

عملگر توسیع رافر-سافریج روی کلاس نگاشت‌های قویاً و تقریباً فرنگون از نوع β و مرتبه‌ی α

سمیرا رهروی^{۱*}، حسین پیری^۲

(^۱) گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه بناب، بناب، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۵/۱۱/۱۲ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۸/۱۱/۱۷

چکیده

در این مقاله مفهوم قویاً و تقریباً فرنگون از نوع β و مرتبه‌ی α را تعریف نموده و به کمک لم پیک-شوارتز نشان می‌دهیم که نگاشت‌های توسیعی رافر-سافریج، کلاس قویاً و تقریباً فرنگون از نوع β و مرتبه‌ی α را بر دامنه کامل رین‌هارد Ω_{n,p_1,\dots,p_n} حفظ می‌کند. سپس نشان می‌دهیم نگاشت‌های توسیعی رافر-سافریج، کلاس‌های قویاً فرنگون از نوع β ، قویاً و تقریباً ستارگون از مرتبه‌ی α و قویاً ستارگون را حفظ می‌کند. نتایج بدست آمده در این مقاله بسیاری از نتایج مشهور را توسیع می‌دهند.

واژه‌های کلیدی: عملگر توسیع رافر-سافریج، دامنه رین‌هارد، تابعک مینکوفسکی، نگاشت‌های قویاً و تقریباً فرنگون.

۱- مقدمه

فرض کنیم n عدد صحیح مثبت و \mathbf{C}^n فضای اقلیدسی n متغیره مختلط $z = (z_1, K, z_n)$ با ضرب داخلی استاندارد $\langle z, w \rangle = \sum_{j=1}^n z_j \bar{w}_j$ و نرم اقلیدسی $\|z\| = \sqrt{\langle z, z \rangle}$ باشد که $z, w \in \mathbf{C}^n$. گوی باز $\{z \in \mathbf{C}^n \mid \|z\| < r\}$ را با نماد B_r^n و گوی واحد B_1^n را با نماد B^n نشان می‌دهیم. گوی بسته $\{z \in \mathbf{C}^n \mid \|z\| \leq r\}$ را با نماد \bar{B}_r^n و مرز گوی واحد $\{z \in \mathbf{C}^n \mid \|z\| = r\}$ را نماد ∂B^n نشان می‌دهیم. در حالت یک متغیره، B^1 را با U نشان می‌دهیم. هم‌چنین برای $n \geq 2$ ، قرار می‌دهیم $\hat{z} = (z_2, K, z_n)$ ، لذا داریم $z = (z_1, \hat{z}) \in \mathbf{C}^n$. فرض کنیم $L(\mathbf{C}^n, \mathbf{C}^m)$ نمایش فضای نگاشت‌های خطی از \mathbf{C}^n به \mathbf{C}^m با نرم استاندارد $\|A\| = \sup\{\|A(z)\| \mid \|z\| = 1\}$ فرض کنیم I_n عملگر همانی فضای $L(\mathbf{C}^n, \mathbf{C}^n)$ باشد. فرض کنیم Ω حوزه‌ای در \mathbf{C}^n و $H(\Omega)$ مجموعه‌ی توابع هلمولرفیک از Ω به \mathbf{C}^n باشد. نگاشت $f \in H(\Omega)$ را نرمالیزه گوییم هرگاه $f(0) = 0$ و $J_f(0) = I_n$ ، که در آن $J_f(0)$ ماتریس ژاکوبین مختلط f در مبدأ است. نگاشت $f \in H(\Omega)$ را موضعاً دوتحلیلی گوییم اگر برای هر $z \in \Omega$ داشته باشیم $\det J_f(z) \neq 0$. فرض کنیم $LS(\Omega)$ مجموعه‌ی تمام نگاشت‌های موضعاً دوتحلیلی نرمالیزه بر Ω و $S(\Omega)$ کلاس نگاشت‌های دوتحلیلی نرمالیزه بر Ω باشند. در حالت یک متغیره مختلط مجموعه $S(B^1)$ را با S و مجموعه‌ی $LS(B^1)$ را با نماد LS نمایش می‌دهیم. فرض کنیم $f \in S(\Omega)$ نگاشت $f \in S(\Omega)$ را ستاره‌گون (به‌ترتیب محدب) گوییم هرگاه تصویر Ω تحت f ناحیه‌ای ستاره‌گون (به‌ترتیب ناحیه محدب) نسبت به مبدأ باشد. کلاس توابع ستاره‌گون (به‌ترتیب محدب) را با $S^*(\Omega)$ (به‌ترتیب $K(\Omega)$) نمایش می‌دهیم. در حالت یک متغیره مختلط $S^*(B^1)$ (به‌ترتیب $K(B^1)$) را با S^* (به‌ترتیب K)

نشان می‌دهیم. تابع نرمالیزه $f \in H(\Omega)$ را ε -ستارگون گوییم، اگر عدد مثبت ε ، $0 \leq \varepsilon \leq 1$ وجود داشته باشد به طوری که $f(B^n)$ نسبت به هر نقطه‌ی $\mathcal{E}(B^n)$ ستارگون باشد.

فرض کنید $P: \mathbf{C}^n \rightarrow \mathbf{C}$ چندجمله‌ای همگن از درجه‌ی n باشد. لذا به ازای هر $z \in \mathbf{C}^n$ و $\lambda \in \mathbf{C}$ داریم $P(\lambda z) = \lambda^n P(z)$. به‌سادگی می‌توان دید $\nabla P(z)z = nP(z)$ ، که در آن

$$\nabla P(z) = \left(\frac{\partial P}{\partial z_1}, K, \frac{\partial P}{\partial z_n} \right)$$

نرم P را به‌صورت $\|P\| = \sup\{|P(z)| \mid z \in \partial B^n\}$ تعریف می‌کنیم.

حوزه $\Omega \subset \mathbf{C}^n$ را رین‌هارد کامل گوییم هرگاه برای هر $(z_1, z_2, K, z_n) \in \Omega$ داشته باشیم

$$(e^{i\theta_1} z_1, e^{i\theta_2} z_2, K, e^{i\theta_n} z_n) \in \Omega$$

که در آن $\theta_j \in \mathbf{R}$ ، $j = 1, 2, K, n$. حوزه‌ی Ω مدور گوییم هرگاه برای هر $z \in \Omega$ و $\theta \in \mathbf{R}$ داشته باشیم

$$e^{i\theta} z \in \Omega$$

$$\Omega_{n, p_2, K, p_n} = \left\{ z \in \mathbf{C}^n : |z_1|^2 + \sum_{j=2}^n |z_j|^{p_j} < 1 \right\},$$

$$p_j \geq 1, j = 2, K, n,$$

را به‌صورت

$$\rho(z) = \inf \left\{ t > 0, \frac{z}{t} \in \Omega_{n, p_2, K, p_n} \right\},$$

$$z \in \mathbf{C}^n.$$

تعریف می‌کنیم. لذا، تابع مینکوفسکی $\rho(z)$ یک نرم بر \mathbf{C}^n است و Ω_{n, p_2, K, p_n} گوی واحد در فضای باناخ \mathbf{C}^n نسبت به این نرم است. همان‌طور که می‌دانیم تابع مینکوفسکی $\rho(z)$ در $\{0\} \setminus \bar{\Omega}_{n, p_2, K, p_n}$ ، C^1 است. علاوه براین، خواص زیر برای تابع مینکوفسکی $\rho(z)$ برقرار است (به مرجع [۱۲] نگاه کنید):

در حالت $B^n = U$ ، نابرابری (۲) به نابرابری

$$\left| \frac{-\alpha + i \tan \beta}{1 - \alpha} + \frac{1 - i \tan \beta}{1 - \alpha} \frac{f(z)}{zf'(z)} - \frac{1 + c^2}{1 - c^2} \right| \leq \frac{2c}{1 - c^2}, z \in U \setminus \{0\}.$$

تبدیل می‌شود.

اگر **تعریف ۲** را به حوزه‌ی رین‌هارد کراندار Ω در \mathbb{C}^n تعمیم دهیم، تعریف زیر که منسوب به سو^۱ و وانگ^[۱] است، را به‌دست می‌آوریم.

تعریف ۳. [۲۰] فرض کنید $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ حوزه‌ی رین‌هارد کراندار شامل مبدأ باشدو تابعک مینکوفسکی $\rho(z)$ در $\overline{\Omega} \setminus \{0\}$ ، C^1 باشد. فرض کنید f نگاشت دوتحلیلی نرمالیزه بر Ω باشد و $\alpha \in [0, 1)$ ، $c \in (0, 1)$ ، $\beta \in (\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$$\left| \frac{-\alpha + i \tan \beta}{1 - \alpha} + \frac{1 - i \tan \beta}{1 - \alpha} \frac{2}{\rho(z)} \frac{\partial \rho}{\partial z}(z) J_f^{-1}(z) f(z) - \frac{1 + c^2}{1 - c^2} \right| \leq \frac{2c}{1 - c^2}. \quad (۳)$$

در این صورت $f(z)$ را نگاشت قویاً و تقریباً فنرگون از نوع β و مرتبه‌ی α بر Ω گوئیم.

تعریف ۴. در تعاریف فوق به‌ترتیب فرض کنیم $\alpha = 0$ ، $\beta = 0$ و $\alpha = \beta = 0$ ، در این صورت تعاریف نگاشت‌های تقریباً فنرگون از نوع β ، قویاً و تقریباً فنرگون از مرتبه‌ی α و قویاً ستارگون را به‌دست می‌آوریم.

در سال ۱۹۹۵، رافر^۲ و سافریج^۳ عملگر توسیعی که روشی برای توسیع تابع تقریباً دوتحلیلی بر قرص واحد

$$\frac{\partial \rho}{\partial z}(\lambda z) = \frac{\partial \rho}{\partial z}(z), \lambda \in [0, +\infty), z \in \Omega_{n, p_2, K, p_n} \setminus \{0\}, \quad (۱)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial z}(e^{i\theta} z) = e^{-i\theta} \frac{\partial \rho}{\partial z}(z), \theta \in \mathbb{R}, z \in \Omega_{n, p_2, K, p_n} \setminus \{0\}.$$

تعریف ۱. [۲۳] فرض کنید Ω حوزه‌ی مدور محدب کراندار شامل مبدأ در \mathbb{C}^n باشد. تابعک مینکوفسکی $\rho(z)$ در $\overline{\Omega} \setminus \{0\}$ ، C^1 باشد. فرض کنید f نگاشت موضعاً دوتحلیلی نرمالیزه بر Ω باشد. اگر $\alpha \in (0, 1)$ ، $\beta \in (\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$$\left| e^{-i\beta} \frac{2}{\rho(z)} \frac{\partial \rho}{\partial z}(z) J_f^{-1}(z) f(z) - \left(\frac{\cos \beta}{2\alpha} - i \sin \beta \right) \right| < \frac{\cos \beta}{2\alpha}, z \in \Omega \setminus \{0\},$$

آن‌گاه نگاشت f را فنرگون از نوع β و مرتبه α بر Ω گوئیم.

تعریف ۲. [۲] فرض کنید $f(z)$ نگاشت دوتحلیلی نرمالیزه بر B^n باشد. فرض کنید $\alpha \in [0, 1)$ ، $c \in (0, 1)$ ، $\beta \in (\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$$\left| \frac{-\alpha + i \tan \beta}{1 - \alpha} + \frac{1 - i \tan \beta}{1 - \alpha} \frac{\bar{z} J_f^{-1}(z) f(z)}{\|z\|^2} - \frac{1 + c^2}{1 - c^2} \right| \leq \frac{2c}{1 - c^2}. \quad (۲)$$

در این صورت $f(z)$ را نگاشت قویاً و تقریباً فنرگون از نوع β و مرتبه‌ی α بر B^n گوئیم.

1. Cui
2. Wang
3. Roper
4. Suffridge

حوزه‌ی رین‌هارد

$$\Omega_{n,p} = \left\{ z \in \mathbb{C}^n \mid |z_1|^2 + \sum_{j=2}^n |z_j|^p < 1 \right\}$$

می‌نگارد، که در آن $p \geq 1$ و f ، z_1 و \hat{z} مشابهاً به صورت فوق تعریف شده‌اند. در حالت $\varepsilon = 0$ و $\varepsilon = 1$ نگاشت $\Phi_{n, \frac{1}{p}}$ ، توابع ستارگون و محدب در U

را به ترتیب به نگاشت ستارگون و محدب در $\Omega_{n,p}$ می‌نگارد. علاوه بر آن، گونگ و لیو [۵] نشان دادند که عملگر

$$[\Phi_{n, \frac{1}{p_2}, K, \frac{1}{p_n}}(f)](z) = \left(f(z_1), (f'(z_1))^{\frac{1}{p_2}} z_2, K, (f'(z_1))^{\frac{1}{p_n}} z_n \right),$$

تابع ε -ستارگون در U را به نگاشت ε -ستارگون بر حوزه‌ی رین‌هارد

$$\Omega_{n, p_2, K, p_n} = \left\{ z \in \mathbb{C}^n : |z_1|^2 + \sum_{j=2}^n |z_j|^{p_j} < 1 \right\}.$$

می‌نگارد، که در آن $p_j \geq 1$ و f ، z_1 و \hat{z} مشابهاً به صورت فوق تعریف شده‌اند. همچنین لیو و لیو [۱۱] نشان دادند که این عملگر ستارگونی از مرتبه‌ی α را بر حوزه‌ی Ω_{n, p_2, K, p_n} حفظ می‌کند. از طرف دیگر، فنگ^۹ و لیو [۳] ثابت کردند که این عملگر تقریباً ستارگونی از مرتبه‌ی α را بر حوزه‌ی Ω_{n, p_2, K, p_n} حفظ می‌کند. بعداً، کوهر [۸]، میور^{۱۰} [۱۳] و رهروی^{۱۱} و همکاران [۱۵، ۱۷] به کمک زنجیر لاونر عملگر تغییر یافته توسیع رافر-سافریج را مطالعه کردند. اخیراً، خواص عملگر تغییر یافته توسیع رافر-سافریج بر گوی واحد

U در \mathbb{C} به نگاشت تقریباً دوتحلیلی بر گوی واحد B^n در \mathbb{C}^n را ارائه می‌کند را معرفی نمودند. $n \geq 2$ را ثابت بگیرید، عملگر رافر-سافریج ([۷، ۱۹]) را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$[\Phi_n(f)](z) = (f(z_1), \sqrt{f'(z_1)} \hat{z}), z \in B^n$$

که در آن f نگاشت دوتحلیلی نرمالیزه بر قرص واحد U در \mathbb{C} بوده و $z = (z_1, \hat{z})$ در گوی واحد B^n در \mathbb{C}^n قرار دارد و شاخه‌ی $\sqrt{f'(z_1)}|_{z_1=0} = 1$ از تابع توانی انتخاب می‌شود. نتایج

$$\Phi_n(K) \subseteq K(B^n),$$

$$\Phi_n(S^*) \subseteq S^*(B^n).$$

اهمیت نگاشت توسیع رافر-سافریج را نشان می‌دهند. اولین مشمولیت را رافر و سافریج زمانی که عملگر خود را معرفی می‌کردند در مرجع [۱۹] اثبات کرده‌اند. در حالی که دومین رابطه‌ی مشمولیت توسط گراهام^۵ و کوهر^۶ در مرجع [۶] اثبات شده است. تا آن زمان ارائه مثال‌هایی از نگاشت‌های محدب و ستارگون در B^n بسیار دشوار بود. به کمک عملگر توسیع رافر-سافریج، به سادگی می‌توانیم مثال‌هایی از این نگاشت‌ها را ارائه دهیم و این امر علت علاقه‌مندی پژوهشگران را به این عملگر نشان می‌دهد. بسیاری از کاربردهای عملگر توسیع رافر-سافریج را گراهام و کوهر در کتاب اخیر خود [۷] بیان نموده‌اند. از طرف دیگر پژوهشگران خواص عملگر توسیع رافر-سافریج را بر حوزه‌های رین‌هارد بررسی نموده‌اند. برای مثال گونگ^۷ و لیو^۸ [۴، ۱۰] مفهوم نگاشت ε -ستاره‌گون را معرفی نموده و نشان داده‌اند که عملگر

$$[\Phi_{n, \frac{1}{p}}(f)](z) = \left(f(z_1), (f'(z_1))^{\frac{1}{p}} \hat{z} \right)$$

تابع ε -ستاره‌گون در U را به نگاشت ε -ستارگون بر

9. Feng
10. Muir
11. Rahrovi

5. Graham
6. Kohr
7. Gong
8. Liu

$$\left(\frac{1}{(f'(z_1))^{p_2} z_2}, \dots, \frac{1}{(f'(z_1))^{p_n} z_n} \right),$$

که در آن $P_j(z_j)$ چندجمله‌ای همگن از درجه‌ی n نسبت به z_j است و f, z_1 و \hat{z} مشابهاً به صورت فوق تعریف شده‌اند. آن‌ها نشان دادند که تحت شرایط مختلفی برای $P_j, j=2, K, n, \alpha$ این عملگر خواصی مانند تقریباً ستارگونی از مرتبه‌ی α و ستارگونی از مرتبه‌ی α را بر حوزه‌ی Ω_{n,p_2,K,p_n} حفظ می‌کند، که در آن Ω_{n,p_2,K,p_n} به صورت رابطه‌ی (۵) تعریف می‌شود.

در این مقاله، شرایط خاصی به ترتیب برای a_j و P_j به دست می‌آوریم که تحت آن‌ها عملگرهای توسیع $\Phi_{n,p_j}(f)$ و $\Phi_{n,p_2,K,p_n}(f)$ قویاً و تقریباً فرنگونی از نوع β و مرتبه‌ی α را بر $\Omega_{n,p_1,\Lambda,p_n}$ حفظ نمایند.

۲- لم‌های کمکی

برای اثبات نتایج اصلی مقاله، به لم‌های زیر نیاز داریم.

لم ۱. [۷] (لم پیک- شوارتز) فرض کنید $g \in H(U), g(U) \subset U$ و $\xi \in U$. در این صورت داریم

$$|g'(\xi)| \leq \frac{1-|g(\xi)|^2}{1-|\xi|^2}$$

لم ۲. [۱۴] فرض کنید f بر U نرمالیزه دو تحلیلی باشد، در این صورت داریم

$$\left| (1-|z|^2) \frac{f''(z)}{f'(z)} - 2\bar{z} \right| \leq 4, \quad z \in U.$$

لم ۳. [۲۴] اگر $\rho(z)$ تابع مینکوفسکی بر حوزه‌ی Ω_{n,p_2,K,p_n} باشد و $z \neq 0$ آن‌گاه داریم

توسط وانگ و لیو [۲۲]، فنگ و لو [۳] و رهروی و همکاران [۱۶، ۱۸] بررسی شده‌اند.

در مقابل مطالعه‌ی عملگر تغییر یافته توسیع رافر-سافریج بر گوی واحد، طبیعی است اگر بتوانیم خواص عملگر تغییر یافته توسیع رافر-سافریج بر حوزه‌ی رین‌هارد $\Omega_{n,p_1,\Lambda,p_n}$ را بررسی کنیم.

در سال ۲۰۱۱، وانگ و گائو [۲۱] عملگر توسیع

$$F(z) = [\Phi_{n,p_2,K,p_n}(f)](z) = \left(f(z_1) + f'(z_1) \sum_{j=2}^n a_j z_j^{p_j}, \frac{1}{(f'(z_1))^{p_2} z_2}, K, \frac{1}{(f'(z_1))^{p_n} z_n} \right), \quad (4)$$

را بر حوزه‌ی رین‌هارد Ω_{n,p_2,K,p_n} معرفی نمودند، که

در آن شاخه‌ی $(f'(z_1))^{p_j} |_{z_1=0} = 1$ برای هر $p_j \geq 1$ انتخاب می‌شود. آن‌ها نشان دادند که تحت شرایط مختلفی برای $a_j, j=2, K, n, \alpha$ این عملگر خواصی مانند تقریباً ستارگونی از مرتبه‌ی α و ستاره‌گونی از مرتبه‌ی α را بر حوزه‌ی Ω_{n,p_2,K,p_n} حفظ می‌کند، که در آن Ω_{n,p_2,K,p_n} به صورت

$$\Omega_{n,p_2,K,p_n} = \left\{ z \in C^n : |z_1|^2 + \sum_{j=2}^n |z_j|^{p_j} < 1 \right\}. \quad (5)$$

تعریف می‌شود.

در سال ۲۰۱۴، لی و فنگ [۹] عملگر توسیع زیر را بر حوزه‌ی رین‌هارد Ω_{n,p_2,K,p_n} تعریف نمودند.

$$F(z) = [\Phi_{n,p_j}(f)](z) = \left(f(z_1) + f'(z_1) \sum_{j=2}^n P_j(z_j), \right) \quad (6)$$

12. Yu

13. Gao

14. Li

$z = (z_1, \hat{z}) \in \overline{\Omega}_{n,p_2,K,p_n} \setminus \{0\}$ پس دو حالت زیر را داریم:

اولاً، اگر $\hat{z} = 0$ ، آن‌گاه حکم بهسادگی اثبات می‌شود. ثانیاً، فرض کنید $\hat{z} \neq 0$. به‌وضوح نگاشت F در هر همسایگی $z = (z_1, \hat{z}) \in \overline{\Omega}_{n,p_2,K,p_n} \setminus \{0\}$ تحلیلی است. برای $u \in \partial\Omega_{n,p_2,K,p_n}$ که $\hat{u} \neq 0$ و $\lambda \in \overline{U} \setminus \{0\}$ قرار می‌دهیم $z = \lambda u = |\lambda| e^{i\theta} u$ این صورت بنا به رابطه‌ی (۱) داریم

$$\left| \frac{1-c^2}{2c} \left[\frac{-\alpha+i \tan \beta}{1-\alpha} + \frac{1-i \tan \beta}{1-\alpha} \frac{2}{\rho(z)} \frac{\partial \rho}{\partial z} \right] - \frac{1+c^2}{2c} (z) J_F^{-1}(z) F(z) \right| < 1$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{1-c^2}{2c} \left[\frac{-\alpha+i \tan \beta}{1-\alpha} + \frac{1-i \tan \beta}{1-\alpha} \frac{2}{\rho(|\lambda| e^{i\theta} u)} \frac{\partial \rho}{\partial z} \right] - \frac{1+c^2}{2c} (|\lambda| e^{i\theta} u) J_F^{-1}(|\lambda| e^{i\theta} u) F(|\lambda| e^{i\theta} u) \right| < 1$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{1-c^2}{2c} \left[\frac{-\alpha+i \tan \beta}{1-\alpha} + \frac{1-i \tan \beta}{1-\alpha} \frac{2}{|\lambda|} \frac{e^{-i\theta} \partial \rho}{\partial z} \right] - \frac{1+c^2}{2c} (u) J_F^{-1}(|\lambda| e^{i\theta} u) F(|\lambda| e^{i\theta} u) \right| < 1$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{1-c^2}{2c} \left[\frac{-\alpha+i \tan \beta}{1-\alpha} + \frac{1-i \tan \beta}{1-\alpha} \frac{2}{\lambda} \frac{\partial \rho}{\partial z} \right] - \frac{1+c^2}{2c} (u) J_F^{-1}(\lambda u) F(\lambda u) \right| < 1.$$

عبارت

$$\frac{1-c^2}{2c} \left[\frac{-\alpha+i \tan \beta}{1-\alpha} + \frac{1-i \tan \beta}{1-\alpha} \frac{2}{\lambda} \frac{\partial \rho}{\partial z} \right] - \frac{1+c^2}{2c} (u) J_F^{-1}(\lambda u) F(\lambda u)$$

نسبت به λ تحلیلی است. بنابراین، بنا به اصل ماکسیمم مطلق برای توابع تحلیلی، در $|\lambda|=1$ به مقدار ماکسیمم خود را می‌رسد. لذا، کافی است حکم را برای هر $z = (z_1, \hat{z}) \in \partial\Omega_{n,p_2,K,p_n}$ که $\hat{z} \neq 0$ اثبات کنیم. پس $\rho(z)=1$ و کافی است برای هر $z \in \partial\Omega_{n,p_2,K,p_n}$ و $\hat{z} \neq 0$ نابرابری زیر را ثابت کنیم.

$$\left| \frac{1-c^2}{2c} \left[\frac{-\alpha+i \tan \beta}{1-\alpha} + \frac{1-i \tan \beta}{1-\alpha} \frac{2}{\partial z} \rho(z) J_f^{-1}(z) f(z) \right] - \frac{1+c^2}{2c} \right| < 1,$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial z_1}(z) = \frac{\overline{z_1}}{\rho(z) \left[2 \left| \frac{z_1}{\rho(z)} \right|^2 + \sum_{j=2}^n p_j \left| \frac{z_j}{\rho(z)} \right|^{p_j} \right]},$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial z_j}(z) = \frac{p_j \overline{z_j} \left| \frac{z_j}{\rho(z)} \right|^{p_j-2}}{2 \rho(z) \left[2 \left| \frac{z_1}{\rho(z)} \right|^2 + \sum_{j=2}^n p_j \left| \frac{z_j}{\rho(z)} \right|^{p_j} \right]},$$

$p_j \geq 1, j = 2, K, n.$

۳- نتایج اصلی

این بخش را با قضیه‌ی زیر شروع می‌کنیم.

قضیه ۱. فرض کنید $\alpha \in [0,1)$ ، $\beta \in (\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ و $c \in (0,1)$ هم‌چنین فرض کنید عملگر $F(z) = [\Phi_{n,p_2,K,p_n}(f)](z)$ به‌صورت رابطه‌ی (۴) و Ω_{n,p_2,K,p_n} به‌فرم (۵) تعریف شده باشد. اگر اعداد مختلط a_j برای هر $j = 2, K, n$ در رابطه‌ی $|a_j| \leq \frac{c(1-\alpha)}{2(1+c)} \cos \beta$ صدق نمایند، آن‌گاه F قویاً و تقریباً فرنگون از نوع β و مرتبه‌ی α بر Ω_{n,p_2,K,p_n} است اگر و تنها اگر $f(z)$ قویاً و تقریباً فرنگون از نوع β و مرتبه‌ی α بر U است. برهان. بنا به تعریف قویاً و تقریباً فرنگون از نوع β و مرتبه‌ی α ، کافی است نابرابری

$$\left| \frac{-\alpha+i \tan \beta}{1-\alpha} + \frac{1-i \tan \beta}{1-\alpha} \frac{2}{\rho(z)} \frac{\partial \rho}{\partial z}(z) \right. \tag{۷}$$

$$\left. \times J_f^{-1}(z) f(z) - \frac{1+c^2}{1-c^2} \right| \leq \frac{2c}{1-c^2},$$

را برای هر $z \in \Omega_{n,p_2,K,p_n}$ و $|a_j| \leq \frac{c(1-\alpha)}{2(1+c)} \cos \beta$ ثابت کنیم. به‌وضوح این رابطه برای $z=0$ برقرار است، لذا فرض کنیم

که در آن

$$G(z) = 2|z_1|^2 \left(\frac{1-c^2}{2c} \frac{-\alpha + i \tan \beta}{1-\alpha} + \frac{1-i \tan \beta}{1-\alpha} \frac{1-c^2}{2c} \frac{f(z_1)}{z_1 f'(z_1)} \frac{1+c^2}{1-c^2} \right) + \frac{1-c^2}{2c} \frac{1-i \tan \beta}{1-\alpha} \times \sum_{j=2}^n a_j (p_j - 1) z_j^{p_j} \times \left(\frac{f''(z_1)}{f'(z_1)} \sum_{j=2}^n |z_j|^{p_j} - 2\bar{z}_1 \right) + \sum_{j=2}^n p_j |z_j|^{p_j} \left(\frac{1-c^2}{2c} \frac{1-i \tan \beta}{1-\alpha} \times \left(1 - \frac{f(z_1) f''(z_1)}{p_j (f'(z_1))^2} \right) + \frac{1-c^2}{2c} \frac{-\alpha + i \tan \beta}{1-\alpha} \frac{1+c^2}{2c} \right) \quad (11)$$

فرض کنید

$$h(z_1) = \frac{1-c^2}{2c} \frac{-\alpha + i \tan \beta}{1-\alpha} + \frac{1-i \tan \beta}{1-\alpha} \frac{1-c^2}{2c} \frac{f(z_1)}{z_1 f'(z_1)} \frac{1+c^2}{1-c^2}. \quad (12)$$

چون $h(z_1)$ بر U قویاً و تقریباً فنرگون از نوع β و مرتبه‌ی α است، داریم $|h(z_1)| < 1$. با انجام محاسباتی داریم

$$\frac{1-c^2}{2c} \frac{1-i \tan \beta}{1-\alpha} \frac{f(z_1) f''(z_1)}{(f'(z_1))^2} = -c - h(z_1) - z_1 h'(z_1). \quad (13)$$

لذا با جایگزینی روابط (۱۲) و (۱۳) در رابطه‌ی (۱۱) داریم

$$G(z) = 2|z_1|^2 h(z_1) + \frac{1-c^2}{2c} \frac{1-i \tan \beta}{1-\alpha}$$

چون

$$F(z) = [\Phi_{n, p_2, K, p_n}(f)](z) = \left(f(z_1) + f'(z_1) \sum_{j=2}^n a_j z_j^{p_j}, (f'(z_1))^{\frac{1}{p_2}} z_2, K, (f'(z_1))^{\frac{1}{p_n}} z_n \right),$$

داریم

$$\frac{\partial \rho(z)}{\partial z} J_F^{-1}(z) F(z) = \frac{f(z_1)}{z_1 f'(z_1)} \frac{\partial \rho(z)}{\partial z_1} z_1 - \sum_{j=2}^n a_j (p_j - 1) z_j^{p_j} \frac{\partial \rho(z)}{\partial z_1} + \sum_{j=2}^n \left[1 - \frac{f(z_1) f''(z_1)}{p_j (f'(z_1))^2} + \frac{f''(z_1)}{p_j f'(z_1)} \sum_{k=2}^n a_k (p_k - 1) z_k^{p_k} \right] \frac{\partial \rho(z)}{\partial z_j} z_j. \quad (8)$$

حال بنا به لم (۳) داریم

$$\frac{\partial \rho(z)}{\partial z_1} = \frac{\bar{z}_1}{\rho(z) \left[2 \left| \frac{z_1}{\rho(z)} \right|^2 + \sum_{j=2}^n p_j \left| \frac{z_j}{\rho(z)} \right|^{p_j} \right]} = \frac{\bar{z}_1}{2|z_1|^2 + \sum_{j=2}^n p_j |z_j|^{p_j}}, \quad (9)$$

$$\frac{\partial \rho(z)}{\partial z_j} = \frac{p_j \bar{z}_j |z_j / \rho(z)|^{p_j - 2}}{2\rho(z) \left[2 \left| \frac{z_1}{\rho(z)} \right|^2 + \sum_{j=2}^n p_j \left| \frac{z_j}{\rho(z)} \right|^{p_j} \right]} = \frac{p_j \bar{z}_j |z_j|^{p_j - 2}}{2 \left[2|z_1|^2 + \sum_{j=2}^n p_j |z_j|^{p_j} \right]}$$

از روابط (۸) و (۹) داریم

$$\frac{1-c^2}{2c} \left(\frac{-\alpha + i \tan \beta}{1-\alpha} + \frac{1-i \tan \beta}{1-\alpha} \frac{2\partial \rho}{\partial z} (z) J_F^{-1} F(z) \right) - \frac{1+c^2}{2c} = \frac{G(z)}{2|z_1|^2 + \sum_{j=2}^n p_j |z_j|^{p_j}} \quad (10)$$

$$\begin{aligned}
 &= |h(z_1)|(1+|z_1|^2)+|z_1|(1-|h(z_1)|^2)+ \\
 &\sum_{j=2}^n \left(c + \frac{4}{\cos \beta} \frac{1-c^2}{2c} |a_j| \right) (p_j-1) |z_j|^{p_j} \\
 &\leq (1+|z_1|^2)(|h(z_1)|-1) + (1+|z_1|^2) \\
 &+ 2|z_1|(1-|h(z_1)|) \\
 &+ \sum_{j=2}^n \left(c + \frac{2}{(1-\alpha)\cos \beta} \frac{1-c^2}{c} |a_j| \right) (p_j-1) |z_j|^{p_j} \\
 &= (1+|z_1|^2) + (1-|z_1|^2)^2 (|h(z_1)|-1) \\
 &+ \sum_{j=2}^n \left(c + \frac{2}{(1-\alpha)\cos \beta} \frac{1-c^2}{c} |a_j| \right) (p_j-1) |z_j|^{p_j}
 \end{aligned}$$

اگر $|a_j| \leq \frac{c(1-\alpha)}{2(1+c)} \cos \beta$ آن‌گاه داریم

$$\begin{aligned}
 |G(z)| &\leq (1+|z_1|^2) \\
 &+ (1-|z_1|^2)^2 (|h(z_1)|-1) \\
 &+ \sum_{j=2}^n (p_j-1) |z_j|^{p_j} \tag{۱۴} \\
 &\leq 2|z_1|^2 + \sum_{j=2}^n p_j |z_j|^{p_j}
 \end{aligned}$$

از روابط (۱۰) و (۱۴) داریم

$$\begin{aligned}
 &\left| \frac{1-c^2}{2c} \left[\frac{-\alpha+i \tan \beta}{1-\alpha} \right. \right. \\
 &+ \left. \frac{1-i \tan \beta}{1-\alpha} \frac{2\partial \rho}{\partial z}(z) J_f^{-1}(z) f(z) \right] \\
 &\left. - \frac{1+c^2}{2c} \right| < 1.
 \end{aligned}$$

بنابراین F قویاً و تقریباً فرگون از نوع β و مرتبه α است.

برعکس، نشان می‌دهیم اگر

$$\begin{aligned}
 F(z) &= [\Phi_{n,p_2,K,p_n}(f)](z) \\
 &= \left(f(z_1) + f'(z_1) \sum_{j=2}^n a_j z_j^{p_j}, \right. \\
 &\left. (f'(z_1))^{\frac{1}{p_2}} z_2, K, (f'(z_1))^{\frac{1}{p_n}} z_n \right),
 \end{aligned}$$

قویاً و تقریباً فرگون از نوع β و مرتبه α باشد،

$$\begin{aligned}
 &\times \sum_{j=2}^n a_j (p_j-1) z_j^{p_j} \left(\frac{f''(z_1)}{f'(z_1)} \sum_{j=2}^n |z_j|^{p_j} - 2\bar{z}_1 \right) \\
 &+ \sum_{j=2}^n p_j \left(\frac{1-c^2}{2c} \frac{1-i \tan \beta}{1-\alpha} \right. \\
 &+ \left. \frac{c}{p_j} + \frac{1-c^2}{2c} \frac{-\alpha+i \tan \beta}{1-\alpha} - \frac{1+c^2}{2c} \right) |z_j|^{p_j} \\
 &+ h(z_1) \sum_{j=2}^n |z_j|^{p_j} + z_1 h'(z_1) \sum_{j=2}^n |z_j|^{p_j}
 \end{aligned}$$

چون $z \in \partial \Omega_{n,p_2,K,p_n}$

$$|z_1|^2 + \sum_{j=2}^n |z_j|^{p_j} = 1$$

لذا داریم

$$\begin{aligned}
 G(z) &= 2|z_1|^2 h(z_1) + \frac{1-c^2}{2c} \frac{1-i \tan \beta}{1-\alpha} \\
 &\times \sum_{j=2}^n a_j (p_j-1) z_j^{p_j} \left(\frac{f''(z_1)}{f'(z_1)} (1-|z_1|^2) - 2\bar{z}_1 \right) \\
 &+ \sum_{j=2}^n p_j \left(\frac{1-c^2}{2c} \frac{1-i \tan \beta}{1-\alpha} + \frac{c}{p_j} \right. \\
 &+ \left. \frac{1-c^2}{2c} \frac{-\alpha+i \tan \beta}{1-\alpha} - \frac{1+c^2}{2c} \right) |z_j|^{p_j} \\
 &+ h(z_1)(1-|z_1|^2) + z_1 h'(z_1)(1-|z_1|^2).
 \end{aligned}$$

بنابراین داریم

$$\begin{aligned}
 |G(z)| &\leq |h(z_1)|(1+|z_1|^2) \\
 &+ |z_1 h'(z_1)|(1-|z_1|^2) + \sum_{j=2}^n c(p_j-1) |z_j|^{p_j} \\
 &+ \frac{1-c^2}{2c} \left| \frac{1-i \tan \beta}{1-\alpha} \right| \\
 &\times \sum_{j=2}^n |a_j| (p_j-1) |z_j|^{p_j} \left| \frac{f''(z_1)}{f'(z_1)} (1-|z_1|^2) - 2\bar{z}_1 \right|
 \end{aligned}$$

لذا از لم (۱) و (۲) داریم

$$\begin{aligned}
 |G(z)| &\leq |h(z_1)|(1+|z_1|^2) + \\
 &|z_1|(1-|h(z_1)|^2) + c \sum_{j=2}^n (p_j-1) |z_j|^{p_j} \\
 &+ \frac{4}{(1-\alpha)\cos \beta} \frac{1-c^2}{2c} \sum_{j=2}^n |a_j| (p_j-1) |z_j|^{p_j}
 \end{aligned}$$

تحلیلی کافی است رابطه‌ی (۱۵) را برای هر $\rho(z) = 1$ و $\hat{z} \neq 0$ ثابت کنیم. لذا کافی است نشان دهیم

$$\left| \frac{1-c^2}{2c} \left[\frac{-\alpha + i \tan \beta}{1-\alpha} + \frac{1-i \tan \beta}{1-\alpha} \right] \times \frac{2\partial\rho}{\partial z}(z) J_f^{-1}(z) f(z) \right| - \frac{1+c^2}{2c} < 1,$$

چون

$$F(z) = [\Phi_{n,p_j}(f)](z) = \left(f(z_1) + f'(z_1) \sum_{j=2}^n P_j(z_j), (f'(z_1))^{p_2} z_2, K, (f'(z_1))^{p_n} z_n \right),$$

پس

$$J_F(z) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \alpha_2 & \Lambda & \alpha_n \\ \beta_2 & \lambda_2 I_{n-1} & \Lambda & 0 \\ M & M & O & M \\ \beta_n & 0 & \Lambda & \lambda_n I_{n-1} \end{bmatrix}$$

که در آن I_{n-1} عملگر همانی در فضای \mathbf{C}^{n-1} است و

$$\lambda_1 = f'(z_1) + f''(z_1) \sum_{j=2}^n P_j(z_j),$$

$$\lambda_j = (f'(z_1))^{p_j}, \quad j = 2, K, n,$$

$$\alpha_j = f'(z_1) \nabla P_j(z_j),$$

$$\beta_j = \frac{1}{p_j} (f'(z_1))^{p_j-1}$$

$$f''(z_1) z_j, \quad j = 2, K, n.$$

قرار می‌دهیم

$$J_F^{-1}(z) F(z) = A = (x_1, x_2, K, x_n) \in \mathbf{C}^n$$

داریم

$$x_1 = \frac{f(z_1)}{f'(z_1)} - \sum_{j=2}^n (p_j - 1) P_j(z_j),$$

آن‌گاه f نیز چنین است. در واقع اگر $z = (z_1, 0, K, 0) \in \Omega_{n,p_2,K,p_n}$ ، $z_1 \neq 0$ آن‌گاه

برای $0 < |z_1| < 1$ بنا به روابط (۸) و (۹) داریم

$$\left| \frac{1-c^2}{2c} \left[\frac{-\alpha + i \tan \beta}{1-\alpha} + \frac{1-i \tan \beta}{1-\alpha} \frac{f(z_1)}{z_1 f'(z_1)} \right] - \frac{1+c^2}{2c} \right| < 1.$$

و حکم ثابت می‌شود.

قضیه ۲. فرض کنید $\alpha \in [0, 1)$ ، $\beta \in (\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ و $c \in (0, 1)$ هم‌چنین فرض کنید عملگر $F(z) = [\Phi_{n,p_j}(f)](z)$ به صورت رابطه‌ی

$F(z) = [\Phi_{n,p_j}(f)](z) = \left(f(z_1) + f'(z_1) \sum_{j=2}^n P_j(z_j), (f'(z_1))^{p_2} z_2, K, (f'(z_1))^{p_n} z_n \right)$

$$F(z) = [\Phi_{n,p_j}(f)](z) = \left(f(z_1) + f'(z_1) \sum_{j=2}^n P_j(z_j), (f'(z_1))^{p_2} z_2, K, (f'(z_1))^{p_n} z_n \right),$$

بر Ω_{n,p_2,K,p_n} تعریف شده باشد. اگر $\|P_j\| \leq \frac{c(1-\alpha)}{2(1+c)} \cos \beta$ آن‌گاه $f(z)$ قویاً و تقریباً فرنگون از نوع β و مرتبه‌ی α بر U است، اگر و تنها F قویاً و تقریباً فرنگون از نوع β و مرتبه‌ی α بر Ω_{n,p_2,K,p_n} باشد.

برهان. بنا به تعریف (۳) کافی است برای هر

$$\|P_j\| \leq \frac{c(1-\alpha)}{2(1+c)} \cos \beta \quad \text{و} \quad z \neq 0, \quad z \in \Omega_{n,p_2,K,p_n}$$

ثابت کنیم

$$\left| \frac{1-c^2}{2c} \left[\frac{-\alpha + i \tan \beta}{1-\alpha} + \frac{1-i \tan \beta}{1-\alpha} \right] \times \frac{2}{\rho(z)} \frac{\partial\rho}{\partial z}(z) J_f^{-1}(z) f(z) \right| - \frac{1+c^2}{2c} < 1 \quad (۱۵)$$

مشابه قضیه‌ی (۱)، بنا به اصل مدول مینیمم برای توابع

$$\begin{aligned}
 G(z) &= \frac{1-c^2}{2c} \left[\frac{-\alpha+i \tan \beta}{1-\alpha} (2|z_1|^2 + \sum_{j=2}^n p_j |z_j|^{p_j}) \right. \\
 &+ \frac{1-i \tan \beta}{1-\alpha} [2|z_1|^2 \frac{f(z_1)}{z_1 f'(z_1)} \\
 &+ \sum_{j=2}^n p_j |z_j|^{p_j} (1 - \frac{f(z_1) f''(z_1)}{p_j (f'(z_1))^2}) + \\
 &\left. \sum_{j=2}^n (p_j - 1) P_j(z_j) \left(\frac{f''(z_1)}{f'(z_1)} \sum_{k=2}^n |z_k|^{p_k} - 2\bar{z}_1 \right) \right] \\
 &- \frac{1+c^2}{2c} \left(2|z_1|^2 + \sum_{j=2}^n p_j |z_j|^{p_j} \right) \\
 &= 2|z_1|^2 \left[\frac{1-c^2}{2c} \frac{-\alpha+i \tan \beta}{1-\alpha} + \right. \\
 &\left. \frac{1-i \tan \beta}{1-\alpha} \frac{1-c^2}{2c} \frac{f(z_1)}{z_1 f'(z_1)} - \frac{1+c^2}{2c} \right] \\
 &+ \frac{1-c^2}{2c} \frac{1-i \tan \beta}{1-\alpha} \sum_{j=2}^n (p_j - 1) P_j(z_j) \\
 &\left(\frac{f''(z_1)}{f'(z_1)} \sum_{k=2}^n |z_k|^{p_k} - 2\bar{z}_1 \right) \\
 &+ \frac{1-c^2}{2c} \frac{1-i \tan \beta}{1-\alpha} \sum_{j=2}^n p_j \left(1 - \frac{f(z_1) f''(z_1)}{p_j (f'(z_1))^2} \right) |z_j|^{p_j} \\
 &+ \sum_{j=2}^n p_j \left[\frac{1-c^2}{2c} \frac{-\alpha+i \tan \beta}{1-\alpha} - \frac{1+c^2}{2c} \right] |z_j|^{p_j}
 \end{aligned} \tag{۱۹}$$

فرض کنید

$$\begin{aligned}
 h(z_1) &= \frac{1-c^2}{2c} \frac{-\alpha+i \tan \beta}{1-\alpha} \\
 &+ \frac{1-i \tan \beta}{1-\alpha} \frac{1-c^2}{2c} \frac{f(z_1)}{z_1 f'(z_1)} - \frac{1+c^2}{1-c^2}.
 \end{aligned} \tag{۲۰}$$

چون $h(z_1)$ بر U قویاً و تقریباً فرنگون از نوع β و مرتبه α است، داریم $|h(z_1)| < 1$. با انجام محاسباتی داریم

$$\begin{aligned}
 &\frac{1-c^2}{2c} \frac{1-i \tan \beta}{1-\alpha} \frac{f(z_1) f''(z_1)}{(f'(z_1))^2} \\
 &= -c - h(z_1) - z_1 h'(z_1).
 \end{aligned} \tag{۲۱}$$

$$\begin{aligned}
 x_2 &= \\
 &\left(1 - \frac{f(z_1) f''(z_1)}{p_2 (f'(z_1))^2} + \frac{f''(z_1)}{p_2 f'(z_1)} \sum_{j=2}^n (p_j - 1) P_j(z_j) \right) z_2, \\
 &\vdots \\
 x_n &= \\
 &\left(1 - \frac{f(z_1) f''(z_1)}{p_n (f'(z_1))^2} + \frac{f''(z_1)}{p_n f'(z_1)} \sum_{j=2}^n (p_j - 1) P_j(z_j) \right) z_n.
 \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \rho(z)}{\partial z} J_F^{-1}(z) F(z) &= \\
 &\frac{f(z_1)}{z_1 f'(z_1)} \frac{\partial \rho(z)}{\partial z_1} z_1 \\
 &- \sum_{j=2}^n (p_j - 1) P_j(z_j) \frac{\partial \rho(z)}{\partial z_1} \\
 &+ \sum_{j=2}^n \left(1 - \frac{f(z_1) f''(z_1)}{p_j (f'(z_1))^2} \right. \\
 &\left. + \frac{f''(z_1)}{p_j f'(z_1)} \sum_{k=2}^n (p_k - 1) P_k(z_k) \right) \frac{\partial \rho(z)}{\partial z_j} z_j.
 \end{aligned} \tag{۱۶}$$

حال از لم (۳) داریم

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \rho}{\partial z_1}(z) &= \frac{\bar{z}_1}{2|z_1|^2 + \sum_{j=2}^n p_j |z_j|^{p_j}}, \\
 \frac{\partial \rho}{\partial z_j}(z) &= \frac{p_j \bar{z}_j |z_j|^{p_j-2}}{2 \left(2|z_1|^2 + \sum_{j=2}^n p_j |z_j|^{p_j} \right)}.
 \end{aligned} \tag{۱۷}$$

از روابط (۱۶) و (۱۷) داریم

$$\begin{aligned}
 &\frac{1-c^2}{2c} \left(\frac{-\alpha+i \tan \beta}{1-\alpha} + \frac{1-i \tan \beta}{1-\alpha} \frac{2 \partial \rho}{\partial z}(z) J_F^{-1} F(z) \right) \\
 &- \frac{1+c^2}{2c} = \frac{G(z)}{2|z_1|^2 + \sum_{j=2}^n p_j |z_j|^{p_j}}
 \end{aligned} \tag{۱۸}$$

که در آن

بنابراین، برای $j = 2, K, n$ داریم

$$\|P_j\| \leq \frac{c(1-\alpha)}{2(1+c)} \cos \beta$$

$$|G(z)| \leq 1 + |z_1|^2 + \sum_{j=2}^n (p_j - 1) |z_j|^{p_j}$$

$$= 2|z_1|^2 + \sum_{j=2}^n p_j |z_j|^{p_j} \quad (22)$$

لذا از روابط (۱۸) و (۲۲) داریم

$$\left| \frac{1-c^2}{2c} \left[\frac{-\alpha + i \tan \beta}{1-\alpha} + \frac{1-i \tan \beta}{1-\alpha} \right] \right.$$

$$\left. \times \frac{2\partial \rho}{\partial z}(z) J_F^{-1}(z) F(z) \right| - \frac{1+c^2}{2c} < 1,$$

F قویاً و تقریباً فرنگون از نوع β و مرتبه‌ی α بر Ω_{n,p_2,K,p_n} است.

برعکس، نشان می‌دهیم اگر

$$F(z) = \left(f(z_1) + f'(z_1) \sum_{j=2}^n P_j(z_j), \right.$$

$$\left. (f'(z_1))^{p_2} z_2, K, (f'(z_1))^{p_n} z_n \right),$$

قویاً و تقریباً فرنگون از نوع β و مرتبه‌ی α باشد، آن‌گاه f نیز چنین است. در واقع اگر $z_1 \neq 0, z = (z_1, 0, K, 0) \in \Omega_{n,p_2,K,p_n}$

برای $0 < |z_1| < 1$ بنا به روابط (۸) و (۹) داریم

$$\left| \frac{1-c^2}{2c} \left[\frac{-\alpha + i \tan \beta}{1-\alpha} \right] \right.$$

$$\left. + \frac{1-i \tan \beta}{1-\alpha} \frac{f(z_1)}{z_1 f'(z_1)} \right| - \frac{1+c^2}{2c} < 1.$$

و حکم ثابت می‌شود.

تذکره ۳. با فرض $\alpha = 0, \beta = 0$ و $\alpha = \beta = 0$ در قضایای ۱ و ۲، نتایج مربوط به مفاهیم قویاً فرنگون از

لذا با جایگذاری روابط (۲۰) و (۲۱) در رابطه‌ی (۱۹) داریم

$$G(z) = 2|z_1|^2 h(z_1) + \frac{1-c^2}{2c} \frac{1-i \tan \beta}{1-\alpha}$$

$$\times \sum_{j=2}^n (p_j - 1) P_j(z_j) \left(\frac{f''(z_1)}{f'(z_1)} \sum_{k=2}^n |z_k|^{p_k} - 2\bar{z}_1 \right)$$

$$+ \sum_{j=2}^n p_j \left[\frac{1-c^2}{2c} \frac{-\alpha + i \tan \beta}{1-\alpha} - \frac{1+c^2}{2c} \right] |z_j|^{p_j}$$

$$+ \frac{1-c^2}{2c} \frac{1-i \tan \beta}{1-\alpha} \sum_{j=2}^n p_j |z_j|^{p_j}$$

$$+ h(z_1) \sum_{j=2}^n |z_j|^{p_j} + z_1 h'(z_1) \sum_{j=2}^n |z_j|^{p_j}$$

$$+ c \sum_{j=2}^n |z_j|^{p_j}.$$

حال بنا به لم (۱) و (۲) داریم

$$|G(z)| \leq (1 + |z_1|^2) |h(z_1)|$$

$$+ \sum_{j=2}^n c(p_j - 1) |z_j|^{p_j}$$

$$+ |z_1| \frac{1 - |h(z_1)|^2}{1 - |z_1|^2} (1 - |z_1|^2)$$

$$+ \frac{4}{(1-\alpha) \cos \beta} \frac{1-c^2}{2c} \sum_{j=2}^n (p_j - 1) |P_j(z_j)|$$

$$\leq (1 + |z_1|^2) |h(z_1)| + |z_1| (1 - |h(z_1)|^2)$$

$$+ \sum_{j=2}^n \left(c + \frac{2}{\cos \beta} \frac{1-c^2}{c(1-\alpha)} P_j \right) (p_j - 1) |z_j|^{p_j}$$

$$\leq (1 + |z_1|^2) (|h(z_1)| - 1) + (1 + |z_1|^2)$$

$$+ 2|z_1| (1 - |h(z_1)|)$$

$$+ \sum_{j=2}^n \left(c + \frac{2}{\cos \beta} \frac{1-c^2}{c(1-\alpha)} P_j \right) (p_j - 1) |z_j|^{p_j}$$

$$= 1 + |z_1|^2 + (1 - |z_1|^2)^2 (|h(z_1)| - 1)$$

$$+ \sum_{j=2}^n \left(c + \frac{2}{\cos \beta} \frac{1-c^2}{c(1-\alpha)} P_j \right)$$

$$\times (p_j - 1) |z_j|^{p_j}$$

نوع β ، قویاً و تقریباً فنرگون از مرتبه‌ی α و قویاً ستارگون را به دست می‌آوریم.

نتیجه‌گیری

از آن جایی که یافتن مثال برای توابع محدب، ستارگون، فنرگون و ... در فضای n -بعدی B^n بسیار دشوار است لذا عملگر توسیعی رافر-سافرینج و تعمیم‌های آن روش بسیار ساده‌ای جهت ارائه مثال‌هایی این چنینی را در این فضا فراهم می‌آورد. در این مقاله، با بررسی شرایط خاصی به ترتیب برای a_j و P_j نشان دادیم که تحت آن شرایط، عملگرهای توسیع $\Phi_{n,P_j}(f)$ و $\Phi_{n,p_2,K,p_n}(f)$ قویاً فنرگونی و تقریباً فنرگونی از نوع β و مرتبه‌ی α را بر $\Omega_{n,p_1,\wedge,p_n}$ حفظ می‌نماید.

starlike mappings. *I*, Chin. Annal. Math. Ser. A., 23(3)(2002), 273-282.

[11] X. S. Liu and T. S. Liu, The generalized Roper-Suffridge extension operator on a Reinhardt domain and the unit ball in a complex Hilbert space, Chin. Annal. Math. Ser. A., 26(5)(2005), 721-730.

[12] T. S. Liu and G. B. Ren, The growth theorem for starlike mappings on bounded starlike circular domains, Chin. Annal. Math. Ser. B., 19(4)(1998), 401-408.

[13] J. R. Muir, A class of the Loewner chain preserving extension operators, Comput. Meth. func. Theo., 5(1)(2005), 237-251.

[14] C. Pommerenke, Univalent functions, Vandenhoeck and Ruprecht, \ddot{O} Gttingen, Germany, (1975).

[15] S. Rahrovi, A. Ebadian and S. Shams, G-Loewner chains and parabolic starlike mappings in several complex variables, General Math., 20(2-3)(2012), 59-73.

[16] S. Rahrovi, A. Ebadian and S. Shams, Applications of the Roper-Suffridge Extension Operator to the Spirallike mappings of type β , Acta Uni. Apul., 37(2014), 171-183.

[17] S. Rahrovi, Parabolic starlike mappings on the unit ball B^n , Sahand Commu. Math. Anal., 3(1)(2016), 63-70.

[18] S. Rahrovi and H. Piri, The generalized Roper-Suffridge extension operator on the Reinhardt domains, J. Math. System Sci. 6(2016) 383-394.

[19] K. A. Roper and T. J. Suffridge, Convex mappings on the unit ball \mathbb{C}^n , J. Anal. Math., 65(1995), 333-347.

[1] Y. Cui, C. Wang and H. Liu, The invariance strong and almost starlike mapping of type β and order α , Acta Math. Sci. Ser. B, 35(6)(2015), 1454-1466.

[2] S. X. Feng, T. S. Liu and G. B. Ren, The growth and covering theorems for several mappings on the unit ball in complex Banach spaces, Chin. Ann. Math., 28A(2)(2007), 215-230.

[3] S. X. Feng and T. S. Liu, Modified Roper-Suffridge operator for some holomorphic mappings, Front. Math. Chin., 6(3)(2011), 411-426.

[4] S. Gong and T. S. Liu, On the Roper-Suffridge extension operator, J. Anal. Math., 88(2002), 397-404.

[5] S. Gong and T. S. Liu, The generalized Roper-Suffridge extension operator, J. Math. Anal. Appl., 284(2)(2003), 425-434.

[6] I. Graham and G. Kohr, Univalent mappings associated with the Roper-Suffridge extension operator, J. Anal. Math., 81(2000), 331-342.

[7] I. Graham and G. Kohr, Geometric function theory in one and higher dimensions, Marcel Dekker, New York, (2003).

[8] G. Kohr, Loewner chains and a modification of the Roper-Suffridge extension operator, Mathematica (Cluj), 48(1)(2006), 41-48.

[9] H. Li, S. Feng, Roper-Suffridge extension operator on a Reinhardt domain, Acta. Math. Sci., 34B (2014), No. 6, 1761-1774.

[10] T. S. Liu and S. Gong, The family of

Annal. Math. Ser. A., 31(4)(2010), 487-496.

[23] Y. C Zhu and M. S. Liu, The generalized Roper-Suffridge extension operator on a Reinhardt domain D_p , Taiwanese J. Math., 14(2)(2010), 359-372.

[24] W. J. Zhang and T. S. Liu, On decomposition theorem of normalized biholomorphic convex mappings in Reinhardt domains, Sci. Chin., 46(1)(2003), 94-106.

[20] J. Wang, Modified Roper-Suffridge for some subclasses of starlike mappings on Reinhardt domains, Act. Math. Sci., 33(6)(2013), 1627-1638.

[21] J. Wang and C. Gao, A new Roper-Suffridge extension operator on a Reinhardt domain, Abst. Appl. Anal.,(2011), 1-14.

[22] J. F. Wang and T. S. Liu, A modified Roper-Suffridge extension operator for some holomorphic mappings, Chin.