دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال ششم، شماره بیست و چهارم، خرداد و تیر ۱۳۹۹
شماره شاپا: ۲۵۸۸X-۵۸۸

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
پژوهش‌های نوین در ریاضی

اشتقاق‌های نقطه‌ای پیوسته روی جبرهای باناخ عملگرهای برداری-مقدار α-لیپشیتس

عباسعلی شکری*

گروه ریاضی، واحد اهر، دانشگاه آزاد اسلامی، اهر، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۶/۱۲/۱۱ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۸/۰۸/۰۱

چکیده

جبرهای توابع لیپشیتس اولین بار در دهه شصت قرن بیستم توسط برخی ریاضیدانان از جمله شربرت تعریف و مورد توجه قرار گرفت. در ابتدا، جبرهای توابع لیپشیتس حقیقی-مقدار و مختلط-مقدار تعریف، و خواص کمی از این جبرها بررسی شدند. با گذشت زمان این جبرها توسط ریاضیدانان زیادی همچون کائو، ژانگ، زو، ویور، و ... مورد مطالعه قرار گرفته و تعمیم داده شدند. فرض کنید (X,d) یک فضای متریک فشرده غیر تهی، $(B,\|.\|)$ یک فضای باناخ جابجایی یکدار روی میدان اسکالر $\mathbb{F}$ ($=\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$) و $0<\alpha\le 1$ باشد. در این مقاله، ما ابتدا جبرهای باناخ عملگرهای برداری-مقدار (B-مقدار) α-لیپشیتس روی X، $Lip_\alpha(X,B)$ و $lip_\alpha(X,B)$، را معرفی نموده، سپس اشتقاق‌های نقطه‌ای پیوسته روی این جبرها را تعریف و مورد مطالعه قرار می‌دهیم. در نتایج اصلی این مقاله، ثابت می‌کنیم که تمام اشتقاق‌های نقطه‌ای پیوسته روی $lip_\alpha(X,B)$ صفرند، و در هر نقطه غیر ایزوله X، یک اشتقاق نقطه‌ای پیوسته غیر صفر روی $Lip_\alpha(X,B)$ وجود دارد.

واژه‌های کلیدی: همریختی، فضای متریک، اشتقاق، جبرهای لیپشیتس، طیف.

رده‌بندی موضوعی ریاضیات (۲۰۱۰): 47B48 , 47B38 , 47B37.

*. عهده‌دار مکاتبات: E-mail: a-shokri@iau-ahar.ac.ir

۱- مقدمه

در خصوص جبرهای باناخ مقالات متعددی توسط افراد مختلفی ارائه شده‌اند که از جمله آنها می‌توان به مواردی مثل [۴-۱] اشاره نمود. در این مقاله، ما برخی ویژگی نوع خاصی از جبرهای باناخ، جبرهای عملگرهای لیپشیتس، را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

فرض کنید (X,d) یک فضای متریک فشرده غیر تهی، $(B,\|.\|)$ یک فضای باناخ جابجایی یکدار روی میدان اسکالر $\mathbb{F}$ ($=\mathbb{C}$ یا $\mathbb{R}$)، و $0<\alpha\le 1$ باشد. فضای باناخ عملگرهای برداری-مقدار (B-مقدار) α-لیپشیتس در سال ۲۰۰۶ در مقاله‌ای توسط *کائو*، *ژانگ* و *زو* تعریف شدند و برخی خواص این فضاها مورد مطالعه قرار گرفتند [۵].

فرض کنید $C(X,B)$ مجموعه تمام عملگرهای پیوسته B-مقدار روی X باشد. برای هر $f,g\in C(X,B)$، $x\in X$ و $\beta\in\mathbb{F}$ تعریف کنید:

$$(f+g)(x)=f(x)+\ g(x)\,,$$
$$(\beta f)(x)=\ \beta f(x)\,,$$
$$\|f\|_X=\ \max_{x\in X}\ \|f(x)\|.$$

در اینصورت $(C(X,B)\ ,\ \|.\|_X\ )$ با ضرب نقطه وار یک جبر باناخ روی میدان اسکالر $\mathbb{F}$ است. زمانی که $B=\mathbb{F}$ باشد، به‌جای $\mathrm{C(X,B)}$ می‌نویسیم $C(X)$.

فرض کنید $C_b(X,B)$ مجموعه تمام عملگرهای پیوسته B-مقدار کراندار روی X باشد. عملگر $f\in C_b(X,B)$ یک عملگر α-*لیپشیتس* B-مقدار روی X نامیده می‌شود هرگاه یک ثابت مثبت مانند M چنان موجود باشد که شرط زیر برقرار گردد:

$$\frac{\|f(x)-f(y)\|}{d^{\alpha}\,(x,y)}\le M\ \ ;\ \ (x,y\in X\,,x\neq y),$$

که در آن $d^{\alpha}(x,y)=(d(x,y))^{\alpha}$.

کوچکترین مقدار چنین Mهایی را با نماد $p_\alpha(f)$ نشان داده و آن را *ثابت α-لیپشیتس* عملگر B-مقدار f می‌نامند. در واقع:

$$p_\alpha(f):=\inf\{M>0\ :\ \|f(x)-f(y)\|\ \le M\,d^{\alpha}(x,y),x,y\ \in X\}=\ \sup_{x\neq y}\frac{\|f(x)-f(y)\|}{d^{\alpha}\,(x,y)}\,;$$

که در آن $(x,y\in X)$. اکنون برای هر $0<\alpha\le 1$ تعریف کنید:

$$\mathrm{Lip}_\alpha(X,B):=\{f\in C_b(X,B)\ :\ p_\alpha(f)<\infty\}\,,$$
$$\mathrm{lip}_\alpha(X,B):=\Big\{f\in Lip_\alpha(X,B)\ :\ \lim_{d(x,y)\to 0}\frac{\|f(x)-f(y)\|}{d^{\alpha}(x,y)}=0\ ;\ x,y\in X\,,x\neq y\Big\}.$$

اعضای $\mathrm{Lip}_\alpha(\mathrm{X,B})$ و $\mathrm{lip}_\alpha(\mathrm{X,B})$ به‌ترتیب عملگرهای B-مقدار α-لیپشیتس بزرگ و کوچک نامیده می‌شوند.

برای هر $f\in\mathrm{Lip}_\alpha(X,B)$ تعریف کنید:

$$\|f\|_\alpha:=\|f\|_X+\ p_\alpha(f)$$

کائو، ژانگ و زو ثابت کردند که $(\mathrm{Lip}_\alpha(X,B),\|.\|_\alpha)$ یک فضای باناخ روی میدان اسکالر $\mathbb{F}$، و $\mathrm{lip}_\alpha(X,B)$ یک زیر فضای خطی $(\mathrm{Lip}_\alpha(X,B),\|.\|_\alpha)$ است [۵]. بدیهی است که $\mathrm{Lip}_\alpha(X,B)$ نیز یک زیر فضای خطی $C_b(X,B)$ است.

شربرت [۶]، شکری [۷]، علیمحمدی و همکاران [۸]، امیری و همکاران [۹]، کامورا [۱۰]، و ...، برخی از خواص جبرهای لیپشیتس را مورد مطالعه قرار دادند و در بعضی موارد خواص این جبرها را تعمیم دادند. بعضی از این خواص در [۱۲و۱۱] آمده است.

در این مقاله، ما اشتقاق‌های نقطه‌ای پیوسته روی جبرهای باناخ عملگرهای B-مقدار α-لیپشیتس را تعریف نموده و برخی خواص آن‌ها را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

۲- لم‌ها و نتایج اصلی

در سراسر این مقاله فرض کنید (X,d) یک فضای متریک فشرده غیر تهی، $(B,\|.\|)$ یک فضای باناخ جابجایی یکدار روی میدان اسکالر $\mathbb{F}$ ($=\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$)، $\alpha\in(0,1]$، و A^* دوگان اول فضای باناخ A باشد. *طیف* B، مجموعه تمام همریختی‌های (تابعک‌های ضربی) غیر صفر روی B، را با نماد $\sigma(B)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱.۲. فرض کنید $a\in X$، و $\Lambda\in\sigma(B)$ یک همریختی غیر صفر دلخواه و ثابت (fix) باشد (اگر $B=\mathbb{F}$ باشد، Λ را نگاشت همانی بگیرید.). یک تابعک

خطی کراندار d روی $\mathrm{Lip}_\alpha(X,B)$ یک اشتقاق نقطه‌ای در a نامیده می‌شود هرگاه برای هر $f,g\in \mathrm{Lip}_\alpha(X,B)$ داشته باشیم:

$$d(fg)=(\Lambda\, o\, f)(a)\, d(g)+(\Lambda\, o\, g)(a)\, d(f).$$

لم ۲.۲. فرض کنید $a\in X$، و $\Lambda\in\sigma(B)$ یک همریختی غیر صفر دلخواه و ثابت (fix) باشد. قرار دهید:

$$I(\{a\}):=\{f\in \mathrm{lip}_\alpha(X,B)\ :\ (\Lambda\, o\, f)(a)=0\}.$$

در اینصورت $I(\{a\})$ یک ایده‌ال بسته در $\mathrm{lip}_\alpha(X,B)$ است.

برهان: فرض کنید $f\in I(\{a\})$ و $g\in \mathrm{lip}_\alpha(X,B)$ دلخواه باشند در اینصورت:

$$(\Lambda\, o\, (fg))(a)=(\Lambda\, o\, f)(a)\,(\Lambda\, o\, g)(a)=0,$$
$$(\Lambda\, o\, (gf))(a)=(\Lambda\, o\, g)(a)\,(\Lambda\, o\, f)(a)=0.$$

لذا $fg, gf\in I(\{a\})$ و این یعنی $I(\{a\})$ یک ایده‌آل $\mathrm{lip}_\alpha(X,B)$ است.

حال فرض کنید $\{f_n\}\subset I(\{a\})$ یک دنباله دلخواه باشد و $f_n\to f$ در $\mathrm{lip}_\alpha(X,B)$ با $\|.\|_\alpha$. در این صورت $f_n(a)\to f(a)$ در B با $\|.\|$. لذا $(\Lambda\, o\, f_n)(a)\to(\Lambda\, o\, f)(a)$ در $\mathbb{F}$ با $|.|$. چون برای هر $n\in\mathbb{N}$ داریم $(\Lambda\, o\, f_n)(a)=0$، پس $(\Lambda\, o\, f)(a)=0$. این یعنی $f\in I(\{a\})$. بنابراین $I(\{a\})$ یک ایده ال بسته است.

لم ۳.۲. فرض کنید $x_0\in X$ دلخواه و بعد از این ثابت (fix) باشد. همچنین فرض کنید $\boldsymbol{e}$ عنصر یکه جبر باناخ B باشد. نگاشت f_0 را روی X چنین تعریف کنید:

$$f_0(x):=d^\alpha(x,x_0)\,\boldsymbol{e}\ \ ;\ \ x\in X.$$

در این‌صورت $f_0\in \mathrm{Lip}_\alpha(X,B)$.

برهان: به وضوح برای هر $x\in X$، $f_0(x)\in B$ است. پس برای تکمیل برهان، کافیست نشان دهیم که $p_\alpha(f_0)<\infty$. برای این منظور داریم:

$$p_\alpha(f_0)=\sup_{x\neq y}\frac{\|f_0(x)-f_0(y)\|}{d^\alpha(x,y)}$$
$$=\sup_{x\neq y}\frac{\|d^\alpha(x,x_0)\,\boldsymbol{e}-d^\alpha(y,x_0)\,\boldsymbol{e}\,\|}{d^\alpha(x,y)}$$
$$=\sup_{x\neq y}\frac{|d^\alpha(x,x_0)-d^\alpha(y,x_0)|\ \|\boldsymbol{e}\|}{d^\alpha(x,y)}\quad(\|\boldsymbol{e}\|=1)$$
$$\le\sup_{x\neq y}\ \frac{d^\alpha(x,y)}{d^\alpha(x,y)}=1<\infty.$$

حال نتایج اصلی را در قالب دو قضیه به‌صورت زیر بیان و ثابت می‌کنیم.

قضیه ۴.۲. فرض کنید $0<\alpha<1$ باشد. تمام اشتقاق‌های نقطه‌ای پیوسته روی $\mathrm{lip}_\alpha(X,B)$ صفرند.

برهان: فرض کنید $a\in X$، و $\Lambda\in\sigma(B)$ یک همریختی غیرصفر دلخواه و ثابت (fix) باشد. همچنین فرض کنید $d\in(\mathrm{lip}_\alpha(X,B))^*$ یک اشتقاق نقطه‌ای پیوسته دلخواه در a باشد. در این‌صورت برای هر $f,g\in \mathrm{lip}_\alpha(X,B)$ داریم:

$$d(fg)=(\Lambda\, o\, f)(a)\, d(g)+(\Lambda\, o\, g)(a)\, d(f).$$

قرار دهید:

$$I(\{a\}):=\{f\in \mathrm{lip}_\alpha(X,B)\ :\ (\Lambda\, o\, f)(a)=0\}.$$

بنا به لم ۲.۲، $I(\{a\})$ یک ایده‌ال بسته در $\mathrm{lip}_\alpha(X,B)$ است. اگر $f,g\in I(\{a\})$ دلخواه باشند آنگاه $fg\in I(\{a\})$ بوده و

$$(\Lambda\, o\, f)(a)=(\Lambda\, o\, g)(a)=0.$$

لذا $d(fg)=0$ است، و در نتیجه $fg\in ker\,(d)$، که در آن

$$ker(d)=\{f\in \mathrm{lip}_\alpha(X,B)\ :\ d(f)=0\}.$$

بنابراین $I(\{a\})\subset ker\,(d)$، و این یعنی اگر $f\in \mathrm{lip}_\alpha(X,B)$ چنان باشد که $(\Lambda\, o\, f)(a)=0$، آنگاه $d(f)=0$.

حال فرض کنید $f\in \mathrm{lip}_\alpha(X,B)$ دلخواه باشد. دو حالت در نظر می‌گیریم:

حالت اول: $(\Lambda\ o\ f)(a) = 0$.

در این‌صورت $d(f) = 0$ است. چون $f \in \mathrm{lip}_\alpha(X,B)$ دلخواه فرض شده است، نتیجه می‌شود که $d = 0$ است.

حالت دوم: $(\Lambda\ o\ f)(a) \neq 0$.

در این حالت قرار دهید: $h \coloneqq (\Lambda\ o\ f)(a)\, f - ff$.

در این‌صورت $h \in \mathrm{lip}_\alpha(X,B)$ و $(\Lambda\ o\ h)(a) = 0$.

لذا $d(h) = 0$ می‌باشد. بنابراین

$$d\big((\Lambda\ o\ f)(a)\, f - ff\big) = 0\,.$$
$$\Rightarrow\ (\Lambda\ o\ f)(a)\ d(f) - d(ff) = 0\,.$$
$$\Rightarrow\ (\Lambda\ o\ f)(a)\ d(f) = d(ff)\,.$$
$$\Rightarrow\ (\Lambda\ o\ f)(a) d(f) = (\Lambda\ o\ f)(a)\ d(f) + (\Lambda\ o\ f)(a)\ d(f).$$
$$\Rightarrow\ (\Lambda\ o\ f)(a)\ d(f) = 0\,.$$
$$\Rightarrow\ d(f) = 0\,.$$

چون $f \in \mathrm{lip}_\alpha(X,B)$ دلخواه فرض شده است، نتیجه می‌شود $d = 0$. ■

قضیه ۵.۲. فرض کنید $0 < \alpha \leq 1$ باشد. همچنین فرض کنید $\boldsymbol{e}$ عنصر یکه جبر باناخ B باشد. در این‌صورت در هر نقطه غیر ایزوله X، یک اشتقاق نقطه‌ای پیوسته غیر صفر روی $\mathrm{Lip}_\alpha(X,B)$ وجود دارد.

برهان: فرض کنید $x_0 \in X$ یک نقطه غیر ایزوله باشد، و $x_n \to x_0$ در X با $x_n \neq x_0$ زمانی که $n \to \infty$ ($n \in \mathbb{N}$).

قرار دهید:

$$K \coloneqq \{(x,y) \in X \times X\ :\ x = y\}\,,$$
$$S \coloneqq X \times X - K.$$

فرض کنید $\Lambda \in \sigma(B)$ یک همریختی غیر صفر دلخواه و ثابت (*fix*) باشد. حال دنباله $\{\gamma_n\}$ را در $(\mathrm{Lip}_\alpha(X,B))^*$ متناظر با دنباله $\{(x_n,x_0)\}$ در S به صورت زیر تعریف کنید:

$$\gamma_n(f) = \frac{(\Lambda\ o\ f)(x_n) - (\Lambda\ o\ f)(x_0)}{d^\alpha(x_n,x_0)}\ ;\quad f \in \mathrm{Lip}_\alpha(X,B).$$

فرض کنید γ نقطه حدی دنباله $\{\gamma_n\}$ باشد. در این‌صورت برای هر $f,g \in \mathrm{Lip}_\alpha(X,B)$ داریم:

$$\gamma(fg) = \lim_{n\to\infty} \gamma_n(fg) = \lim_{n\to\infty} \frac{(\Lambda\ o\ (fg))(x_n) - (\Lambda\ o\ (fg))(x_0)}{d^\alpha(x_n,x_0)}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(\Lambda\ o\ f)(x_n)\,(\Lambda\ o\ g)(x_n) - (\Lambda\ o\ f)(x_0)\,(\Lambda\ o\ g)(x_0)}{d^\alpha(x_n,x_0)}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(\Lambda\ o\ f)(x_n) - (\Lambda\ o\ f)(x_0)}{d^\alpha(x_n,x_0)}\right)(\Lambda\ o\ g)(x_n) + (\Lambda\ o\ f)(x_0)\left(\frac{(\Lambda\ o\ g)(x_n) - (\Lambda\ o\ g)(x_0)}{d^\alpha(x_n,x_0)}\right) =$$
$$\lim_{n\to\infty}\ (\gamma_n(f)\ (\Lambda\ o\ g)(x_n) + (\Lambda\ o\ f)(x_0)\,\gamma_n(g)\ ) = \gamma(f)\ (\Lambda\ o\ g)(x_0) + (\Lambda\ o\ f)(x_0)\,\gamma(g).$$

لذا γ یک اشتقاق نقطه‌ای روی $\mathrm{Lip}_\alpha(X,B)$ در نقطه $x_0 \in X$ است، که پیوسته نیز می‌باشد.

قرار دهید:

$$f_0(x) = d^\alpha(x,x_0)\ \boldsymbol{e}\quad;\quad x \in X.$$

بنابه لم ۳.۲، $f_0 \in \mathrm{Lip}_\alpha(X,B)$ است، و

$$\gamma(f_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{(\Lambda\ o\ f_0)(x_n) - (\Lambda\ o\ f_0)(x_0)}{d^\alpha(x_n,x_0)}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\Lambda(d^\alpha(x_n,x_0)\ \boldsymbol{e}) - \Lambda(d^\alpha(x_0,x_0)\boldsymbol{e})}{d^\alpha(x_n,x_0)}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\ \frac{d^\alpha(x_n,x_0)}{d^\alpha(x_n,x_0)} = 1 \neq 0.$$

که در آن

$$(\Lambda(\boldsymbol{e}) = 1)$$

فهرست منابع

[۱] حمیدرضا رحیمی، افسانه سلطانی، مطالبی در خصوص میانگین‌پذیری تقریبی نسبت به ایده‌آل جبرهای باناخ، مجله پژوهش‌های نوین در ریاضی، دوره ۱ (۱۳۹۴)، شماره ۲، صفحه ۱۲- ۵.

[۲] علی تقوی، یادداشتی بر نگاشت‌های جمعی حافظ طیف روی C^*-جبرها، مجله پژوهش‌های نوین در ریاضی، دوره ۲ (۱۳۹۵)، شماره ۶ صفحه ۱۹-۱۱.

[۳] عباس زیوری کاظم پور، اباصلت بداغی، مشخصه سازی n-همریختی‌های جردن روی جبرها، مجله پژوهش‌های نوین در ریاضی، دوره ۴ (۱۳۹۷)، شماره ۱۳، صفحه ۷۴-۶۹.

[۴] بهمن حیاتی، حمید خدایی، نگاشت‌های δ-همریختی به توی جبرهای باناخ دوگان، مجله پژوهش‌های نوین در ریاضی، دوره ۵ (۱۳۹۸)، شماره ۲۱، صفحه ۲۲-۱۵.

[5] Cao, H. X., Zhang, J. H., Xu, Z. B., Characterizations and extensions of Lipschitz-α operators, Acta Math. Sin. (Engl. Ser) 22 (3) (2006), 671-678.

[6] Sherbert, D.R., Banach algebras of Lipschitz functions, Pacific J. Math. 3 (1963), 1387-1399.

[7] Shokri, A., Second dual space of little α-Lipschitz vector-valued operator algebras, Sahand Commun. Math. Anal. 8(1), (2017), 33-41.

[8] M. Mayghani, D. Alimohammadi, The structure of ideals, point derivations, amenability and weak amenability of extended Lipschitz algebras, Int. J. Nonlinear Anal. Appl., 8(1), (2017), 389- 404.

[9] S. Amiri, A. Golbaharan, H. Mahyar, Weighted composition operators on differentiable Lipschitz algebras, Bull. Iran. Math. Soc., 44(4), (2018), 955-968.

[10] K. Kawamura, Point derivations and cohomologies of Lipschitz algebras, proc. Of the Edinburgh Math. Society, 62(4), (2019), 1173-1187.

[11] Dales, H.G., Banach Algebras and Automatic Continuity, Clarendon Press, Oxford, 2000.

[12] Weaver, N., Lipschitz Algebras, World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1999.