دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال پنجم، شماره بیست و یکم، آذر و دی ۱۳۹۸
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
پژوهش‌های نوین در ریاضی

معادلات اویلر-لاگرانژ و مکانیک هندسی بر گروه‌های لی با پتانسیل

علی سوری *

استادیار، گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه بوعلی‌سینا، همدان، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۶/۰۹/۰۳ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۷/۰۶/۱۰

چکیده

فرض کنید G یک گروه لی، احتمالاً با بعد نامتناهی، مدل شده بر فضای باناخ E باشد. در این مقاله ابتدا معادلات اویلر–لاگرانژ بر گروه لی G با متر پایای راست در حضور پتانسیل را معرفی می‌کنیم. معادلات اویلر–لاگرانژ تعمیم طبیعی معادلات ژئودزیک بر منیفلدها و گروه‌های لی است. در بخش دوم، هندسه سیستم مکانیکی حرکت یک جسم صلب با یک نقطه ثابت در میدان گرانش را مطالعه می‌کنیم. این سیستم مکانیکی را معمولاً با نام فرفره متقارن می‌شناسند. سپس نشان می‌دهیم که معادلات استخراج شده توسط این نظریه با معادلات شناخته شده فرفره منطبق هستند. در پایان، به‌عنوان یک مثال از حالت بعد نامتناهی، به مطالعه معادلات کاماسا–هلم بر گروه بات–ویراسورو در حضور پتانسیل می‌پردازیم. گروه بات–ویراسورو به صورت حاصل ضرب گروه همه وابرسانی‌های دایره از کلاس سوبولف با خط حقیقی می‌باشد و منظور ما از یک پتانسیل برگروه لی G، یک تابع مشتق پذیر از G به خط حقیقی است.

واژه‌های کلیدی: لاگرانژی، اسپری، معادلات اویلر–لاگرانژ، جسم صلب، معادلات کاماسا–هلم.

*. عهده‌دار مکاتبات:
Emai: a.suri@basu.ac.ir & ali.suri@gmail.com

۱- مقدمه

مطالعه جواب معادلات اویلر-لاگرانژ به عنوان ژئودزیک بر گروه‌های لی بامترهای پایای راست نخستین بار توسط آرنولد [۲، ۳] مطرح شد. ابین و مارسدن در [۵] این مسئله را برای حالت سیال تراکم ناپذیر ایده‌ال بررسی کردند و به مطالعه شرایط وجود جواب پرداختند. پس از آن معادلات

متعددی به‌عنوان ژئودزیک بر گروه‌های لی متناظر بررسی شدند [۱، ۱۰، ۱۳، ۱۲].

در این مقاله به بررسی سیستم‌های مکانیکی و معادلاتی که دارای تابع پتانسیل هستند می‌پردازیم. پس از معرفی متریک و گروه مناسب متناظر با این سیستم‌ها، به استخراج معادلات حرکت به عنوان شارژ ژئودزیک می‌پردازیم. در این روش علاوه بر اثبات وجود جواب، به تغییرات پیوسته نسبت به شرایط مرزی نیز توجه می‌شود.

معرفی اسپری (میدان برداری مرتبه دوم) متناظر با یک سیستم مکانیکی ابتدا توسط ابین و مارسدن در [۵] مطرح شد. این اسپری در بحث آنالیز غیر خطی و معادلات با مشتقات جزئی داری اهمیت ویژه‌ای است [۶]. در حقیقت اگر این اسپری معرفی شود آنگاه کلیه حالات ممکن و دینامیک سیستم به‌عنوان جواب‌های یک معادله دیفرانسیل معمولی مشخص می‌شوند. به علاوه با معرفی این معادلات دیفرانسیل معمولی بررسی نظریه اغتشاش، انشعاب و پایداری و ارتباط آنها با خمیدگی ممکن می‌شود [۶، ۱۱]. در این راستا ما برای نخستین بار به معرفی اسپری گروه‌های لی با تابع پتانسیل می‌پردازیم. گروه‌های لی مورد بحث در این قسمت ممکن است دارای بعد متناهی و یا نامتناهی باشند. پس از معرفی این مفهوم اساسی در بخش نخست، به بررسی دو مساله در حالت های بعد متناهی و نامتناهی می‌پردازیم.

اولین مثال در بخش دو مطرح می‌شود که به بررسی حرکت یک جسم صلب در $\Re^3$ با یک نقطه ثابت و تحت تاثیر گرانش می‌پردازد. حرکت این جسم صلب، فرفره، یکی از معروف‌ترین سیستم‌های مکانیکی در مکانیک کلاسیک است. این سیستم شامل یک جسم صلب با یک نقطه ثابت است که تحت تاثیر گرانش حرکت می‌کند. در مورد پایداری و مطالعه توپولوژیکی این سیستم مطالعات بسیاری انجام شده است [۷، ۸]. همان‌طور که خواهیم دید، دینامیک این سیستم به عنوان معادلات حرکت یک لاگرانژی بر یک گروه لی با بعد متناهی قابل طرح است. در ادامه نشان می‌دهیم که معادلات استخراج شده توسط نظریه ما، بر معادلات شناخته شده حرکت فرفره منطبق می‌شوند.

در بخش سوم با ارائه یک مثال از حالت بعد نامتناهی، به مطالعه معادلات حرکت بر گروه بات-ویراسورو در حضور پتانسیل می‌پردازیم. با انتخاب اگرانژی و متر پایای راست مناسب بر گروه نامتناهی بعد $D^s(S^1)\times\Re$ نشان می‌دهیم معادلات اویلر لاگرانژ با تابع پتانسیل دارای جواب می‌باشند و در حالتی که پتانسیل صفر باشد نتایج مقاله [۱۰] حاصل می‌شود.

۲- معادلات اویلر لاگرانژ بر گروه‌های لی با متر پایا و پتانسیل

فرض کنید M یک منیفلد مدل شده بر فضای باناخ (احتمالاً با بعد نامتناهی E) باشد. به علاوه فرض کنید $\langle , \rangle$ یک متر ریمانی (یا شبه‌ریمانی) بر M و $V:M\to\Re$ یک تابع دیفرانسیل‌پذیر (تابع پتانسیل) باشد. لاگرانژی

$$L:TM\to\Re$$
$$v\in T_gM\mapsto\frac{1}{2}\langle v,v\rangle_g+V(g)$$

را در نظر بگیرید. به‌طور موضعی برای هر $(g,v)\in TM$ نگاشت

$$\partial_2^2L(g,v):\mathsf{L}_{sym}(\mathsf{E}\times\mathsf{E})\to\Re$$

را در نظر بگیرید که در اینجا ∂_2 یعنی مشتق نسبت به مولفه دوم و $\mathsf{L}_{sym}(\mathsf{E}\times\mathsf{E})$ نشان‌دهنده فضای همه توابع پیوسته و دو خطی و متقارن از $\mathsf{E}\times\mathsf{E}$ به E است (برای جزییات بیشتر به [۴] مراجعه شود). در حالت بعد متناهی اگر $(x_i,y_j)_{1\le i,j\le dimM}$ یک نقشه برای TM باشد آنگاه ماتریس $(\frac{\partial^2 L}{\partial y_j\partial y_k})_{1\le j,k\le dimM}$ معرف ∂_2^2L می‌باشد.

اگر به ازای هر $(g,v)\in TM$ نگاشت ∂_2^2L (یا به‌طور معادل در حالت بعد متناهی ماتریس متناظر)

ناتبهگون باشد، آنگاه لاگرانژی L را منظم می‌نامند. در این مقاله تمام لاگرانژی‌های مطرح شده منظم هستند. مفاهیم و قضیه بعد را از [۱] و [۴] بیان می‌کنیم.

تعریف ۲،۱. نگاشت $S:TM\to TTM$ را یک اسپری می نامیم هر گاه به‌طور موضعی نگاشت $X:\mathsf{E}\times\mathsf{E}\to\mathsf{E}$ وجود داشته باشد به‌طوری که برای هر $(g,v)\in TM$ داشته باشیم.

$$S(g,v)=(g,v,v,X(g,v))$$

تعریف ۲،۲. خم $\gamma:(-\varepsilon,\varepsilon)\subseteq\Re\to M$ را یک ژئودزیک برای اسپری S می‌نامیم هرگاه در معادله دیفرانسیل مرتبه دوم $\gamma''(t)=S(\gamma'(t))$ صدق کند.

قضیه ۲،۳. فرض کنید L یک لاگرانژی منظم بر منیفلد ریمانی $(M,\langle,\rangle)$ باشد. در این صورت میدان برداری مرتبه دوم $S:TM\to TTM$ وجود دارد به طوری که برای هر $(g,v)\in TM$ موضعاً $S(g,v)=(g,v,v,X_L(g,v))$ است و درآن

$$X_L(g,v)=(D_2D_2L(g,v))^{-1}\alpha$$

و

$$\alpha=D_1L(g,v)-D_1D_2L(g,v).v$$

می‌باشند. به علاوه ژئودزیک‌های S جواب‌های معادله اویلر لاگرانژ هستند.

یادآوری می‌کنیم که خم $c:I\subseteq\Re\to M$ در معادله اویلر لاگرانژ صدق می‌کند هرگاه معادله

$$\frac{d}{dt}D_2L(c(t),\dot c(t))=D_1L(c(t),\dot c(t))$$

برقرار باشد. در ادامه به بررسی معادلات اویلر–لاگرانژ بر گروه‌های لی با مترهای پایای راست می‌پردازیم.

ایزومورفیسم

$$\rho:TG\to G\times\mathsf{g}$$
$$(g,v)\mapsto(g,TR_{g^{-1}}v)$$

را در نظر بگیرید که ضابطه

$$R_g:G\to G$$

توسط $R_g(h)=hg$ مشخص می‌شود. اگر انتقال راست‌ها ایزومتری باشند، آنگاه متر را پایای راست می‌نامند. هرچند که در مورد سیستم‌های لاگرانژی با پتانسیل معادلات اویلر لاگرانژ کاملاً شناخته شده هستند [۱۳]، اما هیچ مرجعی به مطالعه اسپری متناظر با این لاگرانژی‌ها نپرداخته است. در این روش معادلات با مشتقات جزئی را به صورت معادلات دیفرانسیل معمولی (اسپری و ژئودزیک) بیان می‌کنیم. در این حالت اثبات وجود و یکتایی جواب این معادلات و بررسی تغییرات هموار نسبت به شرایط مرزی ممکن است.

فرض کنید

$$U:M\to\Re$$

یک تابع (پتانسیل) مشتق‌پذیر باشد. لانگرانژی

$$L(g,v)=\frac{1}{2}\langle v,v\rangle_g+U(g)$$

را بر G در نظر بگیرید.

قضیه ۲،۴. اسپری لاگرانژی فوق توسط معادله $s(v)=T\rho^{-1}\circ\bar s\circ\rho(v)$ مشخص می‌شود که در آن $\bar s(g,\xi)=(T_eR_g\xi,\xi,\xi,-B(\xi,\xi)+T_gR_{g^{-1}}\mathrm{grad}U_g)$.

اثبات. فرم همتافته ω_L متناظر با لاگرانژی L عبارت‌است از

$$\begin{aligned}&\omega_L(x,y)((z_1,w_1),(z_2,w_2))\\&=\partial_1\partial_2L(x,y)[z_1,z_2]-\partial_1\partial_2L(x,y)[z_2,z_1]\\&+\partial_2\partial_2L(x,y)[z_1,w_2]-\partial_2\partial_2L(x,y)[z_2,w_1]\end{aligned}$$

که در آن $(x,y)\in T_xG$ و $(z_i,w_i)_{i=1,2}\in T_{(x,y)}TG$ می‌باشند. برگردان فرم ω_L توسط نگاشت ρ را با $\omega_s=\rho^*\omega_L$ نمایش می‌دهیم. بنابر گزاره ۴،۴،۲ از [۱] برای هر $\xi,\eta,v,w\in T_gG$ داریم:

$$\begin{aligned}&\omega_s(g,\xi)((v,z),(w,\eta))=-\langle z,T_gR_{g^{-1}}w\rangle_e\\&-\langle\xi,[T_gR_{g^{-1}}v,T_gR_{g^{-1}}w]\rangle_e+\langle\eta,T_gR_{g^{-1}}\rangle_e\end{aligned}\qquad(۱)$$

که در آن TR نشان‌دهنده نگاشت مشتق R می‌باشد و e عضو همانی گروه لی است. مشتق تاری را با FL نمایش می‌دهیم که برای هر $v,w\in T_gG$ توسط ضابطه

$$FL(v)w=\frac{d}{dt}|_{t=0}\ L(v+tw)$$

تعریف می‌شود. قرار می‌دهیم

$$E(v)=FL(v)v-L(v).$$

در این صورت بنابر [۱] میدان برداری مرتبه دوم $\bar{s}$ توسط معادله $i_{\bar{s}}\omega_s=d\rho^*E$ مشخص می‌شود. با توجه به ضابطه لاگرانژی L برای هر $v\in T_gG$ داریم

$$\begin{aligned}FL(v)v&=\frac{d}{dt}|_{t=0}\ L(v+tv)\\&=\frac{d}{dt}|_{t=0}\ (\frac{1}{2}\langle v+tv,v+tv\rangle_g-U(g))\\&=\langle v,v\rangle_g\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}E(v)&=\langle v,v\rangle_g-\frac{1}{2}\langle v,v\rangle_g+U(g)\\&=\frac{1}{2}\langle v,v\rangle_g+U(g).\end{aligned}$$

پس برای $\bar{s}:G\times\mathfrak{g}\to G\times\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$، $w\in T_gG$ و $\xi,\eta\in\mathfrak{g}$ داریم

$$\begin{aligned}&\omega_s(g,\xi)(\xi,\overline{X}(g,\xi)),(w,\eta))\\&=-\langle\overline{X}(g,\xi),T_gR_{g^{-1}}w\rangle_e+\langle\eta,\xi\rangle_e\\&\quad-\langle\xi,[\xi,T_gR_{g^{-1}}w]\rangle_e.\end{aligned}\tag{۲}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}d\rho^*E(g,\xi)(w,\eta)&=\langle\xi,\eta\rangle_e+dU(g)w\\&=\langle\xi,\eta\rangle_e+\langle\mathrm{grad}U(g),w\rangle_e\\&=\langle\xi,\eta\rangle_e+\langle T_eR_{g^{-1}}\mathrm{grad}U(g),T_eR_{g^{-1}}w\rangle_e\end{aligned}$$

و طبق معادله $i_{\bar{s}}\omega_s=d\rho^*E$ داریم:

$$\begin{aligned}&\langle\overline{X}(g,\xi)-T_eR_{g^{-1}}\mathrm{grad}U(g),T_gR_{g^{-1}}w\rangle_e\\&=\langle\xi,[\xi,T_eR_{g^{-1}}]\rangle_e\\&=\langle\xi,ad_\xi T_eR_{g^{-1}}\rangle_e\\&=\langle ad^*_\xi\xi,T_eR_{g^{-1}}\rangle_e.\end{aligned}$$

چون به ازای هر $w\in T_gG$ معادله فوق برقرار است پس

$$\overline{X}(g,\xi)-T_eR_{g^{-1}}\mathrm{grad}U(g)=ad^*_\xi\xi$$

یعنی

$$\begin{aligned}&\bar{s}(g,\xi)\\&=(g,\xi,\xi,ad^*_\xi\xi-T_eR_{g^{-1}}\mathrm{grad}U(g)).\end{aligned}$$

۳- شار ژئودزیک جسم صلب- فرفره

در حالتی که $G=SO(n)$ باشد نگاشت‌های $\rho:TG\to G\times\mathfrak{g}$ و $T\rho$ به سادگی قابل محاسبه هستند. در حقیقت برای هر $v\in T_gG$ داریم

$$\rho(v)=(g,T_gR_{g^{-1}}v)=(g,vg^{-1})$$

همچنین $\rho^{-1}(g,\xi)=\xi g$. اکنون فرض کنید $g\in G$ و $\xi,h,\eta\in\mathfrak{g}$ و $(g(t),\xi(t))$ خم‌هایی باشند که در لحظه $t=0$ از (g,ξ) با سرعت (h,η) عبور می‌کنند. در این صورت

$$\begin{aligned}&T_{(g,\xi)}\rho^{-1}(h,\eta)\\&=\frac{d}{dt}|_{t=0}\ \rho^{-1}(g(t),\xi(t))\\&=(g,\xi g,\xi g,\frac{d}{dt}|_{t=0}\ \xi(t)g(t))\\&=(g,\xi g,\xi g,'(0)\xi(0)+g(0)\xi'(0))\\&=(g,\xi g,\xi g,\xi h+\eta g).\end{aligned}$$

در نتیجه اسپری s به صورت زیر مشخص می‌شود

$$\begin{aligned}&T\rho^{-1}\bar{s}\circ\rho(g,v)=T\rho^{-1}\circ\bar{s}(g,\xi)\\&=T\rho^{-1}(g,\xi,\xi,ad^*_\xi\xi-T_gR_{g^{-1}}\mathrm{grad}_gU)\\&=(g,\xi g,\xi g,\xi\xi+ad^*_\xi\xi g-\mathrm{grad}_gU).\end{aligned}$$

حال فرض کنید $v:(-\varepsilon,\varepsilon)\to\mathfrak{g}$ با شرط

$v(t)\in T_{g(t)}G$ یک خم انتگرال برای s باشد یعنی
$$\frac{d}{dt}v(t)=s(v(t)).$$

با قرار دادن $u(t)=v(t)g(t)^{-1}$ می‌بینیم که
$$\frac{d}{dt}u(t)g(t)=u(t)g'(t)+u'(t)g(t)$$

و با توجه به ضابطه s نتیجه می‌گیریم
$$\begin{aligned}ad^*_{u(t)}u(t)g(t)+\mathrm{grad}_{g(t)}U+u(t)u(t)\\ =u(t)u(t)+u'(t)g(t).\end{aligned}$$

با ساده کردن عبات فوق معادله
$$\frac{d}{dt}u(t)=ad^*_{u(t)}u(t)+\mathrm{grad}_{g(t)}Ug^{-1}(t)$$

$$u(t)=v(t)g^{-1}(t)$$

به دست می‌آید. معادله فوق، معادله اویلر لاگرانژ در حضور تابع پتانسیل U می‌باشد.

۳-۱- معادلات حرکت فرفره در فضای سه بعدی

جسم صلبی را در $\Re^3$ با توزیع جرم $\rho(t,x)$ در لحظه t در نظر بگیرید. فرض کنید این جسم در حال دوران تحت تاثیر نیروی گرانش است و یک نقطه آن، در مبدا مختصات، ثابت است. این سیستم مکانیکی حرکت فرفره روی سطح را بیان می‌کند. در این مدل به دنبال یافتن مقادیر فرین لاگرانژی

$$\begin{aligned}I(\xi)=\frac{1}{2}\int_a^b\int_{\mathrm{R}^3}\rho(\xi(t,x))\,|\,\xi'(t,x)\,|^2\,dxdt\\ -g\int_a^b\int_{\mathrm{R}^3}\rho(\xi(t,x))\gamma_0.xdxdt\end{aligned}\qquad(۱)$$

که در آن $\xi(t,x)$ موقعیت ذره x در لحظه t را نمایش می‌دهد. هم چنین γ_0 یک بردار یکه عمود بر سطح و در خلاف جهت گرانش است و g نیز ثابت گرانش است. (برای جزییات بیشتر به [۱۳] یا [۱] مراجعه کنید.) چون جسم صلب است می‌توان نوشت $\xi(t,x)=W(t)x$ که $W(t)\in SO(3)$ و
$$SO(3)=\{A\in \mathrm{Mat}(3\times 3)\,;\ A^tA=I_{3\times 3},\ \det(A)=1\}.$$

بنابراین داریم
$$\begin{aligned}I(\xi)=\frac{1}{2}\int_a^b\int_{\mathrm{R}^3}\rho(y)\,|\,W'(t)W(t)^{-1}\,|^2\,dydt\\ -g\int_a^b\int_{\mathrm{R}^3}\rho(y)W(t)^{-1}ydydt\qquad(2)\end{aligned}$$

که $y=Wx$. بنابر [۱۳] داریم
$$\begin{aligned}\rho(y)(Ay,By)dy&=\mathrm{Tr}(B^tAI_p)\\ &=\mathrm{Tr}(AI_pB^t)\end{aligned}$$

که در اینجا $I_p=\int\rho(y)y\otimes ydy$ یک ماتریس 3×3 با درایه‌های حقیقی است. هم چنین قرار می‌دهیم $\sigma=\int\rho(y)ydy\in\Re^3$

بنابراین معادله (۲) را می‌توان به صورت زیر نوشت
$$\begin{aligned}I(W)\\ =\frac{1}{2}\int_a^b\mathrm{Tr}(W'(t)W(t)^{-1}I_p(W'(t)W(t)^{-1})^t)dt\\ -g\int_a^b\sigma.W\gamma_0dt.\end{aligned}$$

حال اگر $B(V,W):=\mathrm{Tr}(VI_pW^t)$ و $\mathbf{V}(p)=g\sigma.p\gamma_0$ آنگاه با فرض $L(p,V)=\frac{1}{2}B(Vp^{-1},Vp^{-1})-\mathbf{V}(p)$ و با توجه به گزاره ۲،۴ برای $W:I\subseteq\Re\to SO(3)$ و $Z=W'W^{-1}$ داریم
$$\frac{d}{dt}Z=ad^*_ZZ-TR_{W(t)^{-1}}\mathrm{grad}_{W(t)}V.$$

در نتیجه برای هر $Y\in so(3)=T_ISO(3)$ می‌توان نوشت
$$\begin{aligned}B(\frac{d}{dt}Z,Y)=B(ad^*_ZZ,Y)\\ -B(TR_{W(t)^{-1}}\mathrm{grad}_{W(t)}V,Y)\end{aligned}$$

چون فرم B پایای راست است با توجه به تعریف گرادیان داریم

$$\begin{aligned}B(\frac{d}{dt}Z,Y) &= B(Z,[Z,Y]) \\ &\quad - B(\mathrm{grad}_{W(t)}V, YW(t)) \\ &= B(Z,[Z,Y]) - d_{W(t)}VYW(t) \\ &= B(Z,[Z,Y]) - g\sigma.YW(t)\gamma_0\end{aligned}$$

اگر $M(t) := I_p Z(t) + Z(t) I_p$ آنگاه با قرار دادن $2B(Z,Y) := Q(M,Y) = \mathrm{Tr}(MY^t)$ می‌بینیم که

$$Q(\frac{d}{dt}M,Y) + Q([M,Z],Y) = -2g\sigma.YW\gamma_0$$

و در نتیجه

$$\mathrm{Tr}((\frac{d}{dt}M)Y^t) + \mathrm{Tr}([M,Z]Y^t) = -2g\sigma.YW\gamma_0. \quad (۳)$$

اکنون ایزومرفیسم جبرهای لی

$$k:\mathbb{R}^3 \to so(3)$$
$$(x,y,z)^t \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix}$$

را در نظر بگیرید. به آسانی دیده می‌شود که به ازای هر $w \in \Re^3$ معادلات

$$k(w)x = w \times x$$
$$k(x \times y) = [k(x), k(y)]$$
$$Tr(k(x)k(y)^t) = 2x.y$$

برقرار هستند. بنابراین با قرار دادن $\gamma(t) = W(t)\gamma_0$، $\mu(t) = k^{-1}(M(t))$، $\omega(t) = -k^{-1}(z(t))$ و $y = k^{-1}(Y)$ در معادله (۳) برای هر $y \in \Re^3$ نتیجه می‌گیریم

$$-2\mu_t.y + 2(\mu \times \omega).y = -g\sigma.(y \times \gamma).$$

چون $y \in \Re^3$ دلخواه است، پس

$$\mu_t = \mu \times \omega + g\gamma \times \sigma$$

به‌علاوه معادله $W_t = ZW$ نتیجه می‌دهد

$$\gamma_t = \gamma \times w(t)$$

که این معادلات در مکانیک کلاسیک کاملاً شناخته شده هستند (برای مثال بخش ۱.۴ مرجع [۹] راببینید).

۴- معادلات کاماسا-هلم با پتانسیل روی گروه‌های لی با بعد بی‌نهایت

در این بخش با استفاده از ابزارهای هندسی معرفی شده به بررسی وجود جواب معادلات آب کم عمق کاماسا-هلم بر گروه بات-ویراسورو می‌پردازیم. این روش که توسط آرنولد [۲] و مارسدن و ابین [۵] مطرح شد، یکی از روش‌های قدرتمند در حل معادلات مربوط مکانیک سیالات می‌باشد.

فرض کنید $s \in \mathrm{N}$ باشد و S^1 دایره یکه باشد. گروه همه وابرسانی‌های جهت‌نگهدار (دارای مشتق مثبت) مانند $\varphi: S^1 \to S^1$ را که در شرط

$$\int_{S^1} \sum_{0\le k\le s} (\varphi^{(k)})^2 dx < \infty$$

صدق می‌کنند را با $D^s(S^1)$ نمایش می‌دهیم. با توجه به نمادگذاری [۱۰] قرار می‌دهیم $\overline{D^s(S^1)} = D^s(S^1) \times \Re$ و آن را گروه بات-ویراسورو می‌نامیم. برای

$$\hat{\eta} = (\eta,\alpha), \hat{\xi} = (\xi,\beta) \in \overline{D^s(S^1)}$$

عمل گروه $\circ$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\hat{\eta} \circ \hat{\xi} := (\eta \circ \xi, \alpha + \beta + \int_{S^1} \log\partial_x(\eta \circ \xi) d\log\partial_x \xi)$$

با این عمل $\overline{D^s(S^1)}$ به یک گروه لی تبدیل می‌شود. جبر لی این گروه $Vect^s(S^1)$ می‌باشد و اعضای آن به‌صورت زوج مرتب (v,α) هستند که v یک میدان برداری s بار مشتق پذیر با مشتقات L^2 بر دایره و α یک عدد حقیقی است. ضرب داخلی $\langle , \rangle_{H^1}$ را بر $Vect^s(S^1)$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\forall \hat{V} = (v,\alpha), \hat{W} = (w,\beta) \in Vect^s(S^1)$$
$$\langle \hat{V}, \hat{W} \rangle_{H^1} = \int_{S^1} \partial_x v \partial_x w dx + \int_{S^1} vw dx + \alpha\beta$$

اکنون با استفاده از انتقال راست این متر را به یک متر

ریمانی بر $\overline{D^s(S^1)}$ توسیع می‌دهیم. به طور دقیق‌تر برای $\hat{V}$ و $\hat{W}$ در $T_{\hat{\xi}}\overline{D^s(S^1)}$ قرار می‌دهیم

$$\langle \hat{V},\hat{W}\rangle_{\hat{\xi}} := \langle T_{\hat{\xi}}R_{\hat{\xi}^{-1}}\hat{V}, T_{\hat{\xi}}R_{\hat{\xi}^{-1}}\hat{W}\rangle_{H^1}.$$

(برای جزئیات بیشتر به [۱۰] مراجعه شود). فرض کنید $f \in D^s(S^1)$ یک تابع مشتق‌پذیر باشد. بنابر قضیه ۱ از [۱۰] داریم

$$ad^*_{\hat{V}}\hat{W} = ((1-\partial_x^2)^{-1}\{-v\partial_x^3 w - 2\partial_x v\partial_x^2 w + v\partial_x w + 2w\partial_x v + b\partial_x^3 v + b\partial_x v\},0)$$

لاگرانژی

$$L(\hat{V},\hat{W}) = \langle T_{\hat{\xi}}R_{\hat{\xi}^{-1}}\hat{V}, T_{\hat{\xi}}R_{\hat{\xi}^{-1}}\hat{W}\rangle_{H^1} + f(\hat{\xi})$$

را در نظر بگیرید. بنابر قضیه ۲،۴ اسپری این لاگرانژی عبارت است از

$$\bar{s}(\hat{\xi},\hat{V}) = (\hat{\xi},\hat{V},\hat{V}, ad^*_{\hat{V}}\hat{V} - T_e R_{\hat{\xi}^{-1}}\mathrm{grad}_{\hat{\xi}} f)$$

چون این نگاشت مشتق‌پذیر است، پس دارای حل موضعی (خم انتگرال) می‌باشد. بنابراین معادله مشتقات جزئی اویلر–لاگرانژ

$$\frac{d}{dt}v = -ad^*_v v + \mathrm{grad}_e f$$

دارای حل موضعی است. با توجه به توضیحات بالا می‌توان نوشت

$$(1-\partial_x^2)\partial_t v = v\partial_x^3 v + 2\partial_x v\partial_x^2 v - 3v\partial_x v - a\partial_x^3 v - a\partial_x v + \mathrm{grad}_e f$$

که f می‌تواند هر تابع دیفرانسیل‌پذیری از $D^s(S^1)$ باشد. بنابراین، معادله با مشتقات جزیی فوق دارای جواب است و تغییرات این جواب نسبت شرایط مرزی هموار است. اگر تابع پتانسیل f صفر باشد آنگاه نتایج مقاله [۱۰] حاصل می‌شوند.

فهرست منابع

[1] R. Abraham and J. Marsden, Foundations of Mechanics, 2nd ed., Addison–Wesley (1978).

[2] V. I. Arnold,: Sur la geometrie differentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications a l'hydrodynamique des fluids parfaits, Ann. Inst. Grenoble, 16, 319–361 (1966).

[3] V.I. Arnold, Mathematical Methods of Classical Mechanics, New York, Springer-Verlag (1978).

[4] P. R. Chernoff and J. E. Marsden Properties of infinite dimensional Hamiltonian systems, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 421, Springer-Verlag, New York (1974).

[5] D. Ebin and J. Marsden, Groups of diffeomorphisms and the motion of an incompressible fluid, Ann. of Math. (2) 92, 102-163 (1970).

[6] J. Marsden, D. Ebin and A.E. Fischer, Diffeomorphism groups, hydrodynamics and relativity, Proceedings of the 13th Biennial Seminar of Canadian Mathematical Congress, Vol. 1, 135–279 (1972).

[7] A. Iacob, Invariant manifolds in the motion of a rigid body about a fixed point, Rev. Roum. Math. Pures. Appl., 16 (10), 1497-1521 (1971).

[8] D. Lewis, T. Ratiu, J.C. Simo and J. Marsden Heavy top: a geometric treatment, Nonlinearity, 5, 1-48 (1992).

[9] J.E. Marsden and T.S. Ratiu Introduction to Mechanics and Symmetry, Texts in Applied Mathematics 17, Springer-Verlag, (1994).

[10] G. Misiolek, Shallow water equation as a geodesic flow on the Bott-Virasoro group, J. Geom. Phys. 24, 203 – 208 (1998).

[11] S. Shkoller, Geometry and curvature of diffeomorphism groups with H^1 metric and mean Hydrodyna- mics, J. Funct. Anal. 160, 337–365 (1998).

[12] A. Suri, Second order time dependent tangent bundles and Geometric Mechanics, Mediterr. J. Math. 14: 154. https://doi.org/10.1007 /s00009-017-0954-2 (2017).

[13] M. Taylor, Finite and infinite dimensional Lie groups and evolution equations, Lecture notes (2003).