دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال پنجم، شماره بیست و دوم، بهمن و اسفند ۱۳۹۸
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
پژوهش‌های نوین در ریاضی

تخمین‌هایی برای نرم اساسی عملگرهای ترکیبی وزن‌دار تعمیم‌یافته بتوی فضاهای از نوع وزن‌دار

امیرحسین صنعت‌پور[۱*]، مصطفی حسنلو[۲]

(۱) دانشگاه خوارزمی، تهران، ایران
(۲) دانشگاه ارومیه، ارومیه، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۷/۰۸/۲۹ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۸/۰۹/۳۰

چکیده

عملگرهای ترکیبی وزن‌دار در مطالعه سیستم‌های دینامیکی و مشخص‌سازی عملگرهای طولپا روی بسیاری از فضاهای باناخ ظاهر می‌شوند. از مهمترین تعمیم‌های عملگرهای ترکیبی وزن‌دار، عملگرهای ترکیبی وزن‌دار تعمیم‌یافته هستند که با تغییر پارامترهای تولیدکننده آنها می‌توان دسته‌های متفاوتی از عملگرهای شناخته‌شده را بدست آورد، از جمله: عملگرهای ترکیبی وزن‌دار، عملگرهای ترکیبی، عملگرهای ضربی و عملگرهای ترکیبی همراه‌شونده با عملگر مشتق. در این مقاله عملگرهای ترکیبی وزن‌دار تعمیم‌یافته را مورد مطالعه و بررسی قرار می‌دهیم و تخمین‌هایی را برای نرم اساسی این عملگرها از برخی فضاهای توابع تحلیلی بتوی فضاهای از نوع وزن‌دار ارائه می‌کنیم. فضاهای توابع تحلیلی مورد نظر شامل فضاهای بلاخ، فضاهای زیگموند و فضاهای از نوع وزن‌دار هستند. تخمین‌های بدست آمده برای نرم‌های اساسی عملگرهای ترکیبی وزن‌دار تعمیم‌یافته، منجر به شرایطی لازم و کافی برای فشردگی این عملگرها می‌گردند. همچنین به‌عنوان کاربردی دیگر از این نتایج، تخمین‌هایی از نرم اساسی برخی عملگرهای خاص و شناخته‌شده دیگر را نیز بدست می‌آوریم.

واژه‌های کلیدی: عملگرهای ترکیبی وزن‌دار تعمیم‌یافته، فضاهای از نوع وزن‌دار، فضاهای بلاخ، فضاهای زیگموند، نرم اساسی.

*. عهده‌دار مکاتبات: Email: a_sanatpour@khu.ac.ir, a.sanatpour@gmail.com

۱- مقدمه

فرض کنیم $\mathbb{D}$ گوی واحد باز در صفحه مختلط و $H(\mathbb{D})$ فضای همه توابع تحلیلی روی $\mathbb{D}$ باشد. با مفروض بودن خودنگاشت تحلیلی $\varphi:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$، عملگر ترکیبی C_φ با ضابطه

$$C_\varphi f = f\circ\varphi,$$

به ازای هر $f\in H(\mathbb{D})$ تعریف می‌شود. عملگر ترکیبی وزن‌دار uC_φ طبیعی‌ترین تعمیم عملگر ترکیبی C_φ است که با مفروض بودن تابع وزن $u\in H(\mathbb{D})$ با ضابطه

$$uC_\varphi f = u\cdot(f\circ\varphi),$$

به ازای هر $f\in H(\mathbb{D})$ تعریف می‌شود. درحالتی‌که تابع وزن $u\in H(\mathbb{D})$، تابع ثابت $u=1$ باشد، عملگر ترکیبی وزن‌دار uC_φ به عملگر ترکیبی C_φ تبدیل می‌شود. همچنین در حالت خاصی که خودنگاشت φ را تابع همانی $\varphi(z)=z$ قرار دهیم، عملگر ترکیبی وزن‌دار uC_φ به عملگر ضربی M_u تبدیل می‌شود که در آن

$$M_u f = u\cdot f,$$

به ازای هر $f\in H(\mathbb{D})$ تعریف می‌شود. می‌توان یکی از منشأهای اصلی ظهور عملگرهای ترکیبی وزن‌دار را مطالعه سیستم‌های دینامیکی دانست. همچنین این نوع عملگرها در مشخص‌سازی عملگرهای طولپا روی بسیاری از فضاهای باناخ نیز کاربرد دارند. اطلاعات کلی درباره عملگرهای ترکیبی را می‌توان در کتاب‌های [۱و۲] یافت. انواع خواص عملگری این نوع عملگرها روی دسته‌های متفاوتی از فضاهای باناخ، موضوع تحقیق بسیاری از ریاضیدان‌ها بوده است و همچنین تعمیم‌های بسیاری از این نوع عملگرها مطرح و خواص عملگری آنها توسط بسیاری از ریاضیدان‌ها مورد مطالعه و بررسی قرار گرفته است. عملگرهای ترکیبی وزن‌دار تعمیم‌یافته از جمله مهمترین تعمیم‌های عملگرهای ترکیبی وزن‌دار هستند. با مفروض بودن خودنگاشت تحلیلی $\varphi:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ و تابع وزن $u\in H(\mathbb{D})$ و $k\in\mathbb{N}_0$، عملگر ترکیبی وزن‌دار تعمیم‌یافته $D^k_{\varphi,u}$ با ضابطه

$$D^k_{\varphi,u} f = u\cdot(f^{(k)}\circ\varphi),$$

به ازای هر $f\in H(\mathbb{D})$ تعریف می‌شود. در حالت خاصی که در عملگر ترکیبی وزن‌دار تعمیم‌یافته $D^k_{\varphi,u}$ قرار دهیم $k=0$، عملگر ترکیبی وزن‌دار uC_φ حاصل خواهد شد، بعبارت دیگر

$$D^0_{\varphi,u} = uC_\varphi.$$

عملگرهای ترکیبی وزن‌دار تعمیم‌یافته در حالت‌های خاص دیگری از φ و u و k، به عملگرهای شناخته شده دیگری نیز تبدیل می‌شوند که در بخش ۴ این مقاله به برخی از آنها اشاره خواهیم کرد. بنابراین مطالعه عملگرهای ترکیبی وزن‌دار تعمیم‌یافته، به‌عنوان تعمیم دسته وسیعی از عملگرهای شناخته شده، از اهمیت خاصی برخوردار است و لذا موضوع تحقیق بسیاری از ریاضیدان‌ها در سال‌های اخیر بوده است. یانگ و ژو در مرجع [۳] تفاضل عملگرهای ترکیبی وزن‌دار تعمیم‌یافته را بین فضاهای از نوع وزن‌دار بررسی کردند که نتیجه آن بررسی کرانداری و فشردگی این عملگرها بود. لی و استویچ در مرجع [۴] تخمین‌هایی برای نرم اساسی این عملگرها از فضاهای بلاخ بتوی فضاهای از نوع وزن‌دار ارائه کردند. نرم اساسی عملگرهای ترکیبی وزن‌دار تعمیم‌یافته بین فضاهای زیگموند و فضاهای بلاخ و همچنین بین فضاهای زیگموند و فضاهای از نوع وزن‌دار توسط صنعت‌پور و حسنلو در مرجع [۵] بررسی شده است. برای کسب اطلاعات جامع درباره عملگرهای ترکیبی وزن‌دار تعمیم‌یافته، عملگرهای ترکیبی وزن‌دار و عملگرهای ترکیبی، بین رده‌های وسیعی از فضاهای باناخ، می‌توان مراجع [۱۷-۶] را ملاحظه نمود. در این مقاله عملگرهای ترکیبی وزن‌دار تعمیم‌یافته را روی فضاهای از نوع وزن‌دار، بلاخ و زیگموند در نظر می‌گیریم که در ادامه آنها را تعریف می‌کنیم.

فرض کنیم H^∞ فضای همه توابع تحلیلی کراندار روی $\mathbb{D}$ با نرم

$$\|f\|_\infty=\sup_{z\in\mathbb{D}}|f(z)|,$$

باشد. لم ۱-۲ از مرجع [۳] ایجاب می‌کند که برای هر $f\in H^\infty$ و $k\in\mathbb{N}$ داشته باشیم

$$\sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)^k\,|f^{(k)}(z)|\le c\|f\|_\infty, \qquad (۱)$$

که در آن c یک ثابت مثبت است. برای هر $0<\alpha<\infty$، فضای از نوع وزن‌دار H_α^∞ متشکل از تمامی توابع تحلیلی f روی $\mathbb{D}$ است به‌طوری‌که

$$\|f\|_\alpha=\sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)^\alpha\,|f(z)|<\infty.$$

عبارت بالا یک نرم روی H_α^∞ است و H_α^∞ با این نرم یک فضای باناخ است. می‌دانیم برای هر عدد صحیح مثبت k، $f\in H_\alpha^\infty$ اگر و تنها اگر $f^{(k)}\in H_{\alpha+k}^\infty$ و

$$\|f\|_\alpha\asymp\sum_{j=0}^{k-1}|f^{(j)}(0)|+\sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)^{\alpha+k}\,|f^{(k)}(z)|,$$

مرجع [۳] را ببینید. در نتیجه اگر $f\in H_\alpha^\infty$ آنگاه

$$|f^{(k)}(z)|\le\frac{\|f\|_\alpha}{(1-|z|^2)^{\alpha+k}}, \qquad (۲)$$

برای هر عدد صحیح نامنفی k و هر $z\in\mathbb{D}$.

یادآور می‌شویم که فضاهای از نوع وزن‌دار H_α^∞ را می‌توان در حالت کلی به فضاهای H_v^∞ با وزن کلی v تعمیم داد. منظور از تابع وزن v تابعی پیوسته، اکیدا مثبت و نزولی روی $[0,1)$ است که به‌صورت شعاعی $v(z)=v(|z|)$ به ازای هر $z\in\mathbb{D}$ تعریف می‌شود. با مفروض بودن تابع وزن v، فضای H_v^∞ متشکل از تمامی توابع $f\in H(\mathbb{D})$ است به‌طوری‌که

$$\|f\|_v=\sup_{z\in\mathbb{D}}v(z)\,|f(z)|<\infty.$$

با مفروض بودن تابع وزن دلخواه v، تابع وزن متناظر $\tilde{v}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\tilde{v}(z)=(\sup_{z\in\mathbb{D}}\{|f(z)|:f\in H_v^\infty,\|f\|_v\le 1\})^{-1}.$$

به ازای هر $0<\alpha<\infty$، تابع وزن

$$v_\alpha(z)=(1-|z|^2)^\alpha,$$

را وزن استاندارد گوییم. می‌دانیم برای وزن‌های استاندارد v_α داریم $v_\alpha=\tilde{v}_\alpha$.

برای هر $0<\alpha<\infty$، گوییم تابع $f\in H(\mathbb{D})$ متعلق به فضای بلاخ $\mathcal{B}_\alpha$ است هرگاه

$$\sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)^\alpha\,|f'(z)|<\infty.$$

فضای بلاخ $\mathcal{B}_\alpha$ با نرم

$$\|f\|_{\mathcal{B}_\alpha}=|f(0)|+\sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)^\alpha\,|f'(z)|,$$

یک فضای باناخ است. برای هر $0<\alpha<\infty$، فضای زیگموند $\mathcal{Z}_\alpha$ متشکل از تمامی توابع $f\in H(\mathbb{D})$ است به‌طوری‌که

$$\sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)^\alpha\,|f''(z)|<\infty.$$

فضای زیگموند $\mathcal{Z}_\alpha$ با نرم

$$\|f\|_{\mathcal{Z}_\alpha}=|f(0)|+|f'(0)|+\sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)^\alpha\,|f''(z)|,$$

یک فضای باناخ است.

با توجه به مراجع [۱۸و۱۹] می‌دانیم اگر $f\in\mathcal{B}_\alpha$ آنگاه برای هر $k\in\mathbb{N}$ و هر $z\in\mathbb{D}$ داریم

$$|f^{(k)}(z)|\le\frac{\|f\|_{\mathcal{B}_\alpha}}{(1-|z|^2)^{\alpha+k-1}}.$$

از رابطه فوق می‌توان نتیجه گرفت که برای هر $f\in\mathcal{Z}_\alpha$، $k\in\mathbb{N}$ و $z\in\mathbb{D}$ داریم

$$|f^{(k+1)}(z)|\le\frac{\|f\|_{\mathcal{Z}_\alpha}}{(1-|z|^2)^{\alpha+k}}. \qquad (۳)$$

برای عملگر T بین فضاهای باناخ A و B، نرم اساسی عملگر T که آن را با نماد $\|T\|_{e,A\to B}$ نمایش می‌دهیم برابر فاصله عملگر T از فضای همه

عملگرهای فشرده از A به B تعریف می‌شود. در این مقاله، ابتدا قضیه‌ای را برای نرم اساسی عملگرهای ترکیبی وزن‌دار تعمیم‌یافته از فضاهای زیگموند به فضاهای از نوع وزن‌دار بیان می‌کنیم. سپس تخمین‌هایی را برای نرم اساسی این عملگرها در حالت‌های

$$H^{\infty}, H_{\alpha}^{\infty}, \mathcal{B}_{\alpha}, \mathcal{Z}_{\alpha} \to H_{\beta}^{\infty}$$

پیدا می‌کنیم. به‌عنوان نتیجه، شرایطی لازم و کافی برای فشردگی این عملگرها بدست خواهند آمد. همچنین تخمین‌های بدست آمده برای نرم اساسی عملگرهای ترکیبی وزن‌دار تعمیم‌یافته را در حالت‌های خاصی از این عملگرها بیان خواهیم کرد.

یادآور می‌شویم که برای اعداد حقیقی a و b، نماد $a \prec b$ به این معنی است که ثابت مثبت c مستقل از a و b وجود دارد به‌طوری‌که $a \le cb$. همچنین نماد $a \asymp b$ به این معنی است که $a \prec b$ و $b \prec a$. در سرتاسر این مقاله، همه ثابت‌های مثبت با c نشان داده می‌شوند که ممکن است مقدار آن از موقعیتی به موقعیت دیگر متفاوت باشد.

۲- نرم اساسی عملگرها روی فضاهای زیگموند و بلاخ بتوی فضاهای از نوع وزن‌دار

قضیه زیر نرم اساسی عملگرهای ترکیبی وزن‌دار تعمیم یافته $D_{\varphi,u}^{k}:\mathcal{Z}_{\alpha}\to H_{\beta}^{\infty}$ را در حالت $k=1$ مشخص‌سازی می‌کند.

قضیه ۲-۱. [۵] فرض کنیم u و φ توابعی تحلیلی بر $\mathbb{D}$ باشند و $\varphi(\mathbb{D})\subseteq\mathbb{D}$. فرض کنیم $0<\alpha,\beta<\infty$ و عملگر $D_{\varphi,u}^{1}:\mathcal{Z}_{\alpha}\to H_{\beta}^{\infty}$ کراندار باشد. دراینصورت

(i) اگر $0<\alpha<1$، آنگاه $D_{\varphi,u}^{1}$ یک عملگر فشرده خواهد بود، یعنی نرم اساسی $D_{\varphi,u}^{1}$ در این حالت صفر خواهد بود.

(ii) اگر $\alpha=1$، آنگاه

$$\| D_{\varphi,u}^{1} \|_{e,\mathcal{Z}_{\alpha}\to H_{\beta}^{\infty}} \asymp \limsup_{|\varphi(z)|\to 1} (1-|z|^{2})^{\beta}|u(z)|\log\frac{2}{1-|\varphi(z)|^{2}}.$$

(iii) اگر $\alpha>1$، آنگاه

$$\| D_{\varphi,u}^{1} \|_{e,\mathcal{Z}_{\alpha}\to H_{\beta}^{\infty}} \asymp \limsup_{|\varphi(z)|\to 1} \frac{(1-|z|^{2})^{\beta}|u(z)|}{(1-|\varphi(z)|^{2})^{\alpha-1}}.$$

در حالت کلی‌تر $k>1$ نتیجه زیر را داریم.

قضیه ۲-۲. فرض کنیم u و φ توابعی تحلیلی بر $\mathbb{D}$ باشند و $\varphi(\mathbb{D})\subseteq\mathbb{D}$. فرض کنیم $0<\alpha,\beta<\infty$ و $D_{\varphi,u}^{k}:\mathcal{Z}_{\alpha}\to H_{\beta}^{\infty}$ عملگری کراندار باشد. دراینصورت

$$\| D_{\varphi,u}^{k} \|_{e,\mathcal{Z}_{\alpha}\to H_{\beta}^{\infty}} \asymp \limsup_{|\varphi(z)|\to 1} \frac{(1-|z|^{2})^{\beta}|u(z)|}{(1-|\varphi(z)|^{2})^{\alpha+k-2}}.$$

برهان. ابتدا دقت کنیم که کرانداری عملگر $D_{\varphi,u}^{k}:\mathcal{Z}_{\alpha}\to H_{\beta}^{\infty}$ نتیجه می‌دهد $u\in H_{\beta}^{\infty}$ (قضیه ۱-۲ در مرجع [۴] را ملاحظه نمایید). حال فرض کنیم $\delta\in(0,1)$ مقداری ثابت و $\{r_j\}$ دنباله‌ای صعودی در $(0,1)$ باشد که به 1 همگراست. دراینصورت $D_{r_j\varphi,u}^{k}:\mathcal{Z}_{\alpha}\to H_{\beta}^{\infty}$ عملگرهایی فشرده خواهند بود. علت این امر این است که اگر $\{f_n\}$ دنباله‌ای کراندار در $\mathcal{Z}_{\alpha}$ باشد آنگاه زیردنباله‌ای، که آن را با خود $\{f_n\}$ نشان می‌دهیم، وجود دارد به‌طوری‌که روی زیرمجموعه‌های فشرده $\mathbb{D}$ بطور یکنواخت همگراست. از طرف دیگر برای هر دو عدد طبیعی n,m داریم

$$\begin{aligned} &\| D_{r_j\varphi,u}^{k}(f_n-f_m) \|_{H_{\beta}^{\infty}} \\ &= \sup_{z\in\mathbb{D}} (1-|z|^{2})^{\beta}|u(z)(f_n-f_m)^{(k)}(r_j\varphi(z))| \\ &\le \|u\|_{H_{\beta}^{\infty}} \sup_{|z|<r_j} |(f_n-f_m)^{(k)}(z)| \end{aligned}$$

در نتیجه $(D_{r_j\varphi,u}^{k}f_n)$ دنباله‌ای کوشی و لذا همگرا در H_{β}^{∞} خواهد بود که نشان می‌دهد عملگرهای $D_{r_j\varphi,u}^{k}$ فشرده هستند. حال داریم

$$\begin{aligned} &\| D_{\varphi,u}^{k} \|_{e,\mathcal{Z}_{\alpha}\to H_{\beta}^{\infty}} \le \| D_{\varphi,u}^{k} - D_{r_j\varphi,u}^{k} \|_{\mathcal{Z}_{\alpha}\to H_{\beta}^{\infty}} \\ &\le \sup_{\|f\|_{\mathcal{Z}_{\alpha}}\le 1} \sup_{|\varphi(z)|\le\delta} (1-|z|^{2})^{\beta}|u(z)||f^{(k)}(\varphi(z))-f^{(k)}(r_j\varphi(z))| \end{aligned}$$

$$+\sup_{\|f\|_{\mathcal{Z}_\alpha}\le 1}\sup_{|\varphi(z)|\ge\delta}(1-|z|^2)^\beta|u(z)||f^{(k)}(\varphi(z))-f^{(k)}(r_j\varphi(z))|$$
$$=I+J.$$

در مورد I داریم

$$\begin{aligned}
&|f^{(k)}(\varphi(z))-f^{(k)}(r_j\varphi(z))|\\
&\le \int_{r_j}^1|\varphi(z)||f^{(k+1)}(t\varphi(z))|\,dt\\
&\le \|f\|_{\mathcal{Z}_\alpha}\int_{r_j}^1\frac{|\varphi(z)|}{(1-t^2|\varphi(z)|^2)^{\alpha+k-1}}\,dt\\
&\le \frac{|\varphi(z)|}{(1-|\varphi(z)|^2)^{\alpha+k-1}}\|f\|_{\mathcal{Z}_\alpha}(1-r_j)\\
&\le \frac{\delta}{(1-\delta^2)^{\alpha+k-1}}(1-r_j),
\end{aligned}$$

که هرگاه $j\to\infty$ به صفر همگراست. اما در مورد J

$$\begin{aligned}
&|f^{(k)}(\varphi(z))-f^{(k)}(r_j\varphi(z))|\\
&\le \int_{r_j}^1|\varphi(z)||f^{(k+1)}(t\varphi(z))|\,dt\\
&\le \|f\|_{\mathcal{Z}_\alpha}\int_{r_j}^1\frac{|\varphi(z)|}{(1-t^2|\varphi(z)|^2)^{\alpha+k-1}}\,dt\\
&\le \int_{r_j}^1\frac{|\varphi(z)|}{(1-t|\varphi(z)|)^{\alpha+k-1}}\,dt\\
&=\frac{1}{\alpha+k-2}\left(\frac{1}{(1-|\varphi(z)|)^{\alpha+k-2}}-\frac{1}{(1-r_j|\varphi(z)|)^{\alpha+k-2}}\right)\\
&\le \frac{1}{\alpha+k-2}\frac{2}{(1-|\varphi(z)|)^{\alpha+k-2}}.
\end{aligned}$$

لذا در نهایت با میل دادن $\delta\to 1$ نتیجه می‌گیریم

$$J\le\limsup_{|\varphi(z)|\to 1}\frac{2(1-|z|^2)^\beta|u(z)|}{(\alpha+k-2)(1-|\varphi(z)|)^{\alpha+k-2}}.$$

بنابراین در مجموع داریم

$$\|D^k_{\varphi,u}\|_{e,\mathcal{Z}_\alpha\to H^\infty_\beta}\le\limsup_{|\varphi(z)|\to 1}\frac{2(1-|z|^2)^\beta|u(z)|}{(\alpha+k-2)(1-|\varphi(z)|)^{\alpha+k-2}},$$

که همان نتیجه مورد نظر درباره کران بالا است. اثبات کران پایین مشابه روش استفاده شده در قضیه بعد است با این تفاوت که از دنباله توابع تست زیر استفاده می‌کنیم

$$f_n(z)=\frac{(1-|\varphi(z_n)|^2)^2}{(1-\overline{\varphi(z_n)}z)^\alpha}.$$

در قضیه بعد نرم اساسی $D^k_{\varphi,u}:\mathcal{B}_\alpha\to H^\infty_\beta$ را محاسبه می‌کنیم.

قضیه ۲-۳. فرض کنیم u و φ توابعی تحلیلی بر $\mathbb{D}$ باشند و $\varphi(\mathbb{D})\subseteq\mathbb{D}$. فرض کنیم k یک عدد صحیح مثبت، $0<\alpha,\beta<\infty$ و $D^k_{\varphi,u}:\mathcal{B}_\alpha\to H^\infty_\beta$ عملگری کراندار باشد. دراینصورت

$$\|D^k_{\varphi,u}\|_{e,\mathcal{B}_\alpha\to H^\infty_\beta}\asymp\limsup_{|\varphi(z)|\to 1}\frac{(1-|z|^2)^\beta|u(z)|}{(1-|\varphi(z)|^2)^{\alpha+k-1}}.$$

برهان. ابتدا کران پایین را ثابت می‌کنیم. فرض کنیم $\{z_n\}$ دنباله‌ای مشمول در $\mathbb{D}$ باشد به‌طوری‌که $|\varphi(z_n)|\to 1$ و

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{(1-|z_n|^2)^\beta|u(z_n)|}{(1-|\varphi(z_n)|^2)^{\alpha+k-1}}=\limsup_{|\varphi(z)|\to 1}\frac{(1-|z|^2)^\beta|u(z)|}{(1-|\varphi(z)|^2)^{\alpha+k-1}}.$$

توابع تست f_n را به ازای هر $z\in\mathbb{D}$ با ضابطه زیر تعریف می‌کنیم

$$f_n(z)=\frac{1-|\varphi(z_n)|^2}{(1-\overline{\varphi(z_n)}z)^\alpha}.$$

می‌توان به‌سادگی ثابت کرد که $f_n\in\mathcal{B}_\alpha$، $M=\sup_{n\in\mathbb{N}}\|f_n\|_{\mathcal{B}_\alpha}<\infty$ و $f_n\to 0$ بطور یکنواخت روی زیرمجموعه‌های فشرده $\mathbb{D}$ [۸]. بنابراین برای هر عملگر فشرده $L:\mathcal{B}_\alpha\to H^\infty_\beta$ داریم $\|Lf_n\|_{H^\infty_\beta}\to 0$. لذا

$$\begin{aligned}
M\|D^k_{\varphi,u}-L\|_{\mathcal{B}_\alpha\to H^\infty_\beta}&\ge\limsup_{n\to\infty}\|(D^k_{\varphi,u}-L)f_n\|_{H^\infty_\beta}\\
&\ge\limsup_{n\to\infty}\|D^k_{\varphi,u}f_n\|_{H^\infty_\beta},
\end{aligned}$$

و چون L دلخواه است پس

$$\|D^k_{\varphi,u}\|_{e,\mathcal{B}_\alpha\to H^\infty_\beta}\ge c\limsup_{n\to\infty}\|D^k_{\varphi,u}f_n\|_{H^\infty_\beta}$$

$$=c\limsup_{n\to\infty}\sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)^{\beta}|u(z)f_n^{(k)}(\varphi(z))|$$
$$\geq c\limsup_{n\to\infty}(1-|z_n|^2)^{\beta}|u(z_n)f_n^{(k)}(\varphi(z_n))|$$
$$=c\limsup_{n\to\infty}(1-|z_n|^2)^{\beta}|u(z_n)|\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)|\varphi(z_n)|^k}{(1-|\varphi(z_n)|^2)^{\alpha+k-1}}$$
$$=c\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)\limsup_{n\to\infty}\frac{(1-|z_n|^2)^{\beta}|u(z_n)|}{(1-|\varphi(z_n)|^2)^{\alpha+k-1}}$$
$$=c\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)\limsup_{|\varphi(z)|\to1}\frac{(1-|z|^2)^{\beta}|u(z)|}{(1-|\varphi(z)|^2)^{\alpha+k-1}}.$$

لذا نتیجه مورد نظر درباره کران پایین بدست می‌آید. در مورد کران بالا، فرض کنیم $\{r_m\}$ یک دنباله صعودی در $(0,1)$ باشد که به 1 همگراست. همچنین فرض کنیم $0<\delta<1$. دراینصورت می‌توان نشان داد عملگرهای $D^k_{r_m\varphi,u}:\mathcal{B}_\alpha\to H^\infty_\beta$ فشرده هستند. بنابراین

$$\|D^k_{\varphi,u}\|_{e,\mathcal{B}_\alpha\to H^\infty_\beta}\leq\|D^k_{\varphi,u}-D^k_{r_m\varphi,u}\|_{\mathcal{B}_\alpha\to H^\infty_\beta}$$
$$=\sup_{\|f\|_{\mathcal{B}_\alpha}\leq1}\sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)^{\beta}|u(z)||f^{(k)}(\varphi(z))-f^{(k)}(r_m\varphi(z))|$$
$$\leq\sup_{\|f\|_{\mathcal{B}_\alpha}\leq1}\sup_{|\varphi(z)|\leq\delta}(1-|z|^2)^{\beta}|u(z)||f^{(k)}(\varphi(z))-f^{(k)}(r_m\varphi(z))|$$
$$+\sup_{\|f\|_{\mathcal{B}_\alpha}\leq1}\sup_{|\varphi(z)|\geq\delta}(1-|z|^2)^{\beta}|u(z)||f^{(k)}(\varphi(z))-f^{(k)}(r_m\varphi(z))|$$
$$=I+J.$$

رابطه (۳) ایجاب می‌کند که برای I داشته باشیم

$$|f^{(k)}(\varphi(z))-f^{(k)}(r_m\varphi(z))|\leq\int_{r_m}^1|\varphi(z)||f^{(k+1)}(t\varphi(z))|\,dt$$
$$\leq\frac{|\varphi(z)|}{(1-|\varphi(z)|^2)^{\alpha+k}}\|f\|_{\mathcal{B}_\alpha}(1-r_m)$$
$$\leq\frac{\delta}{(1-\delta^2)^{\alpha+k}}(1-r_m),$$

و در نتیجه $I\to0$ هرگاه $m\to\infty$. با بکارگیری مجدد رابطه (۳) برای J خواهیم داشت

$$|f^{(k)}(\varphi(z))-f^{(k)}(r_m\varphi(z))|\leq\int_{r_m}^1|\varphi(z)||f^{(k+1)}(t\varphi(z))|\,dt$$
$$\leq\|f\|_{\mathcal{B}_\alpha}\int_{r_m}^1\frac{|\varphi(z)|}{(1-t|\varphi(z)|)^{\alpha+k}}dt$$
$$\leq\frac{1}{\alpha+k-1}\left(\frac{1}{(1-|\varphi(z)|)^{\alpha+k-1}}-\frac{1}{(1-r_m|\varphi(z)|)^{\alpha+k-1}}\right)$$
$$\leq\frac{1}{\alpha+k-1}\frac{1}{(1-|\varphi(z)|)^{\alpha+k-1}}.$$

در نهایت هرگاه δ به 1 میل کند داریم

$$\|D^k_{\varphi,u}\|_{e,\mathcal{B}_\alpha\to H^\infty_\beta}\leq\limsup_{|\varphi(z)|\to1}\frac{1}{\alpha+k-1}\frac{(1-|z|^2)^{\beta}|u(z)|}{(1-|\varphi(z)|)^{\alpha+k-1}},$$

که نتیجه مورد نظر درباره کران بالا را ایجاب و برهان را کامل می‌کند.

۳- نرم اساسی عملگرها روی فضاهای از نوع وزن‌دار و H^∞ بتوی فضاهای از نوع وزن‌دار

در این بخش، تخمین‌هایی را برای نرم عملگرهای ترکیبی وزن‌دار تعمیم‌یافته $D^k_{\varphi,u}$ را در حالت‌های $H^\infty_\alpha, H^\infty\to H^\infty_\beta$ ارائه می‌کنیم.

قضیه ۳-۱. فرض کنیم u و φ توابعی تحلیلی بر $\mathbb{D}$ باشند و $\varphi(\mathbb{D})\subseteq\mathbb{D}$. فرض کنیم k یک عدد صحیح مثبت، $0<\alpha,\beta<\infty$ و $D^k_{\varphi,u}:H^\infty_\alpha\to H^\infty_\beta$ عملگری کراندار باشد. دراینصورت

$$\|D^k_{\varphi,u}\|_{e,H^\infty_\alpha\to H^\infty_\beta}\asymp\limsup_{|\varphi(z)|\to1}\frac{(1-|z|^2)^{\beta}|u(z)|}{(1-|\varphi(z)|^2)^{\alpha+k}}.$$

برهان. فرض کنیم $\{z_n\}$ دنباله‌ای در $\mathbb{D}$ باشد به طوری‌که $|\varphi(z_n)|\to1$ هرگاه $n\to\infty$ و

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{(1-|z_n|^2)^{\beta}|u(z_n)|}{(1-|\varphi(z_n)|^2)^{\alpha+k}}=\limsup_{|\varphi(z)|\to1}\frac{(1-|z|^2)^{\beta}|u(z)|}{(1-|\varphi(z)|^2)^{\alpha+k}}.$$

توابع تستی که در این مورد استفاده می‌کنیم عبارتند از

$$l_n(z)=\frac{1-|\varphi(z_n)|^2}{(1-\overline{\varphi(z_n)}z)^{\alpha+1}}.$$

دراینصورت می‌توان به‌سادگی ثابت کرد که $l_n\in H^\infty_\alpha$،

$M=\sup_{n\in\mathbb{N}}\|l_n\|_\alpha<\infty$ و $l_n\to 0$ بطور یکنواخت روی زیرمجموعه‌های فشرده $\mathbb{D}$ [۱]. پس برای هر عملگر فشرده $L:H_\alpha^\infty\to H_\beta^\infty$ خواهیم داشت $\|Ll_n\|_{H_\beta^\infty}\to 0$. بنابراین

$$M\|D_{\varphi,u}^k-L\|\geq\limsup_{n\to\infty}\|(D_{\varphi,u}^k-L)l_n\|_{H_\beta^\infty}\geq\limsup_{n\to\infty}\|D_{\varphi,u}^k l_n\|_{H_\beta^\infty}.$$

چون L دلخواه است پس

$$\|D_{\varphi,u}^k\|_{e,H_\alpha^\infty\to H_\beta^\infty}\geq c\limsup_{n\to\infty}\|D_{\varphi,u}^k l_n\|_{H_\beta^\infty}$$
$$=c\limsup_{n\to\infty}\sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)^\beta|u(z)l_n^{(k)}(\varphi(z))|$$
$$\geq c\limsup_{n\to\infty}(1-|z_n|^2)^\beta|u(z_n)l_n^{(k)}(\varphi(z_n))|$$
$$=c\limsup_{n\to\infty}(1-|z_n|^2)^\beta|u(z_n)|\frac{(\alpha+1)\cdots(\alpha+k)|\varphi(z_n)|^k}{(1-|\varphi(z_n)|^2)^{\alpha+k-1}}$$
$$=c(\alpha+1)\cdots(\alpha+k)\limsup_{n\to\infty}\frac{(1-|z_n|^2)^\beta|u(z_n)|}{(1-|\varphi(z_n)|^2)^{\alpha+k}}$$
$$=c(\alpha+1)\cdots(\alpha+k)\limsup_{|\varphi(z)|\to1}\frac{(1-|z|^2)^\beta|u(z)|}{(1-|\varphi(z)|^2)^{\alpha+k}}.$$

بنابراین کران پایین مورد نظر بدست می‌آید. برای اثبات کران بالا، فرض کنیم $\{r_m\}$ یک دنباله صعودی در $(0,1)$ باشد که به 1 همگراست. همچنین فرض کنیم $0<\delta<1$. دراینصورت $D_{r_m\varphi,u}^k:H_\alpha^\infty\to H_\beta^\infty$ عملگرهایی فشرده هستند. بنابراین

$$\|D_{\varphi,u}^k\|_{e,H_\alpha^\infty\to H_\beta^\infty}\leq\|D_{\varphi,u}^k-D_{r_m\varphi,u}^k\|_{H_\alpha^\infty\to H_\beta^\infty}$$
$$=\sup_{\|f\|_\alpha\leq1}\sup_{z\in\mathbb{D}}(1-|z|^2)^\beta|u(z)||f^{(k)}(\varphi(z))-f^{(k)}(r_m\varphi(z))|$$
$$\leq\sup_{\|f\|_\alpha\leq1}\sup_{|\varphi(z)|\leq\delta}(1-|z|^2)^\beta|u(z)||f^{(k)}(\varphi(z))-f^{(k)}(r_m\varphi(z))|$$
$$+\sup_{\|f\|_\alpha\leq1}\sup_{|\varphi(z)|\geq\delta}(1-|z|^2)^\beta|u(z)||f^{(k)}(\varphi(z))-f^{(k)}(r_m\varphi(z))|$$
$$=I+J.$$

رابطه (۲) ایجاب می‌کند که برای I داشته باشیم

$$|f^{(k)}(\varphi(z))-f^{(k)}(r_m\varphi(z))|\leq\int_{r_m}^1|\varphi(z)||f^{(k+1)}(t\varphi(z))|dt$$
$$\leq\frac{|\varphi(z)|}{(1-|\varphi(z)|^2)^{\alpha+k+1}}\|f\|_\alpha(1-r_m)$$
$$\leq\frac{\delta}{(1-\delta^2)^{\alpha+k+1}}(1-r_m),$$

و در نتیجه $I\to 0$ هرگاه $m\to\infty$. اگر مجددا از رابطه (۲) برای J استفاده کنیم خواهیم داشت

$$|f^{(k)}(\varphi(z))-f^{(k)}(r_m\varphi(z))|\leq\int_{r_m}^1|\varphi(z)||f^{(k+1)}(t\varphi(z))|dt$$
$$\leq\|f\|_\alpha\int_{r_m}^1\frac{|\varphi(z)|}{(1-t|\varphi(z)|)^{\alpha+k+1}}dt$$
$$\leq\frac{1}{\alpha+k}\left(\frac{1}{(1-|\varphi(z)|)^{\alpha+k}}-\frac{1}{(1-r_m|\varphi(z)|)^{\alpha+k}}\right)$$
$$\leq\frac{1}{\alpha+k}\frac{1}{(1-|\varphi(z)|)^{\alpha+k}}.$$

در نهایت هرگاه δ به 1 میل کند داریم

$$\|D_{\varphi,u}^k\|_{e,H_\alpha^\infty\to H_\beta^\infty}\leq\limsup_{|\varphi(z)|\to1}\frac{1}{\alpha+k}\frac{(1-|z|^2)^\beta|u(z)|}{(1-|\varphi(z)|)^{\alpha+k}},$$

که نتیجه مورد نظر درباره کران بالا را ایجاب و برهان را کامل می‌کند.

قضیه ۳-۲. فرض کنیم u و φ توابعی تحلیلی بر $\mathbb{D}$ باشند و $\varphi(\mathbb{D})\subseteq\mathbb{D}$. فرض کنیم k یک عدد صحیح مثبت، $0<\beta<\infty$ و $D_{\varphi,u}^k:H^\infty\to H_\beta^\infty$ عملگری کراندار باشد. دراینصورت

$$\|D_{\varphi,u}^k\|_{e,H^\infty\to H_\beta^\infty}\asymp\limsup_{|\varphi(z)|\to1}\frac{(1-|z|^2)^\beta|u(z)|}{(1-|\varphi(z)|^2)^k}.$$

برهان. با بکارگیری توابع تست

$$k_n(z)=\frac{1-|\varphi(z_n)|^2}{1-\overline{\varphi(z_n)}z},$$

می‌توان همانند موردهای قبل به کران پایین رسید. حال $r\in(0,1)$ را ثابت نگه داشته و عملگر

$K_r : H^\infty \to H^\infty$ را به ازای هر $f \in H^\infty$ و هر $z \in \mathbb{D}$ با ضابطه

$$K_r(f)(z) = f_r(z) = f(rz),$$

تعریف می‌کنیم. دراینصورت هرگاه $r \to 1$، $f_r \to f$ به‌طور یکنواخت روی زیرمجموعه‌های فشرده $\mathbb{D}$. همچنین، به ازای هر $r \in (0,1)$، K_r عملگری فشرده روی H^∞ است و $\| K_r \|_{H^\infty \to H^\infty} \le 1$.
بنابراین $D^k_{\varphi,u} K_{r_j} : H^\infty \to H^\infty_\beta$ عملگرهایی فشرده هستند که در آن $\{r_j\}$ دنباله‌ای در $(0,1)$ است که $r_j \to 1$. حال داریم

$$\| D^k_{\varphi,u} \|_{e, H^\infty \to H^\infty_\beta} \le \limsup_{j\to\infty} \| D^k_{\varphi,u} - D^k_{\varphi,u} K_{r_j} \|_{H^\infty \to H^\infty_\beta}.$$

طرف راست رابطه بالا به‌صورت زیر است

$$\begin{aligned} &\| D^k_{\varphi,u} - D^k_{\varphi,u} K_{r_j} \|_{H^\infty \to H^\infty_\beta} \\ &= \sup_{\|f\|_\infty \le 1} \sup_{z\in\mathbb{D}} (1-|z|^2)^\beta |u(z)| |f^{(k)}(\varphi(z)) - r_j^k f^{(k)}(r_j \varphi(z))| \\ &= \sup_{\|f\|_\infty \le 1} \sup_{|\varphi(z)|\le\delta} (1-|z|^2)^\beta |u(z)| |f^{(k)}(\varphi(z)) - r_j^k f^{(k)}(r_j \varphi(z))| \\ &+ \sup_{\|f\|_\infty \le 1} \sup_{|\varphi(z)|\ge\delta} (1-|z|^2)^\beta |u(z)| |f^{(k)}(\varphi(z)) - r_j^k f^{(k)}(r_j \varphi(z))| \\ &= I + J, \end{aligned}$$

که در آن $\delta \in (0,1)$. چون $f_r \to f$ بطور یکنواخت روی زیرمجموعه‌های فشرده $\mathbb{D}$، همچنین داریم $r_j^k f^{(k)}_{r_j} \to f^{(k)}$ هرگاه $j \to \infty$. لذا

$$\limsup_{j\to\infty} I = 0.$$

اما در مورد J داریم

$$\begin{aligned} &\sup_{\|f\|_\infty \le 1} \sup_{|\varphi(z)|\ge\delta} (1-|z|^2)^\beta |u(z)| |f^{(k)}(\varphi(z)) - r_j^k f^{(k)}(r_j \varphi(z))| \\ &\le \sup_{\|f\|_\infty \le 1} \sup_{|\varphi(z)|\ge\delta} (1-|z|^2)^\beta |u(z)| |f^{(k)}(\varphi(z))| \\ &+ \sup_{\|f\|_\infty \le 1} \sup_{|\varphi(z)|\ge\delta} (1-|z|^2)^\beta |u(z)| |r_j^k f^{(k)}(r_j \varphi(z))| \\ &= J_1 + J_2. \end{aligned}$$

با استفاده از رابطه (۱)، ثابت c یافت می‌شود به‌طوری که

$$J_1 \le c \sup_{|\varphi(z)|\ge\delta} \frac{(1-|z|^2)^\beta |u(z)|}{(1-|\varphi(z)|^2)^k}.$$

به طریق مشابه، داریم

$$J_2 \le c \sup_{|\varphi(z)|\ge\delta} \frac{(1-|z|^2)^\beta |u(z)|}{(1-|\varphi(z)|^2)^k},$$

که کران بالای مورد نظر را نتیجه می‌دهد.

۴- نتایج جانبی

در این بخش نتایجی جانبی که از بخش‌های قبلی بدست می‌آیند را بیان می‌کنیم. ابتدا لازم به ذکر است $\| T \|_{e, A\to B} = 0$ اگر و تنها اگر عملگر $T : A \to B$ فشرده باشد، لذا می‌توان در هر یک از نتایج بخش‌های قبل فشردگی عملگرهای ترکیبی وزن‌دار تعمیم‌یافته $D^k_{\varphi,u}$ را در تمامی حالت‌های

$$H^\infty, H^\infty_\alpha, \mathcal{B}_\alpha, \mathcal{Z}_\alpha \to H^\infty_\beta$$

مشخص‌سازی کرد که در این قسمت به بیان صورت این نتایج نمی‌پردازیم.
از طرفی دیگر، عملگرهای ترکیبی وزن‌دار تعمیم‌یافته $D^k_{\varphi,u}$ در حالت‌های خاصی از k و φ و u به چندین عملگر معروف دیگر تبدیل می‌شوند که در ادامه نتایج را برای این عملگرهای خاص بیان می‌کنیم.
یکی از نتایج استانداردی که از قضایای مرتبط با عملگرهای ترکیبی وزن‌دار تعمیم‌یافته $D^k_{\varphi,u}$ بدست می‌آیند، نتایجی هستند که با قرار دادن $k=0$ در $D^k_{\varphi,u}$ حاصل می‌شوند. در این حالت عملگر ترکیبی وزن‌دار $D^0_{\varphi,u} = uC_\varphi$ بدست می‌آید. بررسی قضایای بخش‌های قبل نشان می‌دهند که این قضایا در حالت کلی $k \in \mathbb{N}_0$ نیز برقرار هستند. لذا در حالت خاص $k=0$ نتیجه زیر را داریم.

نتیجه ۴-۱. فرض کنیم u و φ توابعی تحلیلی بر $\mathbb{D}$ باشند و $\varphi(\mathbb{D})\subseteq\mathbb{D}$. دراینصورت با فرض کرانداری عملگرهای زیر، داریم

۱) $$\|uC_\varphi\|_{e,\mathcal{Z}_\alpha\to H_\beta^\infty}\asymp\limsup_{|\varphi(z)|\to1}\frac{(1-|z|^2)^\beta|u(z)|}{(1-|\varphi(z)|^2)^{\alpha-2}}.$$

۲) $$\|uC_\varphi\|_{e,\mathcal{B}_\alpha\to H_\beta^\infty}\asymp\limsup_{|\varphi(z)|\to1}\frac{(1-|z|^2)^\beta|u(z)|}{(1-|\varphi(z)|^2)^{\alpha-1}}.$$

۳) $$\|uC_\varphi\|_{e,H_\alpha^\infty\to H_\beta^\infty}\asymp\limsup_{|\varphi(z)|\to1}\frac{(1-|z|^2)^\beta|u(z)|}{(1-|\varphi(z)|^2)^{\alpha}}.$$

۴) $$\|uC_\varphi\|_{e,H^\infty\to H_\beta^\infty}\asymp\limsup_{|\varphi(z)|\to1}(1-|z|^2)^\beta|u(z)|.$$

همچنین با قرار دادن $u=1$ در نتیجه قبل به عملگر ترکیبی C_φ و با قرار دادن φ به‌عنوان نگاشت همانی به عملگر ضربی M_u می‌رسیم.

نتیجه ۴-۲. فرض کنیم u و φ توابعی تحلیلی بر $\mathbb{D}$ باشند و $\varphi(\mathbb{D})\subseteq\mathbb{D}$. دراینصورت با فرض کرانداری عملگرهای زیر، داریم

۱) $$\|C_\varphi\|_{e,\mathcal{Z}_\alpha\to H_\beta^\infty}\asymp\limsup_{|\varphi(z)|\to1}\frac{(1-|z|^2)^\beta}{(1-|\varphi(z)|^2)^{\alpha-2}}.$$

۲) $$\|C_\varphi\|_{e,\mathcal{B}_\alpha\to H_\beta^\infty}\asymp\limsup_{|\varphi(z)|\to1}\frac{(1-|z|^2)^\beta}{(1-|\varphi(z)|^2)^{\alpha-1}}.$$

۳) $$\|C_\varphi\|_{e,H_\alpha^\infty\to H_\beta^\infty}\asymp\limsup_{|\varphi(z)|\to1}\frac{(1-|z|^2)^\beta}{(1-|\varphi(z)|^2)^{\alpha}}.$$

۴) $$\|M_u\|_{e,\mathcal{Z}_\alpha\to H_\beta^\infty}\asymp\limsup_{|z|\to1}(1-|z|^2)^{\beta-\alpha+2}|u(z)|.$$

۵) $$\|M_u\|_{e,\mathcal{B}_\alpha\to H_\beta^\infty}\asymp\limsup_{|z|\to1}(1-|z|^2)^{\beta-\alpha+1}|u(z)|.$$

۶) $$\|M_u\|_{e,H_\alpha^\infty\to H_\beta^\infty}\asymp\limsup_{|z|\to1}(1-|z|^2)^{\beta-\alpha}|u(z)|.$$

۷) $$\|M_u\|_{e,H^\infty\to H_\beta^\infty}\asymp\limsup_{|z|\to1}(1-|z|^2)^{\beta}|u(z)|.$$

با مفروض بودن خودنگاشت تحلیلی $\varphi:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ عملگر DC_φ با ضابطه

$$DC_\varphi f=\varphi'\cdot f\circ\varphi,$$

به ازای هر $f\in H(\mathbb{D})$ تعریف می‌شود. این نوع عملگرها در مراجع [۲۰] مورد مطالعه و بررسی قرار گرفته‌اند. دقت کنیم که با قرار دادن $k=1$ و $u=\varphi'$ در $D_{\varphi,u}^k$ داریم $D_{\varphi,\varphi'}^1=DC_\varphi$ و بنابراین نتیجه زیر را خواهیم داشت.

نتیجه ۴-۳. فرض کنیم u و φ توابعی تحلیلی بر $\mathbb{D}$ باشند و $\varphi(\mathbb{D})\subseteq\mathbb{D}$. دراینصورت با فرض کرانداری عملگرهای زیر، داریم

۱) $$\|DC_\varphi\|_{e,\mathcal{Z}_\alpha\to H_\beta^\infty}\asymp\limsup_{|\varphi(z)|\to1}\frac{(1-|z|^2)^\beta|\varphi'(z)|}{(1-|\varphi(z)|^2)^{\alpha-1}}.$$

۲) $$\|DC_\varphi\|_{e,\mathcal{B}_\alpha\to H_\beta^\infty}\asymp\limsup_{|\varphi(z)|\to1}\frac{(1-|z|^2)^\beta|\varphi'(z)|}{(1-|\varphi(z)|^2)^{\alpha}}.$$

۳) $$\|DC_\varphi\|_{e,H_\alpha^\infty\to H_\beta^\infty}\asymp\limsup_{|\varphi(z)|\to1}\frac{(1-|z|^2)^\beta|\varphi'(z)|}{(1-|\varphi(z)|^2)^{\alpha+1}}.$$

۴) $$\|DC_\varphi\|_{e,H^\infty\to H_\beta^\infty}\asymp\limsup_{|\varphi(z)|\to1}\frac{(1-|z|^2)^\beta|\varphi'(z)|}{1-|\varphi(z)|^2}.$$

مشابه عملگر DC_φ، با مفروض بودن خودنگاشت تحلیلی $\varphi:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ عملگر $C_\varphi D$ با ضابطه

$$C_\varphi Df=f'\circ\varphi,$$

به ازای هر $f\in H(\mathbb{D})$ تعریف می‌شود [۲۱]. با قرار دادن $k=1$ و $u=1$ در عملگر $D_{\varphi,u}^k$ داریم $D_{\varphi,1}^1=C_\varphi D$ که منجر به نتیجه زیر می‌شود.

نتیجه ۴-۴. فرض کنیم φ خودنگاشتی تحلیلی از $\mathbb{D}$ باشد. دراینصورت با فرض کرانداری عملگرهای زیر، داریم

۱) $$\|C_\varphi D\|_{e,\mathcal{Z}_\alpha\to H_\beta^\infty}\asymp\limsup_{|\varphi(z)|\to1}\frac{(1-|z|^2)^\beta}{(1-|\varphi(z)|^2)^{\alpha-1}}.$$

۲) $$\|C_\varphi D\|_{e,\mathcal{B}_\alpha\to H_\beta^\infty}\asymp\limsup_{|\varphi(z)|\to1}\frac{(1-|z|^2)^\beta}{(1-|\varphi(z)|^2)^{\alpha}}.$$

۳) $$\|C_\varphi D\|_{e,H_\alpha^\infty\to H_\beta^\infty}\asymp\limsup_{|\varphi(z)|\to1}\frac{(1-|z|^2)^\beta}{(1-|\varphi(z)|^2)^{\alpha+1}}.$$

۴) $$\|C_\varphi D\|_{e,H^\infty\to H_\beta^\infty}\asymp\limsup_{|\varphi(z)|\to1}\frac{(1-|z|^2)^\beta}{1-|\varphi(z)|^2}.$$

تبصره ۴-۵. مونتز-رودریگز در مرجع [۲۲] و

هایوارینن و همکاران در مرجع [۲۳] ثابت کرده‌اند که اگر v و w وزن‌هایی باشند که روی مرز $\mathbb{D}$ به صفر میل می‌کنند آنگاه

۱) عملگر ترکیبی وزن‌دار $uC_\varphi : H_v^\infty \to H_w^\infty$ کراندار است اگر و تنها اگر

$$\sup_{n\geq 0}\frac{\| u\varphi^n \|_w}{\| z^n \|_v} \asymp \sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{w(z)}{\tilde{v}(\varphi(z))}\,|u(z)| < \infty.$$

همچنین نرم عملگری $uC_\varphi : H_v^\infty \to H_w^\infty$ قابل مقایسه با سوپریموم‌های فوق است.

$$\begin{aligned} \| uC_\varphi \|_{e,H_v^\infty \to H_w^\infty} &= \limsup_{n\to\infty}\frac{\| u\varphi^n \|_w}{\| z^n \|_v}, \\ \| uC_\varphi \|_{e,H_v^\infty \to H_w^\infty} &= \limsup_{|\varphi(z)|\to 1} \frac{w(z)}{\tilde{v}(\varphi(z))}\,|u(z)|. \end{aligned} \tag{۲}$$

با استفاده از موارد فوق و همچنین لم ۱-۲ از مرجع [۲۲]، تمامی نتایج این مقاله را می‌توان به‌صورت مشخص‌سازی‌هایی برحسب u و φ^n بیان کرد. به عنوان مثال‌هایی از این نوع مشخص‌سازی‌ها مراجع [۱۳و۲۲] را ملاحظه نمایید.

فهرست منابع

[1] Cowen, C. C., & MacCluer, B. D. (1995). Composition operators on spaces of analytic functions. CRC Press, Boca Raton.

[2] Shapiro, J. H. (1993). Composition operator and classical function theory. Springer-Verlag, New York.

[3] Yang, W., & Zhu, X. (2014). Differences of generalized weighted composition operators between growth spaces. Annales Polonici Mathematici.

[4] Li, S., & Stevic, S. (2015). Generalized weighted composition operators from α-Bloch spaces into weighted-type spaces. Journal of Inequalities and Applications.

[5] Sanatpour, A. H., & Hassanlou, M. (2017). Essential norms of weighted differentiation composition operators between Zygmund type spaces and Bloch type spaces. Filomat.

[6] Stevic, S. (2008). Essential norms of weighted composition operators from the α-Bloch space to a weighted-type space on the unit ball. Abstract and Applied Analysis.

[7] Zhu, X. (2015). Generalized weighted composition operators on Bloch-type spaces. Journal of Inequalities and Applications.

[8] Zhu, X. (2016). Essential norm of generalized weighted composition operators on Bloch-type spaces. Applied Mathematics and Computation.

[9] Zhu, X. (2012). Generalized weighted composition operators from Bloch spaces into Bers-type spaces. Filomat.

[10] Colonna, F., & Li, S. (2013). Weighted composition operators from the Bloch space and the analytic Besov spaces into the Zygmund space. Journal of Operators.

[11] Colonna, F., & Li, S. (2013). Weighted composition operators from H^∞ into the Zygmund spaces. Complex Analysis and Operator Theory.

[12] Liu, Y., & Yu, Y. (2012). Composition followed by differentiation between H^∞ and Zygmund spaces. Complex Analysis and Operator Theory.

[13] Esmaeili, K., & Lindstrom, M. (2013). Weighted composition operators between Zygmund type spaces and their essential norms. Integral Equations and Operator Theory.

[14] Hu, Q., & Ye, S. (2012). Weighted composition operators on the Zygmund spaces. Abstract and Applied Analysis.

[15] Hu, Q., & Zhu, X. (2016). Essential norm of weighted composition operators from H^∞ to the Zygmund space. Journal of Nonlinear Sciences and Applications.

[16] Li, S., & Stevic, S. (2008). Weighted composition operators from Zygmund spaces into Bloch spaces. Applied Mathematics and Computation.

[17] Hu, Q., Shi, Y., Shi, Y., & Zhu, X. (2016). Essential norm of generalized weighted composition operators from the Bloch space to the Zygmund space. Journal of Inequalities and Applications.

[18] Zhu, K. (1993). Bloch type spaces of analytic functions. Rocky Mountain Journal of Mathematics.

[19] Zhu, K. (2005). Spaces of holomorphic functions in the unit ball.

Springer-Verlag, New York.

[20] Liu, Y., & Yu, Y. (2012). Composition followed by differentiation between H^{∞} and Zygmund spaces. Complex Analysis and Operator Theory.

[21] Ohno, S. (2006). Products of composition and differentiation between Hardy spaces. Bulletein of Australian Mathematical Society.

[22] Montes-Rodriguez, A. (2000). Weighted composition operators on weighted Banach spaces of analytic functions. Journal of the London Mathematical Society.

[23] Hyvarinen, O., Kemppainen, M., Lindstrom, M., Rautio, A., & Saukko, E. (2012). The essential norm of weighted composition operators on weighted Banach spaces of analytic functions. Integral Equations and Operator Theory.