دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال پنجم، شماره بیست و یکم، آذر و دی ۱۳۹۸
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

پژوهش‌های نوین در ریاضی
دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

نگاشت‌های δ-همریختی به توی جبرهای باناخ دوگان

بهمن حیاتی[۱*]، حمید خدایی[۲]

[۱،۲] استادیار گروه ریاضی، دانشکده ریاضی و آمار، دانشگاه ملایر، ملایر، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۷/۱۱/۷ تاریخ پذیرش مقاله:۹۸/۵/۲۸

چکیده

فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک جبر باناخ و $(\mathfrak{B},\mathfrak{B}_*)$ یک جبر باناخ دوگان باشد. نگاشت خطی $\varphi:\mathfrak{A}\longrightarrow\mathfrak{B}$ را یک نگاشت δ-همریختی گوییم هرگاه بازای هر $a_1,a_2\in\mathfrak{A}$ داشته باشیم $\|\varphi(a_1a_2)-\varphi(a_1)\varphi(a_2)\|\leq\delta\|a_1\|\|a_2\|$. در این مقاله، به مطالعه‌ی نگاشت‌های δ-همریختی از $\mathfrak{A}$ به توی $\mathfrak{B}$ می‌پردازیم. در بین نتایجی که بدست می‌آوریم، نشان خواهیم داد اگر $\varphi:\mathfrak{A}\longrightarrow\mathfrak{B}$ نگاشت δ-همریختی باشد و $\mathfrak{B}_*$ روی زیر جبر تولید شده توسط $\varphi(\mathfrak{A})$ ضربی باشد، آنگاه نگاشت φ کراندار است و $\|\varphi\|\leq 1+\delta$.

واژه‌های کلیدی: نگاشت δ-همریختی[۱]، تابعک δ-ضربی[۲]، جبرهای باناخ دوگان.

*. عهده‌دار مکاتبات: Emai:hayati@malayeru.ac.ir

1. δ-Homomorphism Map
2. δ-Multiplicative Functional

۱- مقدمه

بحث پیوستگی همریختی‌ها روی جبرهای باناخ در طول سال‌های گذشته، موضوعی جذاب برای برخی از ریاضیدانها بوده است. تلاش‌های زیادی در این خصوص انجام شده و نتایج بسیاری را می‌توان به‌عنوان حاصل این تلاش‌ها برشمرد. در حقیقت علاقه به این موضوع با طرح این سوال شروع شد که آیا نرم کامل[1] روی یک جبر باناخ یکتاست؟

سال ۱۹۶۷، جانسون[2] در مقاله‌ی خود [5]، نشان داد برای جبر باناخ $\mathfrak{A}$ و جبر باناخ نیم ساده[3] $\mathfrak{B}$، اگر $\varphi: \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ یک نگاشت همریختی پوشا باشد، آنگاه φ نگاشتی است که به‌طور خودکار پیوسته[4] است. اولین و زیباترین نتیجه‌ی این قضیه این بود که هر جبر باناخ نیم ساده دارای یک نرم کامل یکتاست. برای دیدن این موضوع، کافیست نگاشت همانی را روی یک جبر باناخ نیم ساده در نظر بگیریم؛ بنا به قضیه ی جانسون، نگاشت همانی پیوسته خواهد شد و این معادل بودن دو نرم کامل را روی جبر باناخ نیم ساده اثبات خواهد کرد. قضیه‌ی جانسون، سال۱۹۷۸، توسط دیلز[5] در حالتی که $\mathfrak{B}$ یک جبر باناخ نیم ساده و تعویض پذیر است و φ لزوماً پوشا نیست اثبات شد؛ برای دیدن اثباتی از این قضیه خواننده می‌تواند به [3, Proposition 4.2] مراجعه کند.

بدیهی است که با کاهش فرض‌ها روی نگاشت و یا جبرهایی که نگاشت بین آنها تعریف می‌شود، به نتایج بهتری دست پیدا خواهیم کرد. نگاشت‌ها و تابعک‌های δ-ضربی گزینه مناسبی برای جایگزینی نگاشت‌ها و تابعک‌های ضربی می‌باشند. بحث پیوستگی تابعک‌های δ-ضربی و نگاشت‌های δ-ضربی با کارهای یاروش[6] شروع شد. این نگاشت‌ها در مقایسه با نگاشت‌های ضربی ضعیف‌ترند؛ به‌عبارت دیگر هر نگاشت ضربی یک نگاشت ۰-ضربی است.

یا روش در [9, Proposition 5.5]، نشان داد که برای جبر باناخ $\mathfrak{A}$ اگر $\varphi: \mathfrak{A} \longrightarrow C(X)$، که در آن X یک فضای به طور موضعی فشرده و هاسدورف است، یک تابعک δ-ضربی باشد آنگاه $\|\varphi\| \leq 1 + \delta$. این قضیه و اثبات آن جانسون را بر آن داشت تا فرض‌های قضیه اول خود را کاهش دهد، در حقیقت او توانست نشان دهد برای جبر باناخ $\mathfrak{A}$ و جبر باناخ نیم ساده $\mathfrak{B}$، اگر $\varphi: \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ یک نگاشت δ-همریختی پوشا باشد، آنگاه φ نگاشتی است که به‌طور خودکار پیوسته است. او همچنین توانست نشان دهد، در حالتی که $\mathfrak{B}$ یک جبر باناخ نیم ساده و تعویض پذیر است و $\varphi: \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ یک نگاشت δ-همریختی، آنگاه φ پیوسته است [6].

از نتایجی دیگری که می‌توان در مورد نگاشت‌های δ-همریختی بیان کرد این گزاره از جانسون است: اگر $\mathfrak{A}$ یک جبر باناخ $\mathfrak{B}$ و یک جبر باناخ یکدار، به‌طور قوی نیم ساده و $\varphi: \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ یک نگاشت δ-همریختی با برد چگال باشد آنگاه φ پیوسته است [6]. در این مقاله، او هچنین نشان می‌دهد، اگر $\mathfrak{A}$ یک جبر باناخ باشد که هر نگاشت همریختی از آن به هر جبر نرمداری پیوسته باشد آنگاه نگاشت δ-همریختی $\varphi: \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ که در آن $\mathfrak{B}$ یک جبر نرمدار است، پیوسته خواهد بود.

مطالعات زیادی نیز در خصوص پیوستگی نگاشت‌های δ- همریختی روی c^*- جبرها انجام شده است که از آن جمله می‌توان به کارهای جانسون اشاره کرد؛ به طور مثال او نشان داد که برای دو c^*- جبر $\mathfrak{A}$ و $\mathfrak{B}$، اگر $\varphi: \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ یک نگاشت δ-همریختی باشد که برای آن نگاشت $\psi: \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ با ضابطه‌ی $\psi(a) = \varphi(a^*)^* - \varphi(a)$ پیوسته باشد، آنگاه φ پیوسته است [6].

برای اطلاع بیشتر در این موضوع، خواننده می‌تواند به کتاب تحسین برانگیز جبرهای باناخ و پیوستگی خودکار اثر دیلز، مراجعه نماید [4].

۲- تعاریف و مفاهیم لازم

در این بخش، نکاتی را در مورد جبرهای باناخ بیان و قضیه‌ای در رابطه با معکوس‌پذیری عناصر یک جبر باناخ که در اثبات یکی از نتایج مهم بخش ۳ به ما کمک

1. Complete Norm
2. Johnson
3. Semi Simple
4. Automatic Continuity
5. Dales
6. Jarosz

می‌کند را بیان می‌کنیم. همچنین در این بخش، مفهوم شعاع طیفی[1] یک عنصر، رادیکال یک جبر باناخ و جبرهای باناخ نیم ساده را تعریف می‌کنیم. در پایان این بخش، جبرهای باناخ دوگان[2] را تعریف و مثال‌هایی از آن ارائه می‌دهیم.

۲-۱ تعریف. فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک جبر باناخ و a عضو دلخواهی از آن باشد. شعاع طیفی a را با $r(a)$ نشان داده و تعریف می‌کنیم

$$r(a) = \inf\{ \|a^n\|^{\frac{1}{n}} : n \in \mathbb{N} \}.$$

می‌توان دید که

$$r(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

۲-۲ قضیه. فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک جبر باناخ یکدار باشد. اگر $a \in \mathfrak{A}$ و $r(a) < 1$، آنگاه $1 - a$ معکوس‌پذیر است و

$$(1-a)^{-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a^n$$

برهان. مرجع [1].

۲-۳ تعریف. تابعک خطی غیر صفر ψ روی جبر باناخ $\mathfrak{A}$ را یک تابعک ضربی[3] گوییم هرگاه برای هر $a_1, a_2 \in \mathfrak{A}$ داشته باشیم

$$\psi(a_1 a_2) = \psi(a_1)\psi(a_2).$$

فضای تمام تابعک‌های ضربی جبر باناخ $\mathfrak{A}$ را با مجموعه $\Omega(\mathfrak{A})$ نشان می‌دهیم. با توجه به اینکه هر نگاشت ضربی پیوسته است می‌توان دید که $\Omega(\mathfrak{A}) \subseteq \mathfrak{A}^*$، که در آن $\mathfrak{A}^*$ فضای دوگان $\mathfrak{A}$ می‌باشد. توپولوژی ضعیف روی $\mathfrak{A}$ را با w^*- توپولوژی نشان می‌دهیم؛ می‌توان دید که فضای نگاشت‌های ضربی در فضای دوگان، نسبت به w^*-توپولوژی، یک مجموعه به‌طور موضعی فشرده است و جاییکه جبر باناخ $\mathfrak{A}$ یکدار است، $\Omega(\mathfrak{A})$ نسبت به w^*-توپولوژی، یک مجموعه فشرده می‌باشد [1].

۲-۴ تعریف. جبر باناخ $\mathfrak{A}$ را نیم ساده گوییم هرگاه

$$r(\mathfrak{A}) = \cap\{\ker\psi : \ \psi \in \Omega(\mathfrak{A})\} = \{0\}.$$

۲-۵ تعریف. فرض کنید $\mathfrak{A}$ و $\mathfrak{B}$ دو جبر باناخ باشند. فرض کنید δ، عدد حقیقی مثبتی باشد؛ نگاشت خطی $\varphi: \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ را یک نگاشت δ-همریختی گوییم هرگاه بازای هر $a_1, a_2 \in \mathfrak{A}$ داشته باشیم

$$\|\varphi(a_1 a_2) - \varphi(a_1)\varphi(a_2)\| \le \delta\|a_1\|\|a_2\|.$$

همچنین تابعک خطی $\varphi: \mathfrak{A} \longrightarrow \mathbb{C}$ را یک تابعک δ-ضربی گوییم هرگاه بازای هر $a_1, a_2 \in \mathfrak{A}$ داشته باشیم

$$|\varphi(a_1 a_2) - \varphi(a_1)\varphi(a_2)| \le \delta\|a_1\|\|a_2\|.$$

در مورد چنین نگاشت‌هایی قضیه‌ی قدرتمندی وجود دارد که منسوب به یاروش است.

۲-۶ قضیه (یاروش). فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک جبر باناخ و $\varphi: \mathfrak{A} \longrightarrow \mathbb{C}$ یک تابعک δ-ضربی باشد. در این صورت φ کراندار است و

$$\|\varphi\| \le 1 + \delta.$$

برهان. مرجع [9].

۲-۷ تعریف. جبر باناخ $\mathfrak{B}$ را یک جبر باناخ دوگان می‌نامیم هرگاه زیر مدول بسته‌ای از $\mathfrak{B}^*$ مانند $\mathfrak{B}_*$ موجود باشد بطوریکه $\mathfrak{B}_*{}^* = \mathfrak{B}$. به‌عبارت دیگر یک جبر باناخ، یک فضای دوگان است هرگاه ضرب در آن نسبت به w^*-توپولوژی، پیوسته باشد. یک جبر باناخ دوگان معمولاً با نماد $(\mathfrak{B}, \mathfrak{B}_*)$ نشان داده می‌شود. جبرهای باناخ فون نویمان[4]، جبرهای باناخ منظم آرنز[5] مثال‌هایی از این جبرها می‌باشند. همچنین اگر E یک فضای انعکاسی باشد آنگاه $\mathfrak{L}(E) = (E \widehat{\otimes} E^*)^*$،

---

1. Spectral Radius
2. Dual Banach Algebras
3. Multiplicative Functional
4. von Neumann
5. Arens Regular

فضای عملگرهای کراندار روی E، یک جبر باناخ دوگان است. برای گروه بطور موضعی فشرده G، جبر اندازه $M(G)$، با پیش دوگان $C_0(G)$ نیز یک جبر باناخ دوگان می‌باشد.

از جبرهای باناخ دوگان دیگر می‌توان به جبر فوریه–اشتلیتس[1] $B(G) = C^*(G)^*$ و دوگان دوم یک جبر باناخ $\mathfrak{B}$ یعنی $\mathfrak{B}^{**}$ البته وقتی $\mathfrak{B}$ منظم آرنز است، اشاره کرد [10]. برای جبر باناخ $\mathfrak{B}$، جبر ضربگرها[2] روی آن یعنی $M(\mathfrak{B})$ تحت شرایطی یک جبر باناخ دوگان است؛ برای دیدن این شرایط می‌توان به [2] یا [7] و [8] مراجعه کرد.

۳- نتایج اصلی

در این بخش، نتایج اصلی این مقاله را بیان می‌کنیم. ما نگاشت‌های δ–همریختی‌ای را در نظر می‌گیریم که از یک جبر باناخ به یک جبر باناخ دوگان تعریف می‌شوند. نشان خواهیم داد که تحت شرایطی چنین نگاشت‌های کراندارند. این تلاشی است برای جایگزین کردن یک جبر جدید به جای جبر توابع پیوسته در قضیه یاروش.

ضمن بدست آوردن نتایجی از قضیه اصلی، در حالتی که جبر باناخ $\mathfrak{A}$ و جبر باناخ دوگان $(\mathfrak{B},\mathfrak{B}_*)$ یکدار هستند و در شرط مورد نظر صدق می‌کنند، تقریبی برای $\varphi(1)$ و کرانی برای $\|\varphi\|$ را بدست خواهیم آورد.

فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک جبر باناخ و $(\mathfrak{B},\mathfrak{B}_*)$ یک جبر باناخ دوگان باشد. همچنین فرض کنید $\varphi:\mathfrak{A}\longrightarrow\mathfrak{B}$ یک نگاشت δ–همریختی باشد. زیر جبر تولید شده توسط $\varphi(\mathfrak{A})$ در $\mathfrak{B}$ را با $\mathfrak{B}_\varphi$ نشان می‌دهیم؛ می‌دانیم هر عضو b_* از $\mathfrak{B}_*$ یک تابعک خطی روی $\mathfrak{B}$ است. گوییم $\mathfrak{B}_*$ روی $\mathfrak{B}_\varphi$ ضربی است هرگاه بازای هر $b_*\in\mathfrak{B}_*$ و هر $b_1,b_2\in\mathfrak{B}_\varphi$ داشته باشیم

$$\langle b_*, b_1b_2\rangle = \langle b_*, b_1\rangle\langle b_*, b_2\rangle$$

۳–۱ لم. فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک جبر باناخ و $(\mathfrak{B},\mathfrak{B}_*)$ یک جبر باناخ دوگان باشد. اگر $\varphi:\mathfrak{A}\longrightarrow\mathfrak{B}$ یک نگاشت δ–همریختی باشد بطوریکه $\mathfrak{B}_*$ روی $\mathfrak{B}_\varphi$ ضربی باشد آنگاه احکام زیر برقرارند:

الف) بازای هر $b_*\in\mathfrak{B}_*$، تابعک خطی $\varphi_{b_*}:\mathfrak{A}\longrightarrow\mathbb{C}$ با ضابطه‌ی $\varphi_{b_*}(a)=\langle\varphi(a),b_*\rangle$ یک تابعک $\delta\|b_*\|$–ضربی است.

ب) اگر $\mathfrak{B}_*$ روی $\mathfrak{B}$ بطور نقطه ای کراندار باشد آنگاه بازای هر $b_*\in\mathfrak{B}_*$، φ_{b_*} یک تابعک δM–ضربی است که در آن

$$M=\sup\{\|b_*\|:\ b_*\in\mathfrak{B}_*\}.$$

برهان. الف). فرض کنید $b_*\in\mathfrak{B}_*$، در اینصورت بازای هر $a_1,a_2\in\mathfrak{A}$ داریم

$$\begin{aligned}&\left|\varphi_{b_*}(a_1a_2)-\varphi_{b_*}(a_1)\varphi_{b_*}(a_2)\right| =\\ &|\langle\varphi(a_1a_2),b_*\rangle-\langle\varphi(a_1),b_*\rangle\langle\varphi(a_2),b_*\rangle|\\ &\le\|\varphi(a_1a_2)-\varphi(a_1)\varphi(a_2)\|\|b_*\|\\ &\le\delta\|b_*\|\|a_1\|\|a_2\|.\end{aligned}$$

ب) با توجه به قضیه‌ی کرانداری یکنواخت **(PUB)**[3]، $\mathfrak{B}_*$ بطور یکنواخت کرانداراست؛ بنابراین

$$M=\sup\{\|b_*\|:\ b_*\in\mathfrak{B}_*\ \}$$

وجود دارد. اکنون $b_*\in\mathfrak{B}_*$ را انتخاب می‌کنیم، با توجه به قسمت الف، برای هر $a_1,a_2\in\mathfrak{A}$ داریم

$$\begin{aligned}&\left|\varphi_{b_*}(a_1a_2)-\varphi_{b_*}(a_1)\varphi_{b_*}(a_2)\right|\\ &\le\delta\|b_*\|\|a_1\|\|a_2\|\\ &\le\ \delta M\|a_1\|\|a_2\|.\end{aligned}$$

۳–۲ لم. فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک جبر باناخ و $(\mathfrak{B},\mathfrak{B}_*)$ یک جبر باناخ دوگان باشد. اگر $\varphi:\mathfrak{A}\longrightarrow\mathfrak{B}$ یک نگاشت δ–همریختی باشد بطوریکه $\mathfrak{B}_*$ روی $\mathfrak{B}_\varphi$ ضربی باشد آنگاه بازای هر $b_*\in\mathfrak{B}_*$

$$\|\varphi_{b_*}\|\le 1+\delta\|b_*\|.$$

برهان. با توجه به لم فوق و قضیه یاروش، نامساوی به راحتی بدست می‌آید.

1. Fourier-Stieltjes
2. Multiplier Algebra
3. Principle of Uniform Boundedness

۳-۳ قضیه. فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک جبر باناخ و $(\mathfrak{B},\mathfrak{B}_*)$ یک جبر باناخ دوگان باشد. اگر $\varphi:\mathfrak{A}\longrightarrow\mathfrak{B}$ یک نگاشت δ- همریختی باشد بطوریکه $\mathfrak{B}_*$ روی $\mathfrak{B}_\varphi$ ضربی باشد آنگاه φ پیوسته است و

$$\|\varphi\|\le 1+\delta.$$

برهان. برای هر $a\in\mathfrak{A}$ داریم

$$\begin{aligned}
&\|\varphi(a)\|\\
&=\sup\{|\langle\varphi(a),b_*\rangle|:\ \|b_*\|\le 1\}\\
&=\sup\{|\varphi_{b_*}(a)|:\ \|b_*\|\le 1\}\\
&\le\sup\{\|\varphi_{b_*}\|\|a\|:\ \|b_*\|\le 1\}\\
&\le\sup\{1+\delta\|b_*\|:\ \|b_*\|\le 1\}\|a\|\\
&\le(1+\delta)\|a\|.
\end{aligned}$$

بنابراین

$$\|\varphi\|\le 1+\delta\,.$$

۳-۴ قضیه. فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک جبر باناخ و $(\mathfrak{B},\mathfrak{B}_*)$ یک جبر باناخ دوگان باشد. همچنین فرض کنید $\varphi:\mathfrak{A}\longrightarrow\mathfrak{B}$ یک نگاشت δ-همریختی باشد بطوریکه $\mathfrak{B}_*$ روی $\mathfrak{B}_\varphi$ ضربی باشد، آنگاه احکام زیر برقرارند:

الف) اگر $\psi:\mathfrak{A}\longrightarrow\mathfrak{B}$ یک نگاشت خطی کراندار باشد آنگاه $\varphi+\psi$ یک نگاشت $[\delta+\|\psi\|(3+2\delta)+\|\psi\|^2]$-همریختی است.

ب) اگر $\lambda\in\mathbb{C}$ آنگاه $(1+\lambda)\varphi$ یک نگاشت $[(1+|\lambda|)(\delta+|\lambda|(1+\delta)^2)]$-همریختی است.

برهان.

$$\begin{aligned}
&\|(\varphi+\psi)(a_1a_2)-(\varphi+\psi)(a_1)(\varphi+\psi)(a_2)\|\\
&=\|\varphi(a_1a_2)+\psi(a_1a_2)-\varphi(a_1)\varphi(a_2)-\varphi(a_1)\psi(a_2)-\psi(a_1)\varphi(a_2)-\psi(a_1)\psi(a_2)\|\\
&\le\|\varphi(a_1a_2)-\varphi(a_1)\varphi(a_2)\|+\|\psi\|\|a_1\|\|a_2\|+2\|\varphi\|\|\psi\|\|a_1\|\|a_2\|+\|\psi\|^2\|a_1\|\|a_2\|\le\\
&[\delta+\|\psi\|(3+2\delta)+\|\psi\|^2]\|a_1\|\|a_2\|.
\end{aligned}$$

ب) دوباره برای $a_1,a_2\in\mathfrak{A}$ داریم

$$\begin{aligned}
&\|(1+\lambda)\varphi(a_1a_2)-(1+\lambda)\varphi(a_1)(1+\lambda)\varphi(a_2)\|\\
&=\|\varphi(a_1a_2)+\lambda\varphi(a_1a_2)-(\varphi(a_1)+\lambda\varphi(a_1))(\varphi(a_2)+\lambda\varphi(a_2))\|\\
&\le\|\varphi(a_1a_2)-\varphi(a_1)\varphi(a_2)\|+|\lambda|\|\varphi(a_1a_2)-\varphi(a_1)\varphi(a_2)\|+|\lambda|^2\|\varphi\|^2\|a_1\|\|a_2\|\\
&+|\lambda|\|\varphi\|^2\|a_1\|\|a_2\|\\
&\le\delta(1+|\lambda|)\|a_1\|\|a_2\|\\
&+|\lambda|(1+|\lambda|)(1+\delta)^2\|a_1\|\|a_2\|=\\
&[(1+|\lambda|)(\delta+|\lambda|(1+\delta)^2)]\|a_1\|\|a_2\|.
\end{aligned}$$

بنابراین حکم ثابت می‌گردد.

۳-۵ قضیه. فرض کنید $\mathfrak{A}$ یک جبر باناخ یکدار و $(\mathfrak{B},\mathfrak{B}_*)$ یک جبر باناخ دوگان یکدار باشد. همچنین فرض کنید $\varphi:\mathfrak{A}\longrightarrow\mathfrak{B}$ یک نگاشت δ-همریختی باشد بطوریکه $\mathfrak{B}_*$ روی $\mathfrak{B}_\varphi$ ضربی باشد. آنگاه احکام زیر برقرارند:

الف) اگر $\delta<\frac{1}{4}$ آنگاه یا $\|1-\varphi(1)\|<2\delta$ که در این حالت $\|\varphi\|\le 1-2\delta$ و یا $\|\varphi\|<2\delta$.

ب) فرض کنید $\mathfrak{A}$ دارای همانی تقریبی کرانداری[1] مانند $(e_\alpha)_\alpha$ با کران K باشد. اگر $0<\delta<(4K^2)^{-1}$ آنگاه یا $\lim_\alpha\sup\|1-\varphi(e_\alpha)\|<2\delta K^2$ که در این حالت $K^{-1}-2\delta K<\|\varphi\|$ و یا $\lim_\alpha\sup\|\varphi(e_\alpha)\|<2\delta K^2$ که در این حالت داریم $\|\varphi\|<2\delta K$.

برهان. کافیست فقط قسمت ب) را ثابت کنیم. با توجه به قضیه ۳-۳، $(\varphi(e_\alpha))_\alpha$ یک تور کراندار با کران $(1+\delta)K$ در $\mathfrak{B}$ است. فرض کنید B مجموعه نقاط w^*-انباشتگی تور مذکور در $\mathfrak{B}$ باشد؛ بنا به قضیه‌ی آلااقلو[2]، B تهی نیست. عناصر b,b' را از B انتخاب

1. Bounded Approximate Identity
2. Alaoglu

می‌کنیم؛ فرض کنید $(e_\gamma)_\gamma$ و $(e_\beta)_\beta$ دو زیر تور از $(e_\alpha)_\alpha$ باشند که

$$w^*-\lim_\beta \varphi(e_\beta)=b$$
$$w^*-\lim_\gamma \varphi(e_\gamma)=b'$$

از آنجاییکه $\lim_\gamma e_\beta e_\gamma = e_\beta$، برای $b_*\in\mathfrak{B}_*$ داریم.

$$\begin{aligned}&\lim_\beta\lim_\gamma\langle\varphi(e_\beta e_\gamma),b_*\rangle\\ &= \lim_\beta\lim_\gamma\langle e_\beta e_\gamma,\varphi^*(b_*)\rangle\\ &= \lim_\beta\langle \lim_\gamma e_\beta e_\gamma, \varphi^*(b_*)\ \rangle\\ &= \lim_\beta\langle e_\beta,\varphi^*(b_*)\ \rangle\\ &= \lim_\beta\langle\varphi(e_\beta),b_*\rangle\\ &= \langle b,b_*\rangle.\end{aligned}$$

یاد آوری می‌کنیم ضرب در $\mathfrak{B}$ بطور مجزا w^*–پیوسته می‌باشد. لذا با توجه به روابط فوق

$$w^*-\lim_\beta w^*-\lim_\gamma\left(\varphi(e_\beta e_\gamma)-\varphi(e_\beta)\varphi(e_\gamma)\right) = b(1-b').$$

از طرف دیگر φ یک نگاشت δ –همریختی است، بنابراین

$$\left\|\varphi(e_\beta e_\gamma)-\varphi(e_\beta)\varphi(e_\gamma)\right\|<\delta K^2$$

برای هر $b_*\in\mathfrak{B}_*$، داریم

$$\begin{aligned}&|\langle b(1-b'),b_*\rangle| =\\ &\lim_\beta\lim_\gamma\left|\langle\varphi(e_\beta e_\gamma)-\varphi(e_\beta)\varphi(e_\gamma),b_*\rangle\right|\\ &\le \lim_\beta\lim_\gamma\left\|\varphi(e_\beta e_\gamma)-\varphi(e_\beta)\varphi(e_\gamma)\right\|\|b_*\|\\ &\le \delta K^2\|b_*\|.\end{aligned}$$

بنابراین

$$\|b(1-b')\|\le\delta K^2<\frac{1}{4}$$

با انتخاب $b=b'$، ملاحظه می‌کنیم که یا

$$\|1-b\|<2\delta K^2$$

و یا

$$\|b\|<\frac{1}{2}\left(1-(1-4\delta K^2)^{1/2}\right)<2\delta K^2.$$

اگر $\|1-b'\|<2\delta K^2$ و $\|b\|<2\delta K^2$ آنگاه $\|b(1-b')\|<\frac{1}{4}$ که یک تناقض است. بنابراین یا برای هر $b\in B$، داریم $\|1-b\|<2\delta K^2$ و یا برای هر $b\in B$ داریم $\|b\|<2\delta K^2$. در حالت اول داریم

$$\lim_\alpha\sup\|1-\varphi(e_\alpha)\|<2\delta K^2$$

بنابراین

$$1-2\delta K^2<\lim_\alpha\sup\|\varphi(e_\alpha)\| <K\|\varphi\|.$$

و در حالت دوم داریم $\lim_\alpha\sup\|\varphi(e_\alpha)\|<2\delta K^2$. در این حالت، اگر $b\in B$، با گرفتن حد روی یک زیر تور مناسب از نامساوی

$$\|\varphi(ae_\alpha)-\varphi(a)\varphi(e_\alpha)\|\le\delta\|a\|K$$

برای هر $a\in\mathfrak{A}$، خواهیم داشت

$$\left\|\varphi(a)(1-b)\right\|\le\delta\|a\|K.$$

اکنون ملاحظه می‌کنیم

$$r(b)\le\|b\|<2\delta K^2<\frac{1}{2}$$

بنابراین $r(b)<1$ و در نتیجه با توجه به قضیه ۲–۲، $1-b$ وارون‌پذیر است و

$$(1-b)^{-1}=1+\sum_{n=1}^\infty b^n$$

و لذا

$$\begin{aligned}&\|(1-b)^{-1}\|\le 1+\sum_{n=1}^\infty\|b\|^n.\\ &<1+\sum_{n=1}^\infty\left(\frac{1}{2}\right)^n=2\end{aligned}$$

اکنون داریم

$$\begin{aligned}&\|\varphi(a)\|\\ &=\|\varphi(a)(1-b)(1-b)^{-1}\|\\ &\le\|\varphi(a)(1-b)\|\|(1-b)^{-1}\|\\ &\le 2\delta K\|a\|.\end{aligned}$$

این نامساوی بازای هر $a\in\mathfrak{A}$ درست است، بنابراین

$$\|\varphi\|\le 2\delta K.$$

فهرست منابع

[1] F. F. Bonsal and J. Duncan, Complete normed algebras, Springer Verlag (1973).

[2] M. Daws, Multipliers, Self-induced and dual Banach algebras, Dissertations Mathematicae 470 (2010), 62 pp.

[3] H. G. Dales, Automatic continuity: a survey, Bulletin of The London Mathematical Society 10 (1987), 129-183.

[4] H. G. Dales, Banach algebras and automatic continuity. Oxford University press (2001).

[5] B. E. Johnson, The uniqueness of the (complete) norm topology, Bulletin of The American Mathematical Society 73 (1967), 537-539.

[6] B. E. Johnson, Continuity of generalized homomorphisms, Bulletin of The London Mathematical Society 19 (1987), 67-71.

[7] B. Hayati and M. Amini, Connes-amenability of multiplier Banach algebras, Kyoto Journal of Mathematics 50 (2010), 41-50.

[8] B. Hayati and M. Amini, Dual multiplier Banach algebras and Connes-amenability, Publications Mathematicae Debrecen 86 (2015), 169-182.

[9] K. Jarosz, Perturbations of Banach algebras, Lectures Notes in Mathematics, 1120 Springer, Berlin (1985).

[10] V. Runde, Lectures on amenability, Lecture Notes in Mathematics, 1774 Springer, Berlin (2002).