دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال پنجم، شماره بیست و یکم، آذر و دی ۱۳۹۸
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

پژوهش‌های نوین در ریاضی

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

طیف گراف‌های ابرستاره و گراف‌های یالی آن‌ها

فتانه کریمی[۱]، سید مرتضی میرافضل[۲*]

[(۱و۲)] گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه لرستان، خرم‌آباد، لرستان، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۸/۰۱/۲۰   تاریخ پذیرش مقاله: ۹۸/۰۵/۰۲

چکیده

فرض کنید $n \geq 1$، عددی صحیح باشد. گراف ابرمکعب Q_n گرافی است با مجموعه رئوس $\{0,1\}^n$، که در آن دو n – تایی باهم مجاور هستند اگر و تنها اگر در یک درآیه باهم اختلاف داشته باشند. در گراف Q_n، لایه kاُم را با L_k نشان می‌دهیم که مجموعه رئوسی است با دقیقا k درآیه 1، به‌عبارت دیگر رئوسی با وزن k، که در آن $1 \leq k \leq n$ است. برای هر $k \in \{1,\ldots,n-1\}$، گراف ابرستاره $B(n,k)$ زیرگرافی از Q_n است که توسط دو لایه L_k و L_{k+1} القا می‌شود. در این مقاله، ما قصد داریم طیف گراف ابرستاره $B(n,k)$ و $L(B(n,k))$ را به‌طور کامل مشخص کنیم، که در آن $L(B(n,k))$ نشان دهنده گراف یالی $B(n,k)$ است. به‌ویژه نشان خواهیم داد که گراف $L(B(n,k))$ یک گراف صحیح است، یعنی گرافی است که تمام مقادیر ویژه آن اعداد صحیح هستند.

واژه‌های کلیدی: ابرمکعب، گراف ابرستاره، طیف، گراف یالی، گراف صحیح.

*. عهده‌دار مکاتبات:
Email:morteza_mirafzal@yahoo.com, mirafzal.m@lu.ac.ir

۱- مقدمه و تعاریف اولیه

در این مقاله منظور از گراف $\Gamma(V,E)$، گرافی است ساده و بدون جهت، که در آن $V=V(\Gamma)$ نشان دهنده مجموعه‌ی رئوس و $E=E(\Gamma)$ نشان دهنده مجموعه‌ی یال‌های Γ است. برای تمامی اصطلاحات و تعاریفی که در این‌جا ذکر نشده است، خواننده علاقمند می‌تواند به منابع [۷،۳،۲] مراجعه نماید. فرض کنید $n \geq 1$، یک عدد صحیح است. ابرمکعب با بعد n را با Q_n نشان می‌دهیم که گرافی است با مجموعه رئوس $\{0,1\}^n$، مجموعه‌ی همه n-تایی‌هایی متشکل از 0 و 1، که در آن دو n- تایی مجاورهستند اگر و تنها اگر در یک درآیه با هم اختلاف داشته باشند. در گراف Q_n، لایه‌ی L_k مجموعه‌ی رئوسی است که دقیقا k درآیه 1 دارند. به‌عبارت دیگر، مجموعه‌ی رئوسی با وزن k، که در آن $1\leq k\leq n$. زیرگرافی از Q_n که توسط لایه‌های L_k و L_{k+1} القا می‌شود را با $Q_n(k)$ نشان می‌دهیم. اگر $n=2k-1$، آن‌گاه گراف $Q_n(k-1)$ را مکعب میانی یا گراف ابرستاره منظم می‌نامند و با $HS(2k,k)$ نیز نمایش می‌دهند [۱۰،۱۱]. گراف ابرستاره منظم $Q_{2k-1}(k-1)= HS(2k,k)$ توسط پژوهشگران گوناگونی ازجنبه‌های متفاوتی مورد مطالعه قرارگرفته است [۱۰،۱۱]. در شکل ۱، تصویری از گراف $Q_5(2)=HS(6,3)$ را مشاهده می‌نمایید. توجه شود که در این شکل مجموعه $\{i,j,k\}(\{i,j\})$ با نماد $ijk(ij)$ نشان داده شده است.

گراف Q_n را می‌توان از جنبه دیگری نیز در نظر گرفت. مشبکه بولی BL_n برای $n\geq1$، گرافی است با مجموعه رئوسی که شامل تمام زیرمجموعه‌های n عضوی مجموعه‌ی $[n]=\{1,\ldots,n\}$ است و در آن دو رأس x و y مجاورند اگر و تنها اگر تفاضل متقارن آن‌ها دقیقاً یک عضو داشته باشد. درگراف BL_n، لایه L_k مجموعه تمام زیرمجموعه‌های k-عضوی از مجموعه $[n]$ است. در ادامه، زیرگراف القایی از گراف BL_n توسط لایه‌های L_k و L_{k+1} را با نماد $BL_n(k,k+1)$ نشان می‌دهیم. توجه داشته باشید که اگر A زیرمجموعه‌ای از $[n]$ باشد، آن‌گاه تابع مشخصه A تابع $\chi_A:[n]\to\{0,1\}$ با ضابطه

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1 & x\in A\\ 0 & x\notin A\end{cases}$$

است. حال می‌توان نشان داد که نگاشت

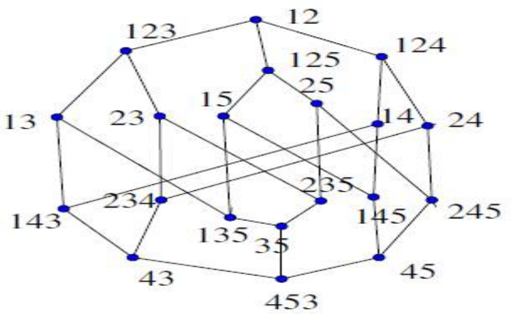
$$\chi: V(BL_n)\to V(Q_n)$$

با ضابطه‌ی $\chi(A)=\chi_A$، یک یک‌ریختی گراف‌ها است و نتیجه می‌گیریم که گراف Q_n با گراف BL_n یک‌ریخت است، که این یک‌ریختی یک یک‌ریختی بین $BL_n(k,k+1)$ و $Q_n(k)$ القا می‌کند. به این دلیل در ادامه، گراف $BL_n(k,k+1)$ را در نظر گرفته و روی آن مطالعه خواهیم کرد. همچنین به منظور خلاصه‌نویسی از نماد $B(n,k)$ برای $BL_n(k,k+1)$ استفاده خواهیم کرد.

می‌دانیم $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$، که از این‌جا می‌توان اثبات کرد:

$$B(n,n-k-1)\cong B(n,k)$$

و از این‌رو در ادامه فرض می‌کنیم $k<n/2$.



شکل ۱: گراف ابر ستاره HS(6,3)

فرض کنید Γ یک گراف ساده و متناهی باشد. ماتریس مجاورت گراف Γ را معمولاً با A نشان می‌دهیم که سطر و ستون‌های آن توسط مجموعه رئوس Γ اندیس‌گذاری می‌شود و درآیه‌های آن از مجموعه‌ی دو عضوی $\{0,1\}$ انتخاب می‌شوند. فرض کنید x و y دو رأس دلخواه Γ باشند، آن‌گاه A_{xy}، درآیه‌ی xyاُم ماتریس A، برابر 1 است هرگاه x با y مجاور باشد و در غیر این‌صورت $A_{xy}=0$. مقادیر ویژه و در نتیجه طیف گراف Γ، همان مقادیر ویژه و طیف ماتریس مجاورت A هستند. مطالعه بین ساختارهای گراف‌ها (ازجمله ساختارهای هندسی و توپولوژیکی) و مقادیر ویژه گراف‌ها، در قلب نظریه گراف جا دارد و به‌صورت کامل در منابع متفاوتی این مطالعات صورت گرفته است. محققینی که علاقمند به استفاده از نظریه طیف گراف‌ها هستند، باید با هر دو شاخه نظریه گراف و جبرخطی، ازجمله مقادیر ویژه، بردارهای ویژه، دترمینان‌ها و مواردی از این قبیل آشنا باشند. کتاب‌ها و منابع بسیاری برای مطالعه در این شاخه از نظریه گراف موجود است که به‌عنوان مثال می‌توان به منابع [۵،۴،۱] مراجعه نمود.

در این مقاله، در مورد برخی خواص جبری گراف و گراف یالی آن تحقیق خواهیم کرد. به‌ویژه طیف این گراف‌ها را به‌طور کامل مورد بررسی قرار خواهیم داد.

فرض کنید $n,k\in\mathbb{N}$، $k\le\frac{n}{2}$ و $[n]=\{1,\dots,n\}$. گراف جانسون $J(n,k)$ گرافی است با مجموعه رئوس

$V=\{v \mid v\subset[n],|v|=k\}$،

که در آن دو رأس v و w مجاورند اگر و تنها اگر $|v\cap w|=k-1$.

به سادگی می‌توان مشاهده نمود که گراف $J(n,k)$ انتقالی – رأسی است [۷].

۲- برخی خواص گراف B(n,k)

گراف $B(n,k)$ دارای ویژگی‌های جبری جالبی است که بعضی از آن‌ها در ادامه آورده شده است.

گزاره ۲-۱: [۱۲،۱۱،۱۰] گراف $B(n,k)$ یک گراف دوبخشی و همبند است.

گزاره ۲-۲: [۱۲،۱۱،۱۰] فرض کنید قطر گراف $B(n,k)$ برابر D باشد، اگر $n\neq 2k+1$، آن‌گاه $D=2(k+1)=2k+2$ و اگر $n=2k+1$، آن‌گاه $D=2k+1$.

گزاره ۲-۳: [۱۰،۱۱،۱۲] اگر $\Gamma=B(n,k)$، آن‌گاه Γ گرافی انتقالی-یالی است، به‌علاوه اگر $n=2k+1$، آنگاه Γ انتقالی-راسی هم هست.

از گزاره (۲-۳) نتیجه می‌گیریم که مکعب میانی $B(2k+1,k)$ یک گراف انتقالی-یالی و انتقالی-راسی است، اما در حقیقت مطالب بیشتری در مورد این گراف می‌توان بیان نمود. گراف Γ را متقارن (یا انتقالی-کمانی) گوییم، اگر برای تمام رئوس u,v,x,y در Γ، در حالتی که u با v و x با y مجاور باشد، خودریختی $\pi\in \mathrm{Aut}(\Gamma)$ موجود باشد، به‌طوریکه $\pi(u)=x$ و $\pi(v)=y$.

قضیه ۲-۱: [۱۲،۱۱،۱۰] گراف ابرستاره منظم $B(2k+1,k)$ یک گراف متقارن است.

حال از وات کینس [۱۳]، قضیه زیر را داریم.

قضیه ۲-۲: همبندی گراف ابرستاره منظم $B(2k+1,k)$ ماکزیمم حالت ممکن، یعنی $k+1$، است. که در آن $k+1$ همان درجه نظم این گراف است. برای گروه خودریختی گراف $B(n,k)$ نیز قضیه زیر را داریم.

قضیه ۲-۳: [۱۰،۱۱،۱۲] فرض کنید $n\geq 4$، $[n]=\{1,\dots,n\}$ و $1\leq k\leq n/2$. همچنین فرض کنید $\Gamma=B(n,k)$ گرافی با مجموعه رئوس

$$V=\{v\mid v\subset[n],\ |v|\in\{k,k+1\}\}$$

و مجموعه‌ی یال‌های

$$E=\{\{v,w\}\mid v,w\in V, v\subset w \text{ or } w\subset v\}$$

باشد. اگر Γ منظم نباشد (یعنی $n\neq 2k+1$) آن‌گاه

$$\mathrm{Aut}(\Gamma)\cong \mathrm{Sym}([n])$$

و اگر Γ منظم باشد (یعنی $n=2k+1$)، آن‌گاه
$\mathrm{Aut}(\Gamma)\cong \mathrm{Sym}([n])\times\mathbb{Z}_2$،

که در آن $\mathbb{Z}_2$ گروه دوری از مرتبه 2 است.

۳- نتایج اصلی

تعریف ۳-۱: فرض کنید $n\geq 3$ یک عدد صحیح، $[n]=\{1,\ldots,n\}$ و همچنین k یک عدد صحیح باشد، بطوریکه $1\leq k\leq n/2$. گراف $B(n,k)$ گرافی است با مجموعه رئوس

$$V=\{v\mid v\subset[n],\ |v|\in\{k,k+1\}\}$$

و مجموعه یال‌های

$$E=\{\{v,w\}\mid v,w\in V, v\subset w \text{ or } w\subset v\}$$

به سادگی می‌توان مشاهده نمود که $B(3,1)$ همان دور از مرتبه 6، یعنی C_6، است. در شکل ۲ تصویری از $B(5,1)$ درصفحه را داریم. توجه داشته باشید که در شکل ۲، $i=\{i\}$ و $ij=\{i,j\}$ است.

از تعریف (۳-۱) به‌آسانی نتیجه می‌شود که اگر v رأسی در $B(n,k)$ با اندازه k (به‌عنوان یک مجموعه) باشد، آن‌گاه $\deg(v)=n-k$ و اگر v رأسی با اندازه $k+1$ باشد، آن‌گاه $\deg(v)=k+1$.

حال واضح است که گراف $B(n,k)$ یک گراف منظم است اگر وتنها اگر $n=2k+1$. همچنین گراف $\Gamma=B(n,k)$ یک گراف دوبخشی است و داریم

$$V(\Gamma)=V_1\cup V_2$$

که در آن

$$*\ \begin{cases} V_1=\{v\mid v\subset[n],|v|=k+1\} \\ V_2=\{v\mid v\subset[n]\ ,|v|=k\} \end{cases}$$

در ادامه، طیف گراف $B(n,k)$ را مشخص خواهیم کرد.

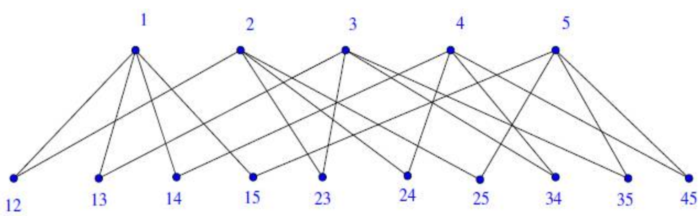
قضیه ۳-۱: فرض کنید $n>3$ و $1\leq k<\frac{n}{2}$. آن‌گاه $\Gamma=B(n,k)$ دارای مقادیر ویژه مجزای λ_i برای $0\leq i\leq k+1$ است، که در آن

$$\lambda_i=\pm\sqrt{(n-k-i)(k-i+1)}\quad (**)$$

به‌علاوه هر λ_i دارای چندگانگی

$$\binom{n}{i}-\binom{n}{i-1}$$

است (که به طورقراردادی داریم $\binom{n}{-1}=0$).



شکل ۲: B(5,1)

برهان: فرض کنید A ماتریس مجاورت گراف Γ باشد. درگام اول، طیف ماتریس A^2 را مشخص می‌کنیم. فرض کنید $(A^2)_{vw}$ درآیه واقع در سطر vاُم و ستون wاُم ماتریس A^2 باشد. توجه کنید که $(A^2)_{vw}$ برابر تعداد گشت‌های به طول دو بین دو رأس v و w است. فرض کنید V_1 و V_2 مجموعه‌هایی باشند که در (*) دیدیم.
حال دو حالت زیر را داریم:
۱) اگر $v=w$، آن‌گاه $(A^2)_{vw}$ تعداد همسایه‌های v است و بنابراین داریم:

$$\left(A^2\right)_{vv} = \begin{cases} k+1 & v \in V_1 \\ n-k & v \in V_2 \end{cases}$$

۲) فرض کنید $v \neq w$، و $p{:}vuw$ یک مسیر به‌طول دو در گراف Γ باشد. چون $u \in N_\Gamma(v)$، پس $(u \in V_1)u \in V_2$ و بنابراین $(w \in V_2)w \in V_1$. به‌عبارت دیگر، هیچ مسیری به طول دو بین یک جفت از رئوس در دو بلوک مجزا از مجموعه‌ی رئوس گراف Γ وجود ندارد. بنابراین اگر $(v \in V_2)v \in V_1$ و $(w \in V_1)w \in V_2$ آن‌گاه داریم $(A^2)_{vw}=0$.

۳) فرض کنید $v = \{x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}\} \in V_1$ و $P{:}vuw$ مسیری به‌طول دو درگراف Γ باشد. بدون ازدست دادن کلیت مسئله، می‌توان فرض کرد که
$u = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$

چون u با w مجاور است و $v \neq w$، پس $y \in [n]-v$ موجود است به‌طوری که
$w = \{x_1, x_2, \ldots, x_k, y\}$

بنابراین $|v \cap w| = k$. همچنین، اگر $|v \cap w| = k$، آن‌گاه به‌وضوح یک مسیر به طول دو بین v و w موجود است. بنابراین می‌توان گفت:
یک مسیر به طول دو بین دو رأس موجوداست، اگر و تنها اگر داشته باشیم $|v \cap w| = k$.
حال $v, w \in V_1$ را به عنوان رئوس گراف جانسون $J(n,k+1)$ با مجموعه‌ی رئوس V_1 در نظر می‌گیریم. بنابراین یک مسیر به‌طول دو بین رئوس v و w، به‌عنوان رئوس Γ، موجود است، اگر و تنها اگر v و w به‌عنوان رئوس گراف جانسون $J(n,k+1)$ مجاور باشند.
فرض کنید J_1 ماتریس مجاورت گراف $J(n,k+1)$ باشد، آن‌گاه $(J_1)_{vw} = 1$ اگر و تنها اگر $(A^2)_{vw}=1$، که در آن $v, w \in V_1$ و $v \neq w$.

۴) حال $v, w \in V_2$ را به‌عنوان رئوس گراف جانسون $J(n,k)$ با مجموعه‌ی رئوس V_2 در نظر می‌گیریم. با توجه به آنچه که در (۳) مشاهده کردیم، حقیقت زیر را داریم؛
یک مسیر به‌طول دو درگراف Γ بین دو رأس v,w موجود است اگر و تنها اگر $|v \cap w| = k-1$. بنابراین، مسیر به‌طول دو بین v و w در Γ موجود است اگر و تنها اگر v و w به‌عنوان رئوس $J(n,k)$ مجاور باشند. فرض کنید J_2 ماتریس مجاورت گراف جانسون $J(n,k)$ باشد. آن‌گاه $(J_2)_{vw}=1$ اگر و تنها اگر $(A^2)_{vw} = 1$، که در آن $v, w \in V_2$ و $w \neq v$.
با توجه به موارد بالا نتیجه می‌گیریم،

$$A^2 = \begin{bmatrix} (k+1)I_a + J_1 & 0 \\ 0 & (n-k)I_b + J_2 \end{bmatrix}،$$

که در آن $a=\binom{n}{k+1}$ و $b=\binom{n}{k}$. حال می‌توان ملاحظه کرد که چندجمله‌ای مشخصه A^2، یعنی $\chi(A^2)$، به صورت زیر است؛

$$\begin{aligned} \chi\left(A^2\right) &= \det\left(\lambda I - A^2\right) \\ &= \det\left(\lambda I_a - (k+1)I_a - J_1\right) \times \\ &\det\left(\lambda I_b - (n-k)I_b - J_2\right) \end{aligned}$$

از طرف دیگر، فرض کنید $s \leq n/2$ یک عدد صحیح باشد، آن‌گاه از [۴،۵] می‌دانیم که $(s-i)(n-s-i)$ برای $i=0,\ldots,s$، مقادیر ویژه مجزای گراف جانسون $J(n,s)$ با چندگانگی‌های $\binom{n}{i}-\binom{n}{i-1}$ هستند. اکنون برای هر مقدار ویژه λ از ماتریس A^2 داریم؛

$$\begin{aligned} \lambda &= (k+1)+(k+1-i)(n-k-1-i)-i \\ &= (k+1)(n-k-i-1+1)-i(n-k-i-1+1) \\ &= (k+1-i)(n-k-i), \quad i=0,\ldots,k+1 \end{aligned} \qquad (۳-۱)$$

و یا

$$\begin{aligned}\lambda &= (n-k)+(k-i)(n-k-i)-i \\ &= (n-k)(k-i+1)-i(k-i+1) \\ &= (k-i+1)(n-k-i), \quad i=0,\dots,k\end{aligned} \tag{۳-۲}$$

که در هر دو حالت، برای هر i، چندگانگی مقدار ویژه λ برابر $\binom{n}{i}-\binom{n}{i-1}$ است. بنابراین، برای

$$\lambda_i = (n-k-i)(k-i+1) \qquad ,i=0,\dots,k$$

و $\lambda_{k+1}=0$ مقادیر ویژه مجزای A^2 با چندگانگی‌های به‌ترتیب، $2\left(\binom{n}{i}-\binom{n}{i-1}\right)$ و $\binom{n}{k+1}-\binom{n}{k}$ هستند. چون مقادیر ویژه مجزای A^2، توان‌های دوم مقادیر ویژه A هستند و B(n,k)، یک گراف دوبخشی است، پس برای مقادیر ویژه Γ=B(n,k) داریم:

$$\lambda_i = \pm\sqrt{(n-k-i)(k-i+1)},\ i=0,\dots,k+1$$

که برای هر i، λ_i دارای چندگانگی $\binom{n}{i}-\binom{n}{i-1}$ است. (که به صورت قراردادی داریم $\binom{n}{-1}=0$).
اگر n=2k+1، آن‌گاه قضیه (۳-۱) برای گراف مکعب میانی Γ=B(n,k) به صورت زیر خواهد بود.

نتیجه ۳-۱: فرض کنید n=2k+1. آن‌گاه مقادیر ویژه مکعب میانی B(n,k)=B(2k+1, k) برابر ±(k+1-i) است، که چندگانگی آن‌ها نیز برای هر i=0,…,k+1 برابر

$$\binom{n}{i}-\binom{n}{i-1}$$

است. بنابراین تمامی مقادیر ویژه B(n,k)، صحیح خواهند بود.
فرض کنید Γ یک گراف باشد، گراف یالی Γ را با $L(\Gamma)$ نشان می‌دهیم که گرافی است با مجموعه رئوس برابر با مجموعه یال‌های Γ، که در آن دو رأس در $L(\Gamma)$ با هم مجاورند اگر و تنها اگر یال‌های متناظر در Γ دارای یک رأس مشترک باشند. گراف یالی L(B(n,k)) دارای خواص جالبی است. به‌عنوان مثال، فرض کنید n,k اعدادی فرد باشند، آن‌گاه L(B(n,k)) یک گراف همیلتنی است. درحقیقت اگر v رأسی درگراف B(n,k) باشد، آن‌گاه $\deg(v)\in\{k+1,\ n-k\}$، بنابراین اگر n و k هر دو فرد باشند آن‌گاه درجه هر رأس در گراف B(n,k) زوج است و از این‌رو B(n,k) اویلری است[۳]. در نتیجه، در این حالت گراف L(B(n,k)) یک گراف همیلتنی است. بنابراین، نتیجه زیر را داریم:

نتیجه ۳-۲: اگر n , k اعداد صحیح فرد باشند، آن‌گاه گراف L(B(n,k)) یک گراف همیلتنی است.
ازگزاره (۲-۳) می‌دانیم که گراف L(B(n,k)) یک گراف انتقالی-رأسی است. در این حالت، حدس معروفی در نظریه گراف موجود است که بیان می‌کند، تقریبا تمام گراف‌های همبند انتقالی-رأسی، همیلتنی هستند[۹]. حال با استفاده از این حدس و نتیجه (۳-۲) به نظر می‌رسد که حدس زیر درست باشد.

حدس: گراف یالی B(n,k)، یعنی گراف L(B(n,k))، یک گراف همیلتنی است.
در ادامه طیف گراف L(B(n,k)) را مشخص خواهیم کرد. برای این کار به لم زیر نیاز داریم که می‌توان برهان آن‌را در [۱،۵] مشاهده نمود.

لم۳-۱: اگر Γ یک گراف نیم‌منظم دوبخشی با پارامترهای (n_1, n_2, r_1, r_2) باشد، به‌طوریکه $n_1 \geq n_2$ و $\lambda_1\geq\dots\geq\lambda_{n_2}$، n_2 مقادیر ویژه بزرگتر Γ باشند، آن‌گاه

$$\begin{aligned}&\chi_{L(\Gamma)}(x) = (x-r_1-r_2+2) \\ &(x-r_1+2)^{n_1-n_2}(x+2)^{n_1r_1-n_1-n_2+1} \\ &\prod_{i=2}^{n_2}((x-r_1+2)(x-r_2+2)-\lambda_i^{\,2})\end{aligned} \tag{۳-۳}$$

که در آن $\chi_{L(\Gamma)}(x)$ چند جمله‌ای مشخصه گراف $L(\Gamma)$ است.

قضیه ۳-۲: فرض کنید $n\geq4$ و $k<n/2$ و همچنین $L(B(n,k))$ گراف یالی، گراف ابرستاره $B(n,k)$ است. آن‌گاه $n-1$، $n-i-1$، $k-1$، $i-2$ و -2 مقادیر ویژه گراف $L(B(n,k))$ با چندگانگی‌های به‌ترتیب برابر 1، $\binom{n}{i}-\binom{n}{i-1}$، $\binom{n}{k+1}-\binom{n}{k}$، $\binom{n}{i}-\binom{n}{i-1}$ و $k\binom{n}{k+1}-\binom{n}{k}+1$، برای $1\leq i\leq k$ هستند.

برهان: توجه داشته باشید که $B(n,k)$ یک گراف دو بخشی نیم‌منظم با پارامترهای $r_2=n-k$، $r_1=k+1$، $n_2=\binom{n}{k}$ و $n_1=\binom{n}{k+1}$ است. همچنین می‌دانیم که اگر $a_i=\binom{n}{i}-\binom{n}{i-1}$، آنگاه

$$\sum_{i=1}^{k} a_i = \binom{n}{k} = n_2$$

بنابراین در قضیه (۳-۱) رابطه‌ی (**)، هنگامی که اندیس i بین 0 تا k تغییر می کند، n_2 مقدار ویژه بزرگتر $B(n,k)$ را خواهیم داشت. حال از لم (۳-۱) نتایج زیر را داریم:

۱) $x-(n-k)-(k+1)+2=0$، بنابراین $x=n-1$. از این‌رو، $n-1$ یک مقدار ویژه $L(B(n,k))$ با چندگانگی 1 است.

۲) $(x+2)^{n_1r_1-n_1-n_2+1}=0$، بنابراین $x=-2$. از این‌رو -2 یک مقدار ویژه $L(B(n,k))$ با چندگانگی $k\binom{n}{k+1}-\binom{n}{k}+1$ است.

۳) $\left(x-(k+1)+2\right)^{n_1-n_2}=0$، بنابراین $x=k-1$، از این‌رو $k-1$ یک مقدار ویژه $L(B(n,k))$ با چندگانگی $n_1-n_2=\binom{n}{k+1}-\binom{n}{k}$ است.

۴) در نهایت با استفاده از لم (۳-۱)، مقادیر ویژه دیگر $L(B(n,k))$، ریشه‌های معادله‌های درجه دوم زیر هستند:

$$\left(x-(n-k-2)\right)\times \left(x-(k-1)\right)-\lambda_i^2=0; \quad i=1,\ldots,k \qquad (۳-۴)$$

(توجه داشته باشید که $\lambda_0^2=(n-k)(k+1)$ که در آن $\lambda_i^2=(n-k-i)(k-i+1)$.

همچنین از قضیه (۳-۱) می‌دانیم که چندگانگی ریشه‌های هر معادله در رابطه (۳-۴) برابر $\binom{n}{i}-\binom{n}{i-1}$ است. حال می‌توانیم هر یک از معادلات در (۳- ۴) را با استفاده از نرم افزارهای مناسب مانند wolfarm mathematica [۱۴] حل کنیم. با استفاده از نرم افزار یاد شده داریم:

```
In[1]: Solve [(x-(n-k-2))(x-(k-1))-(n-k-i)
(k-i+1)=0 , x]
Out[1]={{x →-2+i} ,{x →-1-i+n}}
```

بنابراین برای هر $1\leq i\leq k$، اعداد صحیح $x=i-2$ و $x=n-i-1$، ریشه‌های معادله‌ی (۳-۴) هستند. از این‌رو، این اعداد صحیح مقادیر ویژه باقی‌مانده گراف $L(B(n,k))$ با چندگانگی‌های $\binom{n}{i}-\binom{n}{i-1}$ هستند.

گراف Γ را یک گراف صحیح می‌نامیم هرگاه تمام مقادیر ویژه آن اعداد صحیح باشند. مفهوم گراف صحیح ابتدا توسط هرری و شوانک در سال ۱۹۷۴ در منبع [۸] معرفی گردید. در حالت کلی، مسئله مشخص کردن گراف‌های صحیح یک مسئله دشوار و پیچیده به‌نظر می-رسد. در این مورد، پژوهش‌های زیادی صورت گرفته است که به‌عنوان مثال می‌توان به منبع [۶] مراجعه نمود. حال ازقضیه (۳-۲) نتیجه می‌گیریم که گراف یالی گراف ابرستاره $B(n,k)$، یعنی $L(B(n,k))$، یک گراف صحیح است.

نتیجه‌گیری

در این مقاله، طیف گراف $B(n,k)$ و همچنین گراف یالی آن، یعنی $L(B(n,k))$ را مشخص نمودیم. در نتیجه (۳-۱) مشاهده کردیم که گراف $B(2k+1,k)$ یک گراف صحیح است. همچنین بااستفاده از قضیه (۳-۲) طیف گراف $L(B(n,k))$ را برای $n\geq4$ مشخص کرده و نتیجه گرفتیم که این گراف‌ها نیز گراف‌هایی صحیح هستند.

فهرست منابع

[1] R. B. Bapat. Graphs and Matrices. Springer–verlag, London (2010).

[2] N. L. Biggs. Algebraic Graph Theory (Second edition). Cambridge Mathematical Library (Cambridge University Press, Cambridge) (1993).

[3] J. A. Bondy, U. S. R. Murty. Graph Theory. Springer Verlage (2008).

[4] A. E. Brouwer, W. H. Haemers. Spectra of Graphs. Springer Verlage (2012).

[5] D. Cvetkovic, P. Rowlinson, S. Simic. An introduction to the theory of graph spectra. Cambridge University Press (2010).

[6] D. Cvetkovic, Z. Rodosavljevic, S. K. Simic. A survey on integral graphs. Univ. Beograde, Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. 15 (2004).

[7] C. Godsil, G. Royle. Algebraic Graph Theory. Springer Verlage (2001).

[8] F. Harary, A. J. Schwenk. Which graphs have integral spectra? In Graphs and Combinatorics, (eds. R. Bari and F. Harary), (Proc. Capital Conf., George Washington Univ., Washington, D.C., 1973) Lecture Notes in Mathematics 406, Springer-Verlag, Berlin 45-51, (1974).

[9] L. Lovasz. Problem 11 in: Combinatorial structures and their applications. (Proc. Calgary Internat. Conf, Calgary, Alberta, 1969), Gordon and Breach, New York 243-246 (1970).

[10] S. M. Mirafzal. On the automorphism groups of regular hyperstars and folded hyperstars. Ars Comb. 123, 75-86 (2015).

[11] S. M. Mirafzal. The automorphism group of the bipartite Kneser graph. Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. 129 no. 3, Art. 34, 8 pp (2019).

[12] S. M. Mirafzal. Cayley properties of the line graphs induced by consecutive layers of the hypercube. Arxive: 1711. 02701v3, submitted.

[13] M. Watkins. Connectivity of transitive graphs. J. Combin. Theory 8: 23-29 (1970).

[14] S. Wolfram, Wolfram Mathematica 8.