برای حل معادله قدرمطلقی، فرض‌های زیر را در نظر می‌گیریم.

فرض (H1): تابع هدف $f(x)$ روی مجموعه $L(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \le f(x_0)\}$ برای نقطه آغازین $x_0 \in \mathbb{R}^n$ از پایین کراندار است.

فرض (H2): گرادیان تعمیم‌یافته تابع هدف $f(x)$ روی مجموعه باز، محدب و کراندار $\Omega \subseteq L(x_0)$ پیوسته لیپ‌شیتس است. یعنی

$$\|\partial f(x) - \partial f(y)\| \le L\|x - y\|, \quad \forall x, y \in \Omega$$

که $L > 0$ است. (به لم ۶ در [۱۱] مراجعه کنید)

با استفاده از **(H1)** و **(H2)** ثابت $\Gamma > 0$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$\|\partial f(x)\| \le \Gamma, \qquad \forall x \in \Omega. \tag{۱۴}$$

همچنین با استفاده از **(H2)** خواهیم داشت:

$$\|y_k\| \le L\alpha_k \|d_k\|. \tag{۱۵}$$

لم۱: فرض کنید جهت جستجوی d_k توسط الگوریتم ۱ تولید شده باشد. در این‌صورت جهت جستجوی d_k دارای خاصیت کاهش کافی است. به عبارت دیگر

$$\partial f_k^T d_k \le -\|\partial f_k\|^2.$$

اثبات: با استفاده از روابط (۱۰)- (۱۲) داریم:

$$\begin{aligned}\partial f_k^T d_k &= -\|\partial f_k\|^2 + \partial f_k^T d_k^{LM} + \gamma_k \partial f_k^T \left(\beta_k^1 d_{k-1} - \beta_k^2 y_{k-1}\right)\\ &= -\|\partial f_k\|^2 - \partial f_k^T \left(J_k^T J_k + \lambda_k^{LM} I\right)^{-1} \partial f_k\\ &\quad + \gamma_k \partial f_k^T \left(\frac{\partial f_k^T y_{k-1}}{\|\partial f_{k-1}\|^2} d_{k-1} - \frac{\partial f_k^T d_{k-1}}{\|\partial f_{k-1}\|^2} y_{k-1}\right).\end{aligned}$$

پس

$$\begin{aligned}\partial f_k^T d_k &\le -\|\partial f_k\|^2\\ &\quad + \gamma_k \left(\frac{\partial f_k^T y_{k-1}}{\|\partial f_{k-1}\|^2} \partial f_k^T d_{k-1} - \frac{\partial f_k^T d_{k-1}}{\|\partial f_{k-1}\|^2} \partial f_k^T y_{k-1}\right)\\ &= -\|\partial f_k\|^2.\end{aligned}$$

در نتیجه جهت d_k در خاصیت کاهش کافی با $c = 1$ صدق می‌کند.

لم۲: فرض کنید دنباله $\{x_k\}$ دنباله تولید شده توسط الگوریتم ۱ باشد. در این‌صورت

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\partial f_k^T d_k\right)^2}{\|d_k\|^2} < \infty.$$

اثبات: از جستجوی خطی گلدشتاین، شرط (۱۳)، داریم:

$$(1-c)\alpha_k \partial f_k^T d_k \le f(x_k + \alpha_k d_k) - f(x_k). \tag{۱۶}$$

با استفاده از قضیه مقدار میانگین $t_k \in (0, \alpha_k)$ موجود است به‌طوری‌که

$$f(x_k + \alpha_k d_k) - f(x_k) = \alpha_k \partial f^T(x_k + t_k d_k) d_k, \tag{۱۷}$$

لم ۱ در کنار روابط (۱۶) و (۱۷) نتیجه می‌دهد

$$\begin{aligned}&-c\alpha_k \partial f_k^T d_k\\ &\le \alpha_k \partial f^T(x_k + t_k d_k) d_k - \alpha_k \partial f_k^T d_k\\ &= \alpha_k \left(\partial f(x_k + t_k d_k) - \partial f_k\right)^T d_k\\ &\le \alpha_k t_k L \|d_k\|^2.\end{aligned}$$

بنابراین

$$-c\partial f_k^T d_k \le t_k L \|d_k\|^2, \tag{۱۸}$$

لذا

$$\alpha_k \ge t_k \ge -\frac{c\partial f_k^T d_k}{L\|d_k\|^2}. \tag{۱۹}$$

در نهایت استفاده از روابط (۱۳) و (۱۹) نتیجه می‌دهد

$$\begin{aligned}&f(x_k + \alpha_k d_k) - f(x_k)\\ &\le c\alpha_k \partial f_k^T d_k \le\\ &-\frac{c^2 \left(\partial f_k^T d_k\right)^2}{L\|d_k\|^2}.\end{aligned} \tag{۲۰}$$

استفاده از فرض **(H1)** و رابطه (۲۰) نتیجه می‌دهد

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\partial f_k^T d_k\right)^2}{\|d_k\|^2} \le\\ &\sum_{k=1}^{\infty} \left(f(\mathrm{x}_k) - f(\mathrm{x}_k + \alpha_k \mathrm{d}_k)\right) < \infty.\end{aligned}$$

لم۳: فرض کنید فرض‌های **(H1)** و **(H2)** برقرار هستند و دنباله $\{x_k\}$ توسط الگوریتم ۱ تولید شده باشد. اگر ثابت $\varepsilon > 0$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $\|\partial f_k\| \ge \varepsilon$ آن‌گاه

$$\|d_k\| \le \delta. \tag{۲۱}$$

اثبات: با استفاده از روابط (۱۱) و (۱۲) داریم

$$\begin{aligned}\|d_k\| &\le \|\partial f_k\| + \|d_k^{LM}\| +\\ &\gamma_k |\beta_k^1| \|d_{k-1}\| + \gamma_k |\beta_k^2| \|y_{k-1}\|.\end{aligned}$$

لذا

$$\|d_k\| \le \|\partial f_k\| + \|d_k^{LM}\| + \gamma_k \frac{|\partial f_k^T y_{k-1}|}{\|\partial f_{k-1}\|^2}\|d_{k-1}\| + \gamma_k \frac{|\partial f_k^T d_{k-1}|}{\|\partial f_{k-1}\|^2}\|y_{k-1}\|.$$

چون از قضیه ۳-۲ در [۱۰] ثابت $\delta_1 > 0$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$\|d_k^{LM}\| \le \delta_1$$

پس از روابط (۱۴) و (۱۵) می‌توان نتیجه گرفت

$$\|d_k\| \le \Gamma + \delta_1 + \gamma_k \frac{\Gamma L \alpha_{k-1}\|d_{k-1}\|}{\varepsilon^2}\|d_{k-1}\| + \gamma_k \frac{\Gamma\|d_{k-1}\|}{\varepsilon^2} L\alpha_{k-1}\|d_{k-1}\| = \Gamma + \delta_1 + \gamma_k \frac{2\Gamma L\alpha_{k-1}\|d_{k-1}\|^2}{\varepsilon^2}.$$

اکنون، مشابه لم ۵ در [۱۱] می‌توان نتیجه گرفت

$$\|d_k\| \le \delta.$$

قضیه ۱: فرض کنید فرض‌های **(H1)** و **(H2)** برقرار باشند و دنباله $\{x_k\}$ توسط الگوریتم ۱ تولید شده باشد. در اینصورت

$$\liminf_{k\to+\infty} \|\partial f_k\| = 0.$$

اثبات: با استفاده از برهان خلف، فرض کنیم $\xi > 0$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که

$$\|\partial f_k\| \ge \xi, \quad \forall k. \qquad (۲۲)$$

از لم ۱ داریم:

$$\left(\partial f_k^T d_k\right)^2 \ge \|\partial f_k\|^4 \qquad (۲۳)$$

بنابراین از لم ۲، (۲۱) و (۲۳) می‌توان نتیجه گرفت

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|\partial f_k\|^4}{\delta^2} \le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|\partial f_k\|^4}{\|d_k\|^2} \le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\partial f_k^T d_k\right)^2}{\|d_k\|^2} < \infty.$$

لذا

$$\liminf_{k\to+\infty} \|\partial f_k\| = 0.$$

این رابطه با رابطه (۲۲) در تناقض است. پس فرض خلف باطل و حکم برقرار است.

۴. نتایج عددی

در این بخش، نتایج عددی حاصل از روش لونبرگ–مارکوارت اصلاح شده، الگوریتم ILM، را با نتایج عددی حاصل از روش لونبرگ–مارکوارت (LM) [۱۰] برای حل معادله قدرمطلقی مقایسه می‌کنیم. برای مقایسه این روش‌ها از مسأله‌های قدرمطلقی زیر با ابعاد

$$n \in \{۳۰۰, ۶۰۰, ۹۰۰, \ldots, ۳۰۰۰\}$$

در نرم‌افزار متلب استفاده می‌شود. برای مقایسه این دو روش آن‌ها را روی سه نوع مسأله قدرمطلقی با ابعاد فوق مورد آزمون قرار می‌دهیم. در این مسائل ماتریس $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$، بردار $b \in \mathbb{R}^n$ و بردار آغازین $x_0 \in \mathbb{R}^n$ توسط پروسه‌های **T1-T3** که در ادامه آورده می‌شوند تعیین می‌شود.

Procedure (T1) [۱۲]
Input: n
Output: A, b, x_0
begin
$A = ۴ + \textbf{rand}(n,n)$;
  for $i = ۱,\ldots,n$ **do**
    $A(i,i) = ۵۰۰$;
    end
  for $i = ۱,\ldots,n$ **do**
    for $j = ۱,\ldots,n$ **do**
      if $i > j$ **then**

$A(\mathrm{j,i}) = A(\mathrm{i,j})$;
end
end
end
$b = (A - \mathbf{eye}(n)) * \mathbf{ones}(n,۱)$;
$x_0 = \mathbf{zeros}(n,۱)$;
end

Procedure (T2) [۱۰]
Input: n
Output: A, b, x_0
begin
for $i = ۱,\dots,n$ **do**
for $j = ۱,\dots,n$ **do**
$A(i, \mathrm{j}) = ۰/۵$;
end
end
for $i = ۱,\dots,n$ **do**
$A(i, i) = ۴n$;
if $i < j$ **then**
$A(\mathrm{i, i+۱}) = n$;
$A(\mathrm{i+۱, i}) = n$;
end
end
$b = (A - \mathbf{eye}(n)) * \mathbf{ones}(n, ۱)$;
$x_0 = \mathbf{zeros}(n, ۱)$;
end

Procedure (T3) [۱۳]
Input: n
Output: A, b, x_0
begin
$A = \mathbf{round}\, ۱۰۰ * \mathbf{eye}(n, n) - ۰/۰۲ * (۲ * \mathbf{rand}(n, n) - ۱))$;
$b = (A - \mathbf{eye}(n)) * \mathbf{ones}(n, ۱)$;
$x_0 = \mathbf{rand}(n, ۱)$;
end

بنابراین، از ۳۰ تست مسأله قدرمطلقی برای مقایسه روش‌ها استفاده می‌کنیم. همچنین، پارامترهای لونبرگ–مارکوارت متناظر با [۱۰] در گام kام به‌صورت

$$\lambda_k^{LM} = \|F_k\|^{\beta},$$

با $\beta = ۱/۵$ و $\gamma_k^{LM} = \frac{\delta}{(۱+k)^{0/۹}}$ محاسبه می‌شوند که

در آن $\delta = ۱0^{-۵}$ است. شرط توقف هر دو الگوریتم $\|F_k\| < ۱0^{-10}$ یا رسیدن تعداد تکرارهای الگوریتم به ۵۰۰ می‌باشد. نتایج عددی حاصل از اجرای این دو الگوریتم در جداول ۴–۱ تا ۴–۳ ارائه شده است. دراین جداول NI و C_t به‌ترتیب تعداد تکرارها و زمان لازم برای اجرای الگوریتم می‌باشند. نتایج عددی حاصل در جداول ۴–۱ تا ۴–۳ نشان می‌دهند که برای همه تست مسأله‌های استفاده شده، روش لونبرگ–مارکوارت اصلاح شده در تعداد تکرارها ۸۰٪ و در زمان لازم برای اجرای الگوریتم ۶۳٪ برتری دارد.

۵. نتیجه‌گیری

در این مقاله، یک روش لونبرگ–مارکوارت جدید بر پایه ساختار روش گرادیان مزدوج برای حل معادله قدرمطلقی ارائه گردید. نشان داده شد که جهت‌های تولید شده در روش جدید در شرط کاهشی کافی صدق می‌کنند. همچنین، نتایج عددی نشان می‌دهند که روش لونبرگ–مارکوارت اصلاح شده جدید در مقایسه با روش لونبرگ–مارکوارت برای حل معادله قدرمطلقی بهتر عمل می‌کند.

جدول ۴-۱: مقایسه روش‌های ILM و LM برای حل معادله قدرمطلقی مسأله ۱

روش	بعد	۳۰۰	۶۰۰	۹۰۰	۱۲۰۰	۱۵۰۰	۱۸۰۰	۲۱۰۰	۲۴۰۰	۲۷۰۰	۳۰۰۰
LM	NI	۵	۶	۶	۶	۶	۷	۷	۷	۷	۷
	C_t	۰/۴۲۲	۱/۵۴۷	۳/۶۴۱	۷/۴۲۲	۱۳/۰۶۳	۲۴/۷۰۳	۳۵/۹۸۴	۵۱/۲۰۳	۶۸/۸۵۹	۹۳/۵۷۸
ILM	NI	۴	۵	۵	۵	۶	۶	۷	۷	۷	۸
	C_t	۰/۲۹۷	۱/۱۸۸	۳/۳۲۸	۶/۴۶۹	۱۲/۸۷۵	۲۱/۰۴۷	۳۶/۲۸۱	۵۱/۱۴۱	۶۸/۷۰۳	۱۰۸/۷۳۴

جدول ۴-۲: مقایسه روش‌های ILM و LM برای حل معادله قدرمطلقی مسأله ۲

روش	بعد	۳۰۰	۶۰۰	۹۰۰	۱۲۰۰	۱۵۰۰	۱۸۰۰	۲۱۰۰	۲۴۰۰	۲۷۰۰	۳۰۰۰
LM	NI	۵	۵	۵	۶	۶	۶	۶	۶	۶	۶
	C_t	۰/۲۳۴	۱/۲۳۴	۳/۲۸۱	۸/۰۴۷	۱۳/۰۶۳	۲۱/۳۷۵	۳۲/۰۴۷	۴۴/۴۲۲	۶۰/۶۷۲	۸۳/۲۱۹
ILM	NI	۴	۵	۵	۶	۶	۷	۷	۸	۸	۹
	C_t	۰/۲۰۳	۱/۲۵۰	۳/۴۲۲	۸/۱۵۶	۱۳/۱۷۲	۲۴/۲۰۳	۳۶/۳۱۳	۵۷/۰۴۷	۷۸/۷۵۰	۱۱۹/۲۱۹

جدول ۴-۳: مقایسه روش‌های ILM و LM برای حل معادله قدرمطلقی مسأله ۳

روش	بعد	۳۰۰	۶۰۰	۹۰۰	۱۲۰۰	۱۵۰۰	۱۸۰۰	۲۱۰۰	۲۴۰۰	۲۷۰۰	۳۰۰۰
LM	NI	۶	۵۰۰	۵۰۰	۵۰۰	۵۰۰	۵۰۰	۵۰۰	۵۰۰	۵۰۰	۵۰۰
	C_t	۰/۲۳۴	۱۱/۸۱۳	۲۵/۰۱۶	۴۵/۲۵۰	۷۲/۹۳۸	۱۰۸/۵۰۰	۱۵۹/۷۵۰	۲۰۹/۷۶۶	۲۸۳/۲۱۹	۳۶۲/۲۱۹
ILM	NI	۳	۴	۴	۴	۴	۴	۴	۴	۴	۴
	C_t	۰/۱۷۲	۱/۶۷۲	۳/۲۶۶	۶/۳۹۱	۱۰/۵۱۶	۱۶/۵۶۳	۲۴/۱۰۹	۳۳/۱۴۱	۴۴/۲۱۹	۵۸/۷۸۱

فهرست منابع

[1] O. L. Mangasarian, R. R. Meyer, Absolute value equations, Linear Algebra and its Applications 419(2) (2006) 359-367.

[2] S. J. Chung, NP-completeness of the linear complementarity problem, Journal of Optimization Theory and Applications 60(3) (1989) 393-399.

[3] R. W. Cottle, J. S. Pang, R. E. Stone, The Linear Complementarity Problem, Academic Press, New York, (1992).

[4] X. H. Miao, J. Yang, S. Hu, A generalized Newton method for absolute value equations associated with circular cones, Applied Mathematics and Computation 269 (2015) 155-168.

[5] J. Nocedal, S.J. Wright, Numerical Optimization, NewYork, Springer, 2006.

[6] R. Fletcher, C. Reeves, Function minimization by conjugate gradients, Computer Journal 7 (1964) 149-154.

[7] E. Polak, G. Ribiere, Note sur la convergence de directions conjugees, Rev. Francaise Informat Recherche Opertionelle, 3(16) (1969) 35-43.

[8] Y. H. Dai, Y. Yuan, A nonlinear conjugate gradient method with a strong global convergence property, SIAM Journal on Optimization 10 (1999) 177-182.

[9] R. T. Rockafellar, New applications of duality in convex programming, In Proceedings Fourth Conference on Probability, Brasov, Romania, (1971).

[10] J. Iqbal, A. Iqbal, M. Arif, Levenberg-Marquardt method for solving systems of absolute value equations, Journal of Computational and Applied Mathematics 282 (2015) 134-138.

[11] F. Rahpeymaii, K. Amini, T. Allahviranloo, M. Rostamy Malkhalifeh, A new class of conjugate gradient methods forunconstrained smooth optimization and absolute value equations, Calcolo 56(2) (2019), https: //doi.org/10.1007/s10092-018-0298-8.

[12] M. A. Noor, J. Iqbal, Kh. I. Noor, E. Al-Said، On an iterative method for solving absolute value equations, Optimization Letters 6 (2012) 1027-1033.

[13] N. Ujevic, A new iterative method for solving linear systems, Applied Mathematics and Computation 79 (2006) 725-730.