Archive of SID

دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال پنجم، شماره بیست و یکم، آذر و دی ۱۳۹۸
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

پژوهش‌های نوین در ریاضی

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

حل مسئله مکانیابی پشتیبان چند وسیله‌ای با در نظر گرفتن شعاع آرمانی برای هر مشتری

مرتضی نظری[۱]، جعفر فتحعلی[۲]*

(۱) دانشجوی دکترا، گروه ریاضی کاربردی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران
(۲) دانشیار، گروه ریاضی کاربردی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۷/۰۳/۰۶ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۷/۱۲/۱۱

چکیده

در این مقاله ما به بررسی یک نوع جدید از مسائل مکانیابی، به نام مسئله مکانیابی پشتیبان چند وسیله‌ای با در نظر گرفتن شعاع آرمانی برای هر مشتری می‌پردازیم. در این مسئله تعداد n نقطه به‌عنوان مشتری همراه با شعاع‌های داده شده در صفحه موجود هستند. هدف در یک مسئله مکانیابی پشتیبان چند وسیله‌ای با شعاع آرمانی، تعیین مکان m سرویس‌دهنده جدید، که احتمال دارد تعدادی از آن‌ها در آینده از کار بیافتند می‌باشد، به گونه‌ای که مجموع وزنی فاصله بین سرویس‌دهنده‌های جدید تا شعاع داده شده برای مشتریان بعلاوه مجموع وزنی فاصله بین سرویس‌دهنده‌ها کمینه شود. از آنجایی که در واقعیت به ندرت مکانی برای تسهیلات جدید وجود دارد که فاصله آن تا مشتریان، دقیقاً برابر با شعاع‌های داده شده باشند، لذا در این مدل به دنبال کمینه کردن مجموع وزنی مربعات خطا هستیم. ابتدا مدل این مسئله را بیان می‌کنیم، سپس یک روش تکراری (الگوریتم شبه وایزفیلد) را برای حل مسئله معرفی شده ارائه کرده و در مورد همگرایی آن بحث می‌کنیم و نشان می‌دهیم که جواب بهینه مسئله در پوسته گسترش یافته مستطیلی نقاط موجود قرار دارد. در پایان نیز مثال‌هایی عددی را مطرح کرده و آن‌ها را با استفاده از روش تکراری بیان شده حل می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: مکانیابی پیوسته، چند وسیله‌ای، پشتیبان، روش وایز فیلد، شعاع آرمانی.

*. عهده‌دار مکاتبات: Email:fathali@shahroodut.ac.ir

www.SID.ir

Archive of SID

۱- مقدمه

نظریه مکانیابی یکی از شاخه‌های بسیار مفید و مورد توجه در تحقیق در عملیات می‌باشد به طوریکه کاربردهای بسیاری در زندگی واقعی دارد. مسائل بهینه‌سازی مرتبط با مفاهیم مکانیابی، به دلیل اینکه اولاً به‌طور مداوم در تمام سطوح برنامه‌ریزی بشری حضور داشته‌اند و دوماً تصمیم‌گیری‌های مکانی دارای ماهیت استراتژیک هستند، یعنی اغلب آن‌ها با منابع عظیمی از سرمایه سر و کار دارند و تاثیرات اقتصادی آن‌ها بلند مدت است، و سوماً اکثر مدل‌های مکانیابی به سختی حل می‌شوند و حتی پایه‌ای‌ترین مدل‌های مرتبط به این مسائل دارای پیچیدگی محاسباتی بالایی هستند، در چندین دهه گذشته توجه ویژه‌ای را به خود اختصاص داده‌اند، به‌طوریکه در سال‌های اخیر مطالعات مکانیابی به عنوان یکی از عناصر کلیدی در موفقیت و بقای مراکز صنعتی و تولیدی مطرح شده است [۱].

به‌طور کلی مسائل مکانیابی، مسائلی هستند که وقتی به دنبال یافتن محل و نحوه استقرار بهینه یک یا چند سرویس‌دهنده براساس عوامل و متغیرهای موثر بر مکانیابی هستیم، با آن‌ها مواجه می‌شویم. معمولاً در این مسائل فرض بر این است که تعدادی مشتری (سرویس گیرنده/مشتری/نقطه تقاضا) موجود هستند و می‌خواهیم بهترین مکان برای استقرار سرویس‌دهندگان جدید را به گونه‌ای بیابیم که هزینه حمل و نقل، تاثیرات محیطی نامطلوب، زمان سرویس‌دهی، سود، کیفیت و غیره بسته به شرایط مسئله بهینه شوند.

مسائل مکانیابی تک وسیله‌ای جزء مسائل اساسی نظریه مکانیابی می‌باشند. در این مسائل n نقطه P_i (نقاط تقاضا)، به ازای $i=1,\ldots,n$، داده شده است و هر یک از این نقاط دارای یک وزن w_i (درجه اهمیت)، می‌باشند در این مسائل به دنبال پیدا کردن یک مکان بهینه (سرویس دهنده) مانند X هستیم به‌طوریکه فاصله وزنی این مکان جدید تا نقاط P_i، کمینه گردد. بنابراین یک مسئله مکانیابی تک وسیله‌ای به صورت زیر مدلبندی می‌گردد:

$$\min F(X)=\sum_{i=1}^{n}\left(w_i.d(X,P_i)\right). \qquad (۱)$$

که در رابطه (۱)، $d(X,p_i)$، فاصله بین نقاط P_i و X می‌باشد.

همچنین مورد مطالعه قرار گرفتن مسائل مکانیابی‌ای که به دنبال موقعیت‌یابی m سرویس‌دهنده از مجموعه‌ای از n سرویس‌دهنده موجود هستند، مفهوم مسائل مکانیابی چند وسیله‌ای را به وجود آورده است. در یک مسئله مکانیابی چند وسیله‌ای به دنبال پیدا کردن مکان تعدادی از سرویس‌دهنده‌ها هستیم به طوریکه فاصله وزنی بین سرویس‌دهنده‌های جدید و سرویس‌دهنده‌های موجود و همچنین فاصله بین هر جفت سرویس‌دهنده جدید کمینه گردد. در حالت خاص اگر $m=1$ باشد مسئله مکانیابی چند وسیله‌ای به یک مسئله مکانیابی تک وسیله‌ای که معروف به مسئله فرما–وبر می‌باشد، تبدیل خواهد شد.

در سال ۱۹۳۷، الگوریتم مشهوری برای حل مساله فرما–وبر به نام الگوریتم گرادیانی وایزفیلد ارائه شد [۲]. میهل در سال ۱۹۵۸، روش وایزفیلد را برای مسائل مکانیابی چند وسیله‌ای با نرم اقلیدسی گسترش داد [۳]. همچنین ایستر و همکاران در سال ۱۹۷۳، روش وایزفیلد را با استفاده از روش تقریبی هیپربولوئید برای مسائل مکانیابی چند وسیله‌ای با نرم‌های خطی و اقلیدسی گسترش دادند[۴]. موریس و وردینی نیز در سال ۱۹۷۳، و موریس در سال ۱۹۸۱، به ترتیب در مقالاتی مجزا الگوریتم وایزفیلد را برای مسائل مکانیابی با نرم l_p مورد بحث قرار دادند و الگوریتم‌هایی شبه–وایزفیلد برای مسائل خود ارائه کردند [۵،۶]. لایجن و بن ایسرائیل در سال ۲۰۱۰، الگوریتم وایزفیلد را برای مسائل تخصیص مورد استفاده قرار دادند [۷]. برای دستیابی به جزئیات بیشتر از مسائل مکانیابی چند وسیله‌ای می‌توان به مراجع [۸،۹] مراجعه نمود.

از طرف دیگر، تئوری مکانیابی به‌طور سنتی علاقه‌مند به مسائلی است که وزن سرویس‌دهنده‌ها و در دسترس بودن آن‌ها دقیقاً (با قطعیت) مشخص باشد. اما در واقعیت اغلب این امکان پذیر نیست که یک برآورد دقیق از تمامی این پارامترها را داشته باشیم. بنابراین مدل‌های مکانیابی شامل عدم قطعیت بررسی شده‌اند و برخی از حالت‌های آن‌ها تعریف و مورد مطالعه قرار گرفته است. در این مدل‌ها بعضی اوقات ممکن است سرویس‌دهنده‌ها

www.SID.ir

Archive of SID

شکست بخورند و مشتریان اختصاص داده شده به این سرویس‌دهنده‌ها مجبورند از سرویس‌دهنده‌های در حال کار سرویس بگیرند. این مسائل مبتنی بر این ویژگی را به اختصار مسائل مکانیابی پشتیبان می‌نامیم [۱۰].

برای اولین بار اشنایدر و دسکین در سال ۲۰۰۵، مدل قابلیت اطمینان را برای مسائل مکانیابی مورد بررسی قرار دادند [۱۱].

مسائل مکانیابی ۲- میانه و ۲- مرکز پشتیبان نیز اولین بار در سال ۲۰۰۹ توسط وانگ و همکاران مورد بررسی قرار گرفت [۱۰]. آن‌ها به‌ترتیب الگوریتم‌هایی با زمان‌های $O(n)$ و $O(n\log n)$، برای این دو مسئله ارائه کردند. در سال ۲۰۱۴ نیز چنگ و همکاران مسئله مکانیابی ۲-میانه پشتیبان را روی گراف‌های بلوکی در زمان $O(n\log n+m)$ حل نمودند [۱۲].

همچنین مسئله مکانیابی چند وسیله‌ای پشتیبان در صفحه توسط فتحعلی در سال ۲۰۱۴ مورد بررسی قرار گرفته است و الگوریتمی شبه-وایزفیلد برای حل آن ارائه شد [۱۳].

اخیرا نیز در سال ۱۳۹۵ مدبر و همکاران، به بررسی مسئله ۲-مرکز ناخوشایند پشتیبان روی درخت‌ها پرداخته و الگوریتم‌هایی چندجمله‌ای برای حل آن ارائه نموده‌اند [۱۴].

باید توجه داشت که در طول دهه‌های اخیر تلاش‌های بسیار زیادی برای ایجاد مدل‌های مکانیابی‌ای که مشخصه‌های بیشتری از دنیای واقعی را در نظر می‌گیرند، انجام گرفته است. از جمله مشخصه‌های پرکاربرد و مهمی که در نظریه‌های اخیر تحقیق در عملیات ظاهر شده است، مفاهیم "مکانیابی در حالت عدم قطعیت (پشتیبان)" و "مکانیابی با در نظر گرفتن شعاع آرمانی" می‌باشند.

بدین منظور فتحعلی و همکاران، برای اولین بار یک مسئله خاص از مسئله مکانیابی وبر را مطرح کردند [۱۵]. آن‌ها در این مسئله برای هر نقطه تقاضای P_i، یک شعاع آرمانی R_i را در نظر گرفتند و حداقل فاصله بین تسهیلات جدید و نقاط تقاضا را برابر با شعاع متناظر با هر نقطه تقاضا یعنی R_i، تعیین کردند. از آن‌جایی که در واقعیت به ندرت مکانی برای تسهیلات جدید وجود دارد که فاصله آن تا نقاط تقاضای P_i، دقیقاً R_i شود، لذا آن‌ها در این مدل به دنبال کمینه کردن مجموع وزنی مربعات خطا بودند. آن‌ها با استفاده از روش مربع بزرگ مربع کوچک الگوریتمی برای حل مسئله تحت نرم اقلیدسی پیشنهاد کردند.

سپس جمالیان و فتحعلی، یک مدل برنامه‌ریزی خطی برای مسئله با هدف کمینه کردن مجموع وزنی قدرمطلق خطا ارائه کردند [۱۶].

اخیرا فتحعلی و جمالیان، به بررسی مسئله کمینه کردن مجموع مربعات خطا پرداخته و آن را مسئله مکانیابی وبر مربعی آرمانی[1] (GSWLP) نامیدند [۱۷]. آن‌ها با استفاده از الگوریتم شبیه‌سازی پرندگان به حل مسئله فوق تحت نرم اقلیدسی پرداختند. در جدول ۱، مجموعه مقالات مکانیابی با شعاع آرمانی را که تا کنون مورد بررسی قرار گرفته‌اند را می‌توان مشاهده نمود.

لذا با توجه به اینکه تمامی تحقیقات بر روی مسائل مکانیابی با مفهوم در نظر گرفتن شعاع آرمانی برای مشتریان، تنها بر روی مسائل مکانیابی تک وسیله‌ای و در حالت قطعی در دسترس بودن سرویس دهنده‌ها انجام گرفته است، لذا ما در این مقاله برای اولین بار یک مسئله مکانیابی چند وسیله‌ای را در صفحه و با نرم l_p، و با در نظر گرفتن مشخصه‌های مکانیابی در حالت عدم قطعیت و مکانیابی با مفهوم در نظر گرفتن شعاع آرمانی برای هر مشتری، به صورت توامان مورد مطالعه قرار داده‌ایم تا توانسته باشیم مشخصه‌های بیشتری از دنیای واقعی را در مدل ارائه شده بررسی نمائیم.

۲- مسئله مکانیابی پشتیبان چند وسیله‌ای

فرض کنید P_1، ...، P_n ، به عنوان n سرویس‌دهنده موجود و X_1، ...، X_m ، m سرویس‌دهنده‌های جدیدی باشند که بایستی بهترین مکان برای قرارگیری آن‌ها در بین n سرویس‌دهنده موجود یافت شود. یک مسئله مکانیابی چند وسیله‌ای به دنبال کمینه کردن کل مجموع فاصله وزنی بین سرویس‌دهنده‌های موجود و سرویس دهنده‌های جدید و مجموع فاصله وزنی بین سرویس

1. Goal Square Weber Location Problem

www.SID.ir

Archive of SID

دهنده‌های جدید می‌باشد. به‌عبارت دیگر در یک مسئله مکانیابی چند وسیله‌ای به دنبال کمینه کردن تابع هدف زیر می‌باشیم:

$$\min f(X_1,\dots X_m)= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} w_{ij} l_p(X_j,P_i)+\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{l=j+1}^{m} v_{jl} l_p(X_j,X_l). \qquad (۲)$$

در رابطه (۲)، $\mathbf{w}_{ij}$ ، وزن بین سرویس‌دهنده موجود i –ام و سرویس دهنده جدید j –ام، و v_{jl}، وزن بین دو سرویس‌دهنده جدید j –ام و l –ام می‌باشد. $l_p(X_j,P_i)$ نیز فاصله با نرم p بین نقاط X_j و P_i است.

همچنین فرض کنید که k سرویس‌دهنده که $k\le m$ است با احتمال داده شده‌ی $0\le\alpha_i\le 1$، شکست بخورند. در صورت شکست خوردن هر سرویس‌دهنده، سرویس‌دهنده‌های دیگر باید به مشتریان سرویس‌دهنده شکست خورده، سرویس دهند. همچنین برای ساده شدن مسئله فرض کنید که k سرویس‌دهنده اول با احتمال α_k که $k=0,\dots,m-1$، شکست بخورند. در این صورت یک مسئله مکانیابی پشتیبان چند وسیله‌ای به صورت زیر مدل‌بندی می‌شود:

$$\min F(X_1,\dots X_m)=\sum_{t=1}^{k+1}\alpha_{t-1}\, f(X_t,\dots X_m) \qquad (۳)$$

به طوریکه:

$$f(X_t,\dots X_m)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=t}^{m} w_{ij} l_p(X_j,P_i) +\sum_{j=t}^{m-1}\sum_{l=j+1}^{m} v_{jl} l_p(X_j,X_l),\quad t=1,\dots,k+1 \qquad (۴)$$

لم ۲-۱: تابع هدف مسئله (۳) محدب است.

برای اثبات این موضوع می‌توان به مرجع [۹] مراجعه کرد.

۳- مسئله مکانیابی پشتیبان چند وسیله‌ای با شعاع آرمانی تحت نرم l_p

فرض کنید می‌خواهیم فروشگاهی را در یک شهر احداث کنیم، با توجه به ساختار زندگی شهری، نحوه و توزیع جمعیت، هر چه فروشگاه به مرکز شهر و مناطق پر جمعیت نزدیک‌تر باشد از یک طرف دسترسی ساکنان افزایش یافته و متوسط هزینه حمل و نقل آن‌ها کاسته شده و تقاضای مشتریان به خوبی برآورده می‌شود و از طرف دیگر احداث فروشگاه در چنین جایگاه‌هایی هزینه‌های زیادی (خرید زمین و مالیات و ...) در پی دارد، آلودگی صوتی و ترافیک ناشی از آن، تردد را دچار مشکل می‌کند که همگی از جمله آثار نامطلوب نزدیکی فروشگاه به مرکز شهر است. تصمیم‌گیری برای احداث چنین سرویس‌دهندگانی که در دنیای واقعی با آن رو برو هستیم کار پیچیده و دشواری است. ایده‌ای که برای مدل سازی این مسائل پیشنهاد شده است این است که برای دوری و نزدیکی از مرکز شهر یک کران مشترک (شعاع آمانی) در نظر گرفته شود که در نهایت به مسائل مکانیابی با با در نظر گرفتن شعاع آرمانی برای نقاط تقاضا می‌رسیم.

جدول ۱. مقالات مسائل مکانیابی با در نظر گرفتن شعاع آرمانی برای هر مشتری

نام نویسندگان	فضای مسئله		تعداد سرویس دهنده		نرم فاصله			مشخصه مکانیابی		تابع خطا	
	گسسته	پیوسته	تک وسیله‌ای	چند وسیله‌ای	l_1	l_2	l_p	قطعیت	عدم قطعیت	قدر مطلق خطا	مربعات خطا
فتحعلی و همکاران [۱۵]	–	✓	✓	–	–	✓	–	✓	–	–	✓
جمالیان و فتحعلی [۱۶]	–	✓	✓	–	–	✓	–	✓	–	✓	–
فتحعلی و جمالیان [۱۷]	–	✓	✓	–	–	✓	–	✓	–	–	✓
مقاله حاضر	–	✓	–	✓	✓	✓	✓	–	✓	–	✓

www.SID.ir

Archive of SID

با توجه به مقاله فتحعلی [۱۵]، برای هر سرویس‌دهنده موجود P_i، شعاع آرمانی R_i را در نظر می‌گیریم. فرض کنید که $P_i=(a_i,b_i)$ و $X_j=(x_j,y_j)$ باشند. با در نظر گرفتن تمام مفروضات بخش ۲ مقاله، یک مسئله مکانیابی پشتیبان چند وسیله‌ای با شعاع آرمانی را می‌توان به صورت زیر مدل‌بندی ریاضی نمود:

$$\min F_R(X_1,\dots X_m)=\sum_{t=1}^{k+1}\alpha_{t-1} f_R(X_t,\dots X_m) \tag{۵}$$

به طوریکه:

$$f_R(X_t,\dots X_m)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=t}^{m} w_{ij}\left(l_p(X_j,P_i)-R_i\right)^2 + \sum_{j=t}^{m-1}\sum_{l=j+1}^{m} v_{jl} l_p(X_j,X_l). \tag{۶}$$

قضیه ۳-۱: جواب بهینه مسئله پشتیبان چند وسیله‌ای آرمانی، در پوسته گسترش یافته مستطیلی نقاط $P_i=(a_i,b_i)$ قرار دارد.

اثبات: در نظر بگیرید که

$$\begin{cases} a_{min}=\min\{a_i-R_i \mid i=1,\dots,n\},\\ a_{max}=\max\{a_i+R_i \mid i=1,\dots,n\},\\ b_{min}=\min\{b_i-R_i \mid i=1,\dots,n\},\\ b_{max}=\max\{a_i+R_i \mid i=1,\dots,n\}.\end{cases}$$

باشد. همچنین مجموعه نقاط $RH_1=(a_{\min},b_{\min})$، $RH_2=(a_{\min},b_{\max})$ و $RH_3=(a_{\max},b_{\max})$ و $RH_4=(a_{\max},b_{\min})$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $X_j=(x_j,y_j)$ باشد و برای هر $j=1,\dots,n$، X_j خارج از پوسته مستطیلی نقاط RH_1، RH_2، RH_3 و RH_4 قرار داشته باشد. در حالت اول فرض کنید $x_j>a_{\max}$ باشد. بنابراین اگر قرار دهیم $X'_j=(x_{\max},y_j)$ باشد در این صورت داریم:

$$l_p(X_j,P_i)=\left(|x_j-a_i|^p+|y_j-b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} > \left(|a_{max}-a_i|^p+|y_j-b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}=l_p(X'_j,P_i)>R_i$$

با توجه به رابطه بالا می‌توان نتیجه گرفت که:

$$\left(\left(|x_j-a_i|^p+|y_j-b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}-R_i\right)^2 > \left(\left(|a_{max}-a_i|^p+|y_j-b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}-R_i\right)^2$$

بنابراین با توجه به مثبت بودن ضرائب w_{ij}، داریم:

$$\to \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=t}^{m} w_{ij}\left(\left(|x_j-a_i|^p+|y_j-b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}-R_i\right)^2 > \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=t}^{m} w_{ij}\left(\left(|a_{max}-a_i|^p+|y_j-b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}-R_i\right)^2$$

$$\to \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=t}^{m} w_{ij}\left(\left(|x_j-a_i|^p+|y_j-b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}-R_i\right)^2 + \sum_{j=t}^{m-1}\sum_{l=j+1}^{m} v_{jl}\left(|x_j-x_l|^p+|y_j-y_l|^p\right)^{\frac{1}{p}} > \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=t}^{m} w_{ij}\left(\left(|a_{max}-a_i|^p+|y_j-b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}-R_i\right)^2 + \sum_{j=t}^{m-1}\sum_{l=j+1}^{m} v_{jl}\left(|a_{max}-x_l|^p+|y_j-y_l|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

پس می‌توان گفت :

$$f_R(X_t,\dots X_m)>f_R(X'_t,\dots X'_m) \to F=\sum_{t=1}^{k+1}\alpha_{t-1} f(X_t,\dots X_m) > F_R=\sum_{t=1}^{k+1}\alpha_{t-1} f_R(X'_t,\dots X'_m)$$

بنابراین $X_j=(x_j,y_j)$ نمی‌تواند جواب بهینه باشد. برای حالت‌هایی که $x_j>a_{\max}$، $y_j<b_{\min}$ و $y_j>b_{\max}$ باشد نیز به صورت کاملاً مشابه می‌توان اثبات نمود که نقاط X_j نمی‌توانند جواب‌های بهینه باشند. بنابراین نتیجه می‌شود که جواب بهینه مسئله در پوسته مستطیلی حاصل از نقاط RH_1، RH_2، RH_3 و RH_4 قرار دارد.

لم ۳-۱: مشتقات تابع هدف مسئله مکانیابی پشتیبان چند وسیله‌ای آرمانی، ممکن است در هر جایی از صفحه تعریف نشده باشند.

اثبات: با مشتق‌گیری از تابع هدف می‌توان گفت در نقاطی از صفحه که مخرج مشتق رابطه (۵) صفر می‌شود، مشتق تعریف نشده است.

www.SID.ir

Archive of SID

با توجه به لم ۲، برای اینکه تابع هدف مسئله (۵) مشتق پذیر باشد قرار می‌دهیم:

$$f_R^h(X_t,\dots X_m)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=t}^{m}w_{ij}\left(l_p^h(X_j,P_i)-R_i\right)^2 +\sum_{j=t}^{m-1}\sum_{l=j+1}^{m}\nu_{jl}l_p^h(X_j,X_l). \qquad (۷)$$

به طوریکه:

$$l_p^h(X_j,P_i)= \left(\left((x_j-a_i)^2+\epsilon\right)^{\frac{p}{2}}+\left((y_j-b_i)^2+\epsilon\right)^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{1}{p}}. \qquad (۸)$$

و

$$l_p^h(X_j,X_l)= \left(\left((x_j-x_l)^2+\epsilon\right)^{\frac{p}{2}}+\left((y_j-y_l)^2+\epsilon\right)^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{1}{p}}. \qquad (۹)$$

بنابراین با توجه به روابط بالا به جای بهینه شدن رابطه (۵) به دنبال بهینه شدن رابطه زیر هستیم.

$$\min F_R^h(X_1,\dots X_m)=\sum_{t=1}^{k+1}\alpha_{t-1}f_R^h(X_t,\dots X_m) \qquad (۱۰)$$

رابطه (۱۰) را تقریب رابطه (۵) می‌نامیم. در ادامه بیان می‌کنیم که تابع هدف مسئله تقریب زده شده، یعنی رابطه (۱۰)، به تابع هدف مسئله اصلی یعنی رابطه (۵)، همگرا است.

لم ۳-۲: تابع هدف تقریب زده شده‌ی $F_R^h(X_1,\dots X_m)$ به تابع هدف مسئله اصلی یعنی $F_R(X_1,\dots X_m)$ همگرا است و داریم:

$$(\epsilon\to 0)\Rightarrow \max\left\{\left|F_R^h(X_1,\dots,X_m)-F_R(X_1,\dots,X_m)\right|\right\}\to 0$$

اثبات: با توجه به روابط (۶) و (۷) داریم:

$$f_R^h(X_t,\dots X_m)-f_R(X_t,\dots X_m)=$$
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=t}^{m}w_{ij}\left(\left(\left((x_j-a_i)^2+\epsilon\right)^{\frac{p}{2}}+\left((y_j-b_i)^2+\epsilon\right)^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{1}{p}}-R_i\right)^2$$
$$-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=t}^{m}w_{ij}\left(\left(\left|x_j-a_i\right|^p+\left|y_j-b_i\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}-R_i\right)^2$$
$$+\sum_{j=t}^{m-1}\sum_{l=j+1}^{m}\nu_{jl}\left(\left((x_j-x_l)^2+\epsilon\right)^{\frac{p}{2}}+\left((y_j-y_l)^2+\epsilon\right)^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$-\sum_{j=t}^{m-1}\sum_{l=j+1}^{m}\nu_{jl}\left(\left|x_j-x_l\right|^p+\left|y_j-y_l\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

با قرار دادن $s_1=x_j-a_i$، $s_2=y_j-b_i$، $s_3=\epsilon^{0.5}$، $s_4=r_i$ و با استفاده از نا مساوی مینکوفسکی داریم:

$$\left(\left(\left((x_j-a_i)^2+\epsilon\right)^{\frac{p}{2}}+\left((y_j-b_i)^2+\epsilon\right)^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{1}{p}}-R_i\right)^2 -\left(\left(\left|x_j-a_i\right|^p+\left|y_j-b_i\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}-R_i\right)^2=$$
$$\left(\left(s_1^2+s_3^2\right)^{\frac{p}{2}}+\left(s_2^2+s_3^2\right)^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{2}{p}}-\left(\left|s_1\right|^p+\left|s_2\right|^p\right)^{\frac{2}{p}}$$
$$-2s_4\left(\left(\left(s_1^2+s_3^2\right)^{\frac{p}{2}}+\left(s_2^2+s_3^2\right)^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{1}{p}}-\left(\left|s_1\right|^p+\left|s_2\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)$$
$$\le 4^{\frac{1}{p}}s_3^2+2^{\frac{p+1}{p}}s_4s_3=4^{\frac{1}{p}}\epsilon+2^{\frac{p+1}{p}}s_4s_3=4^{\frac{1}{p}}\epsilon+2^{\frac{p+1}{p}}\epsilon^{0.5}R_i$$

بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=t}^{m}w_{ij}\left(\left(\left((x_j-a_i)^2+\epsilon\right)^{\frac{p}{2}}+\left((y_j-b_i)^2+\epsilon\right)^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{1}{p}}-R_i\right)^2$$
$$-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=t}^{m}w_{ij}\left(\left(\left|x_j-a_i\right|^p+\left|y_j-b_i\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}-R_i\right)^2\le$$
$$4^{\frac{1}{p}}\epsilon\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=t}^{m}w_{ij}\right)+2^{\frac{p+1}{p}}\epsilon^{0.5}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=t}^{m}w_{ij}R_i\right)$$

به طور مشابه نیز می‌توان اثبات نمود که:

$$\sum_{j=t}^{m-1}\sum_{l=j+1}^{m}\nu_{jl}\left(\left((x_j-x_l)^2+\epsilon\right)^{\frac{p}{2}}+\left((y_j-y_l)^2+\epsilon\right)^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$-\sum_{j=t}^{m-1}\sum_{l=j+1}^{m}\nu_{jl}\left(\left|x_j-x_l\right|^p+\left|y_j-y_l\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\le\sum_{j=t}^{m-1}\sum_{l=j+1}^{m}\left(\nu_{jl}\ 2^{\frac{1}{p}}\epsilon\right)$$

بنابراین با توجه به روابط بالا نتیجه می‌شود که:

www.SID.ir

Archive of SID

$$f_r^h(X_t,\dots X_m)-f_r(X_t,\dots X_m)\le$$
$$4^{\frac{1}{p}}\epsilon\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=t}^{m}w_{ij}\right)+2^{\frac{p+1}{p}}\epsilon^{0.5}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=t}^{m}w_{ij}R_i\right)$$
$$+2^{\frac{1}{p}}\epsilon\left(\sum_{j=t}^{m-1}\sum_{l=j+1}^{m}v_{jl}\right)$$

پس با توجه به رابطه (۱۰) و (۵) داریم :

$$\max\left\{\left|F_R^h(X_1,\dots,X_m)-F_R(X_1,\dots,X_m)\right|\right\}=$$
$$\sum_{t=1}^{k+1}\alpha_{t-1}\left(\left|f_R^h(X_t,\dots X_m)-f_R(X_t,\dots X_m)\right|\right)$$
$$\le 4^{\frac{1}{p}}\epsilon\left(\sum_{t=1}^{k+1}\alpha_{t-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=t}^{m}w_{ij}\right)\right)+$$
$$2^{\frac{1}{p}}\epsilon\left(\sum_{t=1}^{k+1}\alpha_{t-1}\left(\sum_{j=t}^{m-1}\sum_{l=j+1}^{m}v_{jl}\right)\right)+$$
$$2^{\frac{p+1}{p}}\epsilon^{0.5}\left(\sum_{t=1}^{k+1}\alpha_{t-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=t}^{m}w_{ij}R_i\right)\right)$$

با توجه به رابطه بالا زمانی که $\epsilon\to 0$ می‌رود می‌توان نتیجه گرفت که:

$$\max\left\{\left|F_R^h(X_1,\dots,X_m)-F_R(X_1,\dots,X_m)\right|\right\}\to 0$$

حال با توجه به لم ۳ و مشتق پذیر بودن تابع هدف، می‌توان یک روش شبه-وایزفیلد برای حل تابع هدف (۱۰) ارائه داد.

۴- الگوریتم شبه-وایزفیلد

اگر شرط لازم بهینگی برای رابطه (۱۰) را در نظر بگیریم، در این صورت داریم:

$$\frac{\partial f_R^h(X_t,\dots,X_m)}{\partial x_r}=\begin{cases}2\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{w_{ir}(Sa_{ri}-R_i).(x_r-a_i)}{(Sa_{ri})^{p-1}.Ra_{ri}}\right)+\sum_{\substack{j=t\\j\ne r}}^{m}\left(\frac{v_{rj}(x_r-x_j)}{Sx_{rj}.Rx_{rj}}\right) & r=t,\dots,m\\ 0 & r=1,\dots,t-1\end{cases}\quad(۱۱)$$

و

$$\frac{\partial f_R^h(X_t,\dots,X_m)}{\partial y_r}=\begin{cases}2\sum_{i=1}^{n}w_{ir}\frac{(Sa_{ri}-R_i).(y_r-b_i)}{(Sa_{ri})^{p-1}.Rb_{ri}}+\sum_{\substack{j=t\\j\ne r}}^{m}\frac{v_{rj}(y_r-y_j)}{Sx_{rj}.Ry_{rj}}, & r=t,\dots,m\\ 0 & r=1,\dots,t-1\end{cases}\quad(۱۲)$$

به طوریکه:

$$\begin{cases}Sa_{ri}=\left(\left((x_r-a_i)^2+\epsilon\right)^{\frac{p}{2}}+\left((y_r-b_i)^2+\epsilon\right)^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{1}{p}},\\ Sx_{rj}=\left(\left((x_r-x_j)^2+\epsilon\right)^{\frac{p}{2}}+\left((y_r-y_j)^2+\epsilon\right)^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{p-1}{p}},\\ Ra_{ri}=\left((x_r-a_i)^2+\epsilon\right)^{\frac{2-p}{2}},\\ Rb_{ri}=\left((y_r-b_i)^2+\epsilon\right)^{\frac{2-p}{2}},\\ Rx_{rj}=\left((x_r-x_j)^2+\epsilon\right)^{\frac{2-p}{2}},\\ Ry_{rj}=\left((y_r-y_j)^2+\epsilon\right)^{\frac{2-p}{2}}.\end{cases}\quad(۱۳)$$

بنابراین از انجایی که داریم:

$$\frac{\partial F_R^h(X_1,\dots,X_m)}{\partial x_r}=\alpha_0\frac{\partial f_R^h(X_1,\dots,X_m)}{\partial x_r}+\dots+\alpha_k\frac{\partial f_R^h(X_{k+1},\dots,X_m)}{\partial x_r}$$
$$=\begin{cases}\sum_{t=1}^{r}\alpha_{t-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2w_{ir}(Sa_{ri}-R_i).(x_r-a_i)}{(Sa_{ri})^{p-1}.Ra_{ri}}\right)+\sum_{j=t,j\ne r}^{m}\left(\frac{v_{rj}(x_r-x_j)}{Sx_{rj}.Rx_{rj}}\right)\right) & r=1,\dots,k\\ \sum_{t=1}^{k+1}\alpha_{t-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2w_{ir}(Sa_{ri}-R_i).(x_r-a_i)}{(Sa_{ri})^{p-1}.Ra_{ri}}\right)+\sum_{j=t,j\ne r}^{m}\left(\frac{v_{rj}(x_r-x_j)}{Sx_{rj}.Rx_{rj}}\right)\right) & r=k+1,\dots,m\end{cases}\quad(۱۴)$$

و

$$\frac{\partial F_R^h(X_1,\dots,X_m)}{\partial y_r}=\alpha_0\frac{\partial f_R^h(X_1,\dots,X_m)}{\partial y_r}+\dots+\alpha_k\frac{\partial f_R^h(X_{k+1},\dots,X_m)}{\partial y_r}$$
$$=\begin{cases}\sum_{t=1}^{r}\alpha_{t-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2w_{ir}(Sa_{ri}-R_i).(y_r-b_i)}{(Sa_{ri})^{p-1}.Rb_{ri}}\right)+\sum_{j=t,j\ne r}^{m}\left(\frac{v_{rj}(y_r-y_j)}{Sx_{rj}.Ry_{rj}}\right)\right) & r=1,\dots,k\\ \sum_{t=1}^{k+1}\alpha_{t-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2w_{ir}(Sa_{ri}-R_i).(y_r-b_i)}{(Sa_{ri})^{p-1}.Rb_{ri}}\right)+\sum_{j=t,j\ne r}^{m}\left(\frac{v_{rj}(y_r-y_j)}{Sx_{rj}.Ry_{rj}}\right)\right) & r=k+1,\dots,m\end{cases}\quad(۱۵)$$

بنابراین با مساوی صفر قرار دادن مشتقات جزئی و پیدا کردن x_r و y_r، به عبارات تکراری زیر می‌رسیم:

$$x_r^{c+1}=\begin{cases}\dfrac{\sum_{t=1}^{r}\alpha_{t-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2w_{ir}(Sa_{ri}^c-R_i).a_i}{(Sa_{ri}^c)^{p-1}.Ra_{ri}^c}\right)+\sum_{j=t,j\ne r}^{m}\left(\frac{v_{rj}.x_j^c}{Sx_{rj}^c.Rx_{rj}^c}\right)\right)}{\sum_{t=1}^{r}\alpha_{t-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2w_{ir}(Sa_{ri}^c-R_i)}{(Sa_{ri}^c)^{p-1}.Ra_{ri}^c}\right)+\sum_{j=t,j\ne r}^{m}\left(\frac{v_{rj}}{Sx_{rj}^c.Rx_{rj}^c}\right)\right)};r=1,\dots,k\\ \dfrac{\sum_{t=1}^{k+1}\alpha_{t-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2w_{ir}(Sa_{ri}^c-R_i).a_i}{(Sa_{ri}^c)^{p-1}.Ra_{ri}^c}\right)+\sum_{j=t,j\ne r}^{m}\left(\frac{v_{rj}.x_j^c}{Sx_{rj}^c.Rx_{rj}^c}\right)\right)}{\sum_{t=1}^{k+1}\alpha_{t-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2w_{ir}(Sa_{ri}^c-R_i)}{(Sa_{ri}^c)^{p-1}.Ra_{ri}^c}\right)+\sum_{j=t,j\ne r}^{m}\left(\frac{v_{rj}}{Sx_{rj}^c.Rx_{rj}^c}\right)\right)};r=k+1,\dots,m\end{cases}\quad(۱۶)$$

www.SID.ir

Archive of SID

و

$$y_r^{c+1}=\begin{cases}\dfrac{\sum_{t=1}^{r}\alpha_{t-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\dfrac{2w_{ir}\left(Sa_{ri}^{c}-R_i\right).b_i}{(Sa_{ri}^{c})^{p-1}.Rb_{ri}^{c}}\right)+\sum_{j=t,j\neq r}^{m}\left(\dfrac{v_{rj}.y_j^{c}}{Sx_{rj}^{c}.Ry_{rj}^{c}}\right)\right)}{\sum_{t=1}^{r}\alpha_{t-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\dfrac{2w_{ir}\left(Sa_{ri}^{c}-R_i\right)}{(Sa_{ri}^{c})^{p-1}.Rb_{ri}^{c}}\right)+\sum_{j=t,j\neq r}^{m}\left(\dfrac{v_{rj}}{Sx_{rj}^{c}.Ry_{rj}^{c}}\right)\right)} & r=1,\dots,k\\[2ex] \dfrac{\sum_{t=1}^{k+1}\alpha_{t-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\dfrac{2w_{ir}\left(Sa_{ri}^{c}-R_i\right).b_i}{(Sa_{ri}^{c})^{p-1}.Rb_{ri}^{c}}\right)+\sum_{j=t,j\neq r}^{m}\left(\dfrac{v_{rj}.y_j^{c}}{Sx_{rj}^{c}.Ry_{rj}^{c}}\right)\right)}{\sum_{t=1}^{k+1}\alpha_{t-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\dfrac{2w_{ir}\left(Sa_{ri}^{c}-R_i\right)}{(Sa_{ri}^{c})^{p-1}.Rb_{ri}^{c}}\right)+\sum_{j=t,j\neq r}^{m}\left(\dfrac{v_{rj}}{Sx_{rj}^{c}.Ry_{rj}^{c}}\right)\right)} & r=k+1,\dots,m\end{cases}\qquad (۱۷)$$

به طوریکه در روابط (۱۶) و (۱۷) منظور از c، تکرار الگوریتم در هر مرحله می‌باشد. شرط توقف در روابط بازگشتی بالا را می‌توان $\left|F_h^c-F_h^{c-1}\right|<\epsilon$ در نظر گرفت به طوریکه ϵ، میزان خطای الگوریتم تکراری بالا می‌باشد.

۵- نتایج محاسباتی

در این قسمت نتایج یک مثال عددی با $n=10$ و $m=5$ نسبت به پارامترهای مختلفی چون p، k و α_i ها آورده شده است.

جداول ۲ و ۳ بیانگر مختصات وسایل موجود و پارامترهای اولیه مسئله همچون وزن بین وسایل موجود و سرویس دهنده‌های جدید (w_{ij})، و وزن بین هر دو سرویس دهنده جدید (v_{jl}) می‌باشد. در جدول ۴، نتایج حاصل از حل مسئله برای $k=4$ و $p=2$ برای حالات $\alpha_0=0.2,\alpha_1=0.8,\alpha_2=0.6,\alpha_3=0.4,\alpha_4=0.2$، و $R_i=0.5$ برای هر $i=1,\dots,n$ آمده است. در جدول ۵ نیز نتایج حل مسئله مذکور نسبت به مقادیر مختلف p، در حالت $R_i=0.5$ برای هر $i=1,\dots,n$ آورده شده است. نمودار ۱ نیز سرعت همگرایی روش شبه–وایزفیلد ارائه شده را در مقایسه با تعداد تکرار نشان می‌دهد. همچنین شرط توقف نیز $\left|F_h^c-F_h^{c-1}\right|<0.001$ در نظر گرفته شده است.

در مسئله فوق اگر تمامی R_iها برابر با صفر در نظر گرفته شوند در این صورت با یک مسئله مکانیابی پشتیبان چند وسیله‌ای مواجه هستیم که این مساله توسط فتحعلی در مرجع [۱۳] مورد بررسی قرار گرفته است. در جدول ۶ نتایج مقایسه‌ای مثال حاضر با مثال مقاله مرجع [۱۳] آورده شده است.

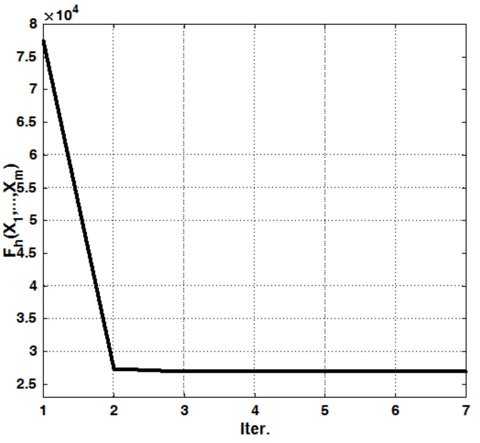
نتیجه‌گیری

با توجه به اینکه تمامی تحقیقات انجام شده بر روی مسائل مکانیابی با مفهوم در نظر گرفتن شعاع آرمانی برای مشتریان، تنها بر روی مسائل مکانیابی تک وسیله‌ای و در حالت قطعی در دسترس بودن سرویس دهنده‌ها بوده است، لذا ما در این مقاله برای اولین بار یک مسئله مکانیابی چند وسیله‌ای را در صفحه و با نرم l_p، و با در نظر گرفتن مشخصه‌های مکانیابی در حالت عدم قطعیت و مکانیابی با مفهوم شعاع آرمانی برای هر متقاضی، به صورت توامان مورد مطالعه قرار داده‌ایم. ابتدا مسئله مذکور را به صورت یک مدل ریاضی فرمول‌بندی نموده و نشان داده‌ایم که جواب بهینه این مسئله در پوسته گسترش یافته نقاط تقاضا قرار دارد. بنابراین این مسئله یک مسئله شدنی است. با توجه به ناپیوستگی مشتقات تابع هدف مسئله، برای مدل ارائه شده یک تقریب اولیه انتخاب کرده که این تقریب اولیه کاملا هموار است. سپس نشان داده‌ایم که جواب‌های بدست آمده از مدل تقریب زده شده، به مسئله اصلی همگرا است.

در انتها نیز یک روش بازگشتی شبه–وایزفیلد را برای حل آن ارائه نموده‌ایم و مثالی عددی را برای پارامترهای مختلفی چون p و R_i حل نموده‌ایم.

www.SID.ir

Archive of SID



نمودار ۱. نمودار سرعت همگرایی الگوریتم شبه–وایزفیلد ارائه شده در مقایسه با تعداد تکرار برای حالت $p = 2$.

جدول ۲. مختصات وسیله‌های موجود ($P_i = (a_i, b_i)$) و وزن بین سرویس دهنده‌های جدید و وسیله‌های موجود ($w_{ji}, j = 1,...,5$).

(i)	$P_i = (a_i, b_i)$	w_{1i}	w_{2i}	w_{3i}	w_{4i}	w_{5i}
1	(0,12)	4	3	0	1	2
2	(2,1)	0	6	0	2	3
3	(10,2)	2	0	8	3	1
4	(6.12)	0	0	10	4	5
5	(20,10)	6	8	2	1	3
6	(5,20)	5	1	6	3	4
7	(15,15)	2	4	7	2	5
8	(22,5)	7	5	0	2	4
9	(20,25)	1	2	3	4	5
10	(25,25)	18	1	5	4	2

جدول ۳. وزن مربوط بین سرویس دهنده‌های جدید (v_{jl})

سرویس دهنده جدید	1	2	3	4	5
1	0	6	1	4	5
2	6	0	4	2	3
3	1	4	0	5	2
4	4	2	5	0	8
5	5	3	2	8	0

جدول ۴. نتایج بدست آمده برای $p = 2$ و $k = 4$ در حالت $R_i = 0.5, i = 1,...,n$.

تکرار	1	2	$\cdots$	6	7
X_1	(3.60,3.31)	(16.11,14.28)	$\cdots$	18.01,16.60)	(17.01,16.60)
X_2	(2.82,2.06)	(13.11,9.75)	$\cdots$	(13.60,10.21)	(13.60,10.21)
X_3	(3.30,3.84)(	(11.58,13.46)	$\cdots$	(12.30,14.15)	(13.30,14.15)
X_4	(1.93,2.11)	(12.13,13.23)	$\cdots$	(13.20,14.35)	(13.20,14.35)
X_5	(2.88,3.08)	(11.77,12.57)	$\cdots$	(12.93,13.86)	(12.93,13.86)
F_R^h	1.77507	27386.1	$\cdots$	9.26903	9.26903
F_R	77506.6	27385.7	$\cdots$	26903.5	5.26903

www.SID.ir

Archive of SID

جدول ۵. نتایج بدست آمده برای حالت $k=4$ و $R_i=0.5, i=1,\dots,n$ برای مقادیر مختلف p در ۲۰۰ تکرار.

تکرار	$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=10$
X_1	(20.27,17.29)	(18.01,16.60)	16.75,16.12)	(17.63,8.09)
X_2	(14.13,9.97)	(13.60,10.21)	(13.44,11.08)	(11.24,8.33)
X_3	(10.57,15.08)	(12.30,14.15)	(12.33,13.79)	(19.31,10.87)
X_4	(14.08,14.25)	(13.20,14.35)	(12.99,13.79)	(17.564,7.05)
X_5	(14.10,14.25)	(12.93,13.86)	(12.99,14.27)	(7.73,20.11)
F_R^h	49313.0	27386.1	22657.1	32107.0
F_R	49309.1	27385.7	22656.3	32106.8

جدول ۶. مقایسه نتایج بدست آمده از الگوریتم حاضر با مقالات دیگر، نسبت به مقادیر مختلف p.

شعاع آرمانی و مقادیر p	F_R	فتحعلی [۱۳]
$R_i=0, p=1$	361.3252	3.3252
$R_i=0, p=2$	897.2421	2443.0
$R_i=0, p=10$	812.2076	9.2076

www.SID.ir

Archive of SID

فهرست منابع

[۱] نظری، م.، و فتحعلی ج.، مسئله معکوس نوع محدودیت بودجه‌ای ۲-میانه پشتیبان با تغییر در مختصات نقاط، مجله تحقیق در عملیات و کاربردهای آن، ۱۵ (۲)، ۶۳-۸۸ (۱۳۹۷)

[2] Weiszfeld, E., Sur le point par lequel la somme des distances de n points donns est minimum, Tohoku Math, 43, 355–386 (1937)

[3] Miehle, W., Link-length minimization in networks, Oper. Res., 6, 232–243 (1958)

[4] Eyster, J.W., White, J.A., Wierwille, W.W., On solving multifacility location problems using a hyperboloid approximation procedure, AIIE Transacions, 5, 1–6 (1973)

[5] Morris, J.G., Convergence of the Weiszfeld algorithm for Weber problems using a generalized distance function, Oper. Res., 29, 37–48 (1981)

[6] Morris, J.G., Verdini, W.A., A simple iterative scheme for solving minisum facility location problems involving lp distances, Oper. Res., 27, 1180–1188 (1979)

[7] Iyigun, C., Ben-Israel, A., A generalized weiszfeld method for the multi-facility location problem, Oper. Res. Lett., 38, 207–214 (2010)

[8] Francis, R., McGinnis, L.F. Jr., White, J.A., Facility Layout and Location: An Analytical Approach, Prentice Hall (1992)

[9] Love, R.F., Morris, J.G., Wesolowsky, G.O., Facility Location: Models and Methods, North Holland. (1988)

[10] Wang, H. L., Wu, B. Y., & Chao, K. M., The backup 2-center and backup 2-median problems on trees. Networks, 53, 39-49 (2009)

[11] Snyder, L. V., and Daskin, M. S., Reliability models for facility location: The expected failure cost case, Trans. Sci., 39, 400-416 (2005)

[12] Cheng, Y. K., Kang, L. Y., and Yan, H., The backup 2-median problem on block graphs, Opt. Meth. and Soft., 164, 309-320 (2014)

[13] Fathali, J., Backup multifacility location problem with l_p norm, OPSEARCH, 52, 382-391 (2014)

[۱۴] مدبر، ل.، علیزاده، ب.، باروقی، ف.، الگوریتم‌های بهینه برای مدل‌های مکانیابی ۲- مرکز ناخوشایند پشتیبان روی گراف‌های درختی، تحقیق در عملیات در کاربردهای آن، ۱۳ (۲)، ۶۹-۸۳ (۱۳۹۵)

[15] Fathali, J., Zaferanieh, M., and Nezakati, A., A BSSS algorithm for the location problem with minimum square error, Advances in Operations Research, Volume 2009, Article ID 212040, 10 pages (2009)

[16] Jamalian, A., and Fathali, J., Linear programming for the location problem with minimum absolute error, World Applied Sciences Journal, 7, 1423-1427 (2009)

[17] Fathali, J., Jamalian, A., Efficient methods for goal square Weber location problem, Iranian Journal of Numerical Analysis and Optimization, 7, 65-82 (2017)

www.SID.ir

Archive of SID

www.SID.ir