دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال ششم، شماره بیست و چهارم، خرداد و تیر ۱۳۹۹
شماره شاپا: ۵۸۸-۲۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
پژوهش‌های نوین در ریاضی

حلقه تکوارهای اریب شبه آرمنداریز

محمد حبیبی[۱*]، سید احمد موسوی[۲]، رئوفه معنویت[۳]

(۱) دانشیار گروه ریاضی، دانشگاه تفرش، تفرش، ایران
(۲) استاد گروه ریاضی محض، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران
(۳) استادیار گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۶/۰۹/۰۹ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۶/۱۱/۰۲

چکیده

فرض کنیم R یک حلقه همراه با درون‌ریختی σ، $F \cup \{0\}$ یک تکوار آزاد تولید شده توسط $U = \{u_1, \dots, u_t\}$ همراه با صفر و M یک تکوار خارج قسمتی از F باشد، به طوری که عددی طبیعی مانند n موجود باشد که داشته باشیم $M^n = 0$. دراین مقاله شرایطی را برای حلقه R بیان می‌کنیم که تحت آن حلقه تکوار $R * M$ شبه آرمنداریز گردد و به کمک آن رده‌های بزرگی از حلقه‌های شبه آرمنداریز غیر نیم اول را ارائه می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: حلقه شبه آرمنداریز، حلقه تکوارهای اریب، حلقه ماتریس‌های مثلثی، حلقه APP.

*. عهده‌دار مکاتبات: Email:Habibi.mohammad2@gmail.com

۱– مقدمه

در سراسر این مقاله حلقه‌ها شرکت‌پذیر و یکدار می‌باشند. عضو همانی تکوار M را با e نمایش می‌دهیم. برای ایده‌آل ناصفر I از R، پوچساز چپ و راست I در R را به ترتیب با $l_R(I)$ و $r_R(I)$ نشان می‌دهیم. همچنین $M_n(R)$ و $T_n(R)$ به ترتیب نشان‌دهنده حلقه ماتریس‌های $n \times n$ و حلقه ماتریس‌های $n \times n$ بالا مثلثی روی R می‌باشند. ماتریس همانی و ماتریس‌های مقدماتی را نیز به ترتیب با I_n و E_{ij} نمایش می‌دهیم.
فرض کنیم $F \cup \{0\}$ یک تکوار آزاد تولید شده توسط $U = \{u_1, \dots, u_t\}$ همراه باصفر و M یک تکوار خارج قسمتی از F باشد به‌طوریکه عددی طبیعی مانند n چنان موجود باشد که به ازای هر $\alpha \neq e$ داشته باشیم $\alpha^n = 0$. حلقه R همراه با درون‌ریختی σ را در نظر می‌گیریم. در این‌صورت حلقه تکوار $R * M$ را بدین صورت تشکیل می‌دهیم که عناصر آن به صورت $\sum_{g \in M} r_g g$ با تعداد جمعوند های متناهی می‌باشند و عمل ضرب در آن با توجه به رابطه،

$$u_i r = \sigma(r) u_i$$

برای هر $1 \leq i \leq t$ به دست می‌آید. (برای توضیحات بیشتر به [۳] مراجعه نمایید.) فرض کنیم R یک حلقه و σ درون‌ریختی از R باشد به طوریکه $\sigma(1) = 1$. در [۱] نویسندگان حلقه ماتریس‌های بالا مثلثی اریب را بدین‌صورت تعریف کردند که عناصر آن مجموعه همه ماتریس‌های بالا مثلثی با عمل جمع مؤلفه به مؤلفه باشد و عمل ضرب با شرط،

$$E_{ij} r = \sigma^{j-i} E_{ij}$$

انجام شود. بنابراین داریم $(a_{ij})(b_{ij}) = (c_{ij})$ که در آن برای هر $i \leq j$،

$$c_{ij} = a_{ii} b_{ij} + a_{i,i+1} \sigma(b_{i+1,j}) + \cdots + a_{ij} \sigma^{j-i}(b_{jj}).$$

حلقه ماتریس‌های مثلثی، زیر حلقه‌های شامل همه ماتریس‌های مثلثی با قطر اصلی ثابت و زیر حلقه‌های شامل همه ماتریس‌های مثلثی با قطرهای ثابت را به ترتیب با نماد $T_n(R, \sigma)$، $S_n(R, n, \sigma)$ و $T_n(R, n, \sigma)$ نمایش می‌دهیم. به سادگی می‌توان دید که با انتخاب $U = \{E_{12}, E_{23}, \dots, E_{n-1,n}\}$ و $U = \{E_{12} + E_{23} + \cdots + E_{n-1,n}\}$ حلقه‌های $S_n(R, n, \sigma)$ و $T_n(R, n, \sigma)$ در ساختاری که در بالا توضیح داده شد صدق می‌کنند.
با توجه به مقاله [۳] حلقه R را شبه آرمنداریز گوییم هرگاه برای هر دو عضو $f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$ و $g(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j$ در $R[x]$ رابطه $f(x)R[x]g(x) = 0$ نتیجه دهد $a_i R b_j = 0$، برای هر $0 \leq i \leq m$ و $0 \leq j \leq n$. تومیناگا در [۹]، ایده‌آل I از R را s–یکال چپ نامید اگر برای هر $a \in I$ وجودداشته باشد $x \in I$ به طوریکه $xa = a$. او نشان داد که ایده‌آل I، s–یکال چپ است اگر و تنها اگر برای هر تعداد متناهی $a_1, \dots, a_n \in I$ وجود داشته باشد $x \in I$ به‌طوریکه $xa_i = a_i$، برای هر $1 \leq i \leq n$. هیرانو در قضیه ۳.۹ از [۴] ثابت کرد که $r_R(aR)$ برای هر $a \in R$، s–یکال چپ است اگر و تنها اگر برای هر $f(x) \in S$، $r_S(f(x)S)$ یک ایده آل s–یکال چپ باشد. همچنین او نشان داد که اگر R در شرایط فوق صدق کند، آنگاه R شبه آرمنداریز می‌باشد. لیو و ژو حلقه R را APP راست نامیدند اگر برای هر $a \in R$، ایده‌آل $r_R(aR)$، s–یکال چپ باشد. بنابراین با توجه به توضیحات فوق، حلقه‌های APP شبه آرمنداریز هستند. همچنین آنها نشان دادند که خاصیت APP به حلقه ماتریس‌های بالا مثلثی و بسیاری از توسیع‌های دیگر منتقل می‌شود و یک خاصیت موریتا پایدار است.
دراین مقاله نشان می‌دهیم که اگر R یک APP–حلقه σ–صلب ضعیف باشد، آنگاه R یک حلقه شبه آرمنداریز غیر نیم اول می‌باشد. هم‌چنین ثابت می‌شود که برای هر APP–حلقه σ–صلب ضعیف R، حلقه‌های $T_n(R, n, \sigma)$ و $S_n(R, n, \sigma)$ شبه آرمنداریز می‌باشند. به کمک این مطلب رده وسیعی از حلقه‌های دارای ایده آل پوچ‌توان با شاخص پوچ‌توانی دلخواه را که شبه آرمنداریز نیز می‌باشند، معرفی می‌نماییم.

۲- نتایج

فرض کنیم R یک حلقه دلخواه باشد. برای چندجمله‌ای $f(x) \in R[x]$، مجموعه ضرایب $f(x)$ را با C_f نمایش می‌دهیم. همچنین اگر J زیر مجموعه‌ای از $R[x]$ باشد، مجموعه $\bigcup_{f\in J} C_f$ با نماد C_J نشان داده می‌شود. حال قرار می‌دهیم،

$$\Theta = \{l_R(I) | \text{یک ایده‌آل از } R \text{ باشد } I\}$$

و

$$\Delta = \{l_S(J) | \text{یک ایده‌آل از } S \text{ باشد } J\}$$

که در آن $S = R[x]$ یک توسیع چند جمله‌ای از R است. فرض کنیم $\mu: \Theta \to \Delta$، با ضابطه $\mu(U) = SU$ و $\omega: \Delta \to \Theta$، با ضابطه $\omega(V) = V \cap R$ باشد. واضح است که μ و ω نگاشت‌هایی خوش تعریف هستند، زیرا اگر $U = l_R(I)$، آنگاه داریم $\mu(U) = SU = l_S(I[x])$ و همچنین اگر $V = l_S(J)$، در اینصورت داریم $\omega(V) = l_S(J) \cap R = l_R(J) = l_R(C_J)$. لذا $\mu o \omega = id$ و بنابراین μ یک به یک و ω پوشاست. هیرانو حالتی را که μ پوشا باشد بررسی نمود و نشان داد که μ پوشاست اگر و تنها اگر R شبه آرمنداریز باشد.

زیرمدول N از R-مدول راست M را زیرمدول محض گوییم اگر $N\otimes_R L \to M\otimes_R L$ برای هر R-مدول چپ L، یک تکریختی باشد. با توجه به تعریف تومیناگا [۹] ایده‌آل I از R را s-یکال چپ نامیم اگر برای هر $a \in I$ وجود داشته باشد $x \in I$ بطوریکه $xa = a$. او نشان داد که ایده‌آل I، s-یکال چپ است اگر و تنها اگر برای هر تعداد متناهی $a_1, \dots, a_n \in I$ وجود داشته باشد $x \in I$ به طوریکه $xa_i = a_i$، برای هر $1 \leq i \leq n$. با توجه به گزاره ۱۱.۳.۱۳ از [۸]، ایده‌آل راست I از R محض است اگر و تنها اگر R/I به عنوان R-مدول راست یکدست باشد، اگر و تنها اگر I، s-یکال چپ باشد. هیرانو در [۴] ثابت کرد که برای هر $a \in I$، $r_R(aR)$ به عنوان ایده‌آل راست R محض است اگر و تنها اگر برای هر $f(x) \in S$، $r_S(f(x)S)$ به عنوان ایده‌آل راست $S = R[x]$ محض باشد. همچنین او نشان داد که اگر R در شرط فوق صدق کند، دراینصورت R شبه آرمنداریز است.

بسیار بدیهی است که حلقه‌های اول شبه آرمنداریز هستند. هیرانو در [۴] نشان داد که اگر R جمع زیرمستقیم از حلقه‌های شبه آرمنداریز باشد، آنگاه R شبه آرمنداریز می‌باشد. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که حلقه‌های نیم اول شبه آرمنداریز می‌باشد. علاوه بر این هیرانو نشان داد که اگر R شبه آرمنداریز باشد، آنگاه برای هر عدد طبیعی n، $T_n(R)$ نیز شبه آرمنداریز است. توجه کنیم که $T_n(R)$ برای $n \geq 2$ نیم اول نیست. ما نشان می‌دهیم که در حالت کلی خاصیت شبه آرمنداریز از R به $R * M$ منتقل نمی‌شود. بعلاوه، با استفاده از نوع خاصی از حلقه تکوارها، رده بزرگی از حلقه‌های شبه آرمنداریز غیر نیم اول را معرفی خواهیم کرد.

مثال ۲.۱. فرض کنیم R_1 یک حلقه APP، $R = T(R_1, R_1)$ توسیع بدیهی R_1 و M تکوار آزاد تولید شده توسط $U = \{u\}$ همراه با صفر با رابطه $u^2 = 0$ باشد. بنابراین با توجه به [۲]، R حلقه شبه آرمنداریز می‌باشد. فرض کنیم σ درون‌ریختی از R_1 است که $\sigma(1) = 1$. به وضوح،

$$\overline{\sigma}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \sigma(a) & \sigma(b) \\ 0 & \sigma(a) \end{pmatrix}$$

یک درون‌ریختی از R است. دو چند جمله‌ای $f(x) = (E_{12}e) + (E_{12}e - I_2u)x$ و $g(x) = (E_{12}e) + (E_{12}e + I_2u)x$ در $(R * M)[x]$ را در نظر می‌گیریم. واضح است که $f(x)(R * M)[x]g(x) = 0$، در حالیکه داریم، $[E_{12}e][(I_2 + E_{12})e][E_{12}e + I_2u] = 0$. بنابراین $R * M$ شبه آرمنداریز نیست.

در ادامه ثابت می‌کنیم که برای APP-حلقه R همراه با خودریختی σ، اگر R، σ-صلب ضعیف باشد، آنگاه $R * M$ شبه آرمنداریز است. برای اثبات این حکم به لم‌های ریز نیاز داریم.

فرض کنیم R یک حلقه و σ درون‌ریختی از آن باشد. دراینصورت $\overline{\sigma}: R[x] \to R[x]$، با رابطه $\overline{\sigma}\left(\sum_{i=0}^{m} a_i x^i\right) = \sum_{i=0}^{m} \sigma(a_i) x^i$

یک خودریختی از $R[x]$ است.

لم ۲.۲. فرض کنیم R یک حلقه و σ درون‌ریختی از آن باشد. در اینصورت داریم،

$$(R*M)[x] \cong R[x]*M$$

اثبات. نگاشت $\varphi: (R*M)[x] \to R[x]*M$ را با ضابطه زیر در نظر می‌گیریم:

$$\sum_{i=0}^{m} \alpha_i x^i \to fe + \sum_{1\le k\le t} f_k u_k + \sum_{1\le k_1,k_2\le t} f_{k_1k_2} u_{k_1} u_{k_2} + \cdots + \sum_{1\le k_1,\dots,k_{n-1}\le t} f_{k_1\dots k_{n-1}} u_{k_1} \dots u_{k_{n-1}}$$

که در آن برای هر $0 \le i \le m$،

$$\alpha_i = a^{(i)}e + \sum_{1\le k\le t} a_k^{(i)} u_k + \sum_{1\le k_1,k_2\le t} a_{k_1k_2}^{(i)} u_{k_1} u_{k_2} + \cdots + \sum_{1\le k_1,\dots,k_{n-1}\le t} a_{k_1\dots k_{n-1}}^{(i)} u_{k_1} \dots u_{k_{n-1}}$$

و

$$f = a^{(0)} + a^{(1)}x + \cdots + a^{(m)}x^m$$
$$f_k = a_k^{(0)} + a_k^{(1)}x + \cdots + a_k^{(m)}x^m 1 \le k \le t$$
$$f_{k_1k_2} = a_{k_1k_2}^{(0)} + a_{k_1k_2}^{(1)}x + \cdots + a_{k_1k_2}^{m}x^m 1 \le k_1,k_2 \le t$$
.
.
.
$$f_{k_1\dots k_{n-1}} = a_{k_1\dots k_{n-1}}^{(0)} + a_{k_1\dots k_{n-1}}^{(1)}x + \cdots + a_{k_1\dots k_{n-1}}^{(m)}x^m 1 \le k_1,\dots,k_{n-1} \le t$$

به راحتی دیده می‌شود که φ یک یکریختی است و اثبات کامل می‌شود.

فرض کنیم R یک حلقه و σ درون‌ریختی از آن باشد. بر اساس مقاله [۷] حلقه R را σ –صلب ضعیف نامیم اگر برای هر $a,b \in R$، $aRb = 0$ اگر و تنها اگر $a\sigma(Rb) = 0$. به وضوح، اگر R حلقه σ–صلب ضعیف باشد، آنگاه انژکتیو است. همچنین، هر حلقه اول با خودریختی σ یک حلقهσ–صلب ضعیف می‌باشد.

لم ۲.۳. اگر R حلقه σ–صلب ضعیف و شبه آرمنداریز باشد، آنگاه $R[x]$ نیز $\overline{\sigma}$–صلب ضعیف و شبه آرمنداریز است.

اثبات: به قضیه ۲.۱۱ به [۷] مراجعه نمایید.

لم ۲.۴. فرض کنیم R حلقه APP راست و $a_1,\dots,a_m,b_1,\dots,b_n$ متعلق به R باشد. اگر برای هر i و j داشته باشیم $a_iRb_j = 0$، آنگاه وجود دارد $c \in R$ بطوریکه داریم $b_j = cb_j$ و $a_iRc = 0$ برای هر $1 \le i \le m$ و $1 \le j \le n$.

اثبات: مشابه با اثبات لم ۲ از [۵] حکم به دست می‌آید.

قضیه ۲.۵. فرض کنیم R یک حلقه و σ خودریختی از آن باشد. اگر R حلقهσ–صلب ضعیف و APP راست باشد، دراینصورت $R*M$ حلقه شبه آرمنداریز غیر نیم اول است.

اثبات: فرض کنیم $F(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_r x^r$ و $G(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \cdots + \beta_s x^s$ دو چند جمله‌ای در $(R*M)[x]$ با رابطه $F(x)(R*M)[x]G(x) = 0$ باشند که در آن برای هر $1 \le i \le r$ و $1 \le j \le s$،

$$\alpha_i = a^{(i)}e + \sum_{1\le k\le t} a_k^{(i)} u_k + \sum_{1\le k_1,k_2\le t} a_{k_1k_2}^{(i)} u_{k_1} u_{k_2} + \cdots + \sum_{1\le k_1,\dots,k_{n-1}\le t} a_{k_1\dots k_{n-1}}^{(i)} u_{k_1} \dots u_{k_{n-1}}$$
$$\beta_j = b^{(i)}e + \sum_{1\le k\le t} b_k^{(j)} u_k + \sum_{1\le k_1,k_2\le t} b_{k_1k_2}^{(j)} u_{k_1} u_{k_2} + \cdots + \sum_{1\le k_1,\dots,k_{n-1}\le t} b_{k_1\dots k_{n-1}}^{(j)} u_{k_1} \dots u_{k_{n-1}}$$

بنابراین با توجه به لم ۲.۲ برای هر $h, h_k, h_{k_1k_2}, \dots, h_{k_1\dots k_{t-1}} \in R[x]$ داریم،

$$\left(fe + \sum_{1\le k\le t} f_k u_k + \sum_{1\le k_1,k_2\le t} f_{k_1k_2} u_{k_1} u_{k_2} + \cdots + \sum_{1\le k_1,\dots,k_{n-1}\le t} f_{k_1\dots k_{n-1}} u_{k_1} \dots u_{k_{n-1}}\right) \times$$
$$\left(he + \sum_{1\le k\le t} h_k u_k + \sum_{1\le k_1,k_2\le t} h_{k_1k_2} u_{k_1} u_{k_2} + \cdots + \right.$$

$$\sum_{1\le k_1,\dots,k_{n-1}\le t} h_{k_1\dots k_{n-1}} u_{k_1}\dots u_{k_{n-1}}) \times (ge+\sum_{1\le k\le t} g_k u_k + \sum_{1\le k_1,k_2\le t} g_{k_1k_2}u_{k_1}u_{k_2}+\dots+\sum_{1\le k_1,\dots,k_{n-1}\le t} g_{k_1\dots k_{n-1}} u_{k_1}\dots u_{k_{n-1}}) = 0$$

که در آن،

$$f=a^{(0)}+a^{(1)}x+\dots+a^{(r)}x^r,$$
$$g=b^{(0)}+b^{(1)}x+\dots+b^{(s)}x^s$$
$$f_k=a_k^{(0)}+a_k^{(1)}x+\dots+a_k^{(r)}x^r,$$
$$g_k=b_k^{(0)}+b_k^{(1)}x+\dots+b_k^{(s)}x^s$$
$$f_{k_1k_2}=a_{k_1k_2}^{(0)}+a_{k_1k_2}^{(1)}x+\dots+a_{k_1k_2}^{r}x^r,$$
$$g_{k_1k_2}=b_{k_1k_2}^{(0)}+b_{k_1k_2}^{(1)}x+\dots+b_{k_1k_2}^{s}x^s$$

.

.

.

$$f_{k_1\dots k_{n-1}}=a_{k_1\dots k_{n-1}}^{(0)}+a_{k_1\dots k_{n-1}}^{(1)}x+\dots+a_{k_1\dots k_{n-1}}^{(r)}x^r \ ,$$
$$g_{k_1\dots k_{n-1}}=b_{k_1\dots k_{n-1}}^{(0)}+b_{k_1\dots k_{n-1}}^{(1)}x+\dots+b_{k_1\dots k_{n-1}}^{(s)}x^s.$$

بنابراین روابط زیر را داریم،

$$(1) fhg=0$$
$$(2) fhg_k+fh_k\overline{\sigma}(g)+f_k\overline{\sigma}(h)\overline{\sigma}(g)=0 \qquad 1\le k\le t$$
$$(3) fhg_{k_1k_2}+fh_{k_1}\overline{\sigma}(g_{k_2})+f_{k_1}\overline{\sigma}(h)\overline{\sigma}(g_{k_2})+fh_{k_1k_2}\overline{\sigma}^2(g)+f_{k_1}\overline{\sigma}(h_{k_2})\overline{\sigma}^2(g)+f_{k_1k_2}\overline{\sigma}(h)\overline{\sigma}^2(g)=0 \quad 1\le k_1,k_2\le t$$
$$(4) fhg_{k_1k_2k_3}+fh_{k_1}\overline{\sigma}(g_{k_2k_3})+f_{k_1}h\overline{\sigma}(g_{k_2k_3})+fh_{k_1k_2}\overline{\sigma}^2(g_{k_3})+f_{k_1}\overline{\sigma}(h_{k_2})\overline{\sigma}^2(g_{k_3})+f_{k_1k_2}\overline{\sigma}^2(h)\overline{\sigma}^2(g_{k_3})+fh_{k_1k_2k_3}\overline{\sigma}^3(g)+f_{k_1}\overline{\sigma}(h_{k_2k_3})\overline{\sigma}^3(g)+f_{k_1k_2}\overline{\sigma}^2(h_{k_3})\overline{\sigma}^3(g)+f_{k_1k_2k_3}\overline{\sigma}^3(hg)=0 \quad 1\le k_1,\dots,k_{n-1}\le t$$

.

.

.

با توجه به اینکه h در معادله (۱) عضوی دلخواه از $R[x]$ است، لذا رابطه $fR[x]g=0$ بدست می‌آید.

بنابراین از آنجا که R شبه آرمندآریز است با توجه به قضیه ۳.۹ از مرجع [۴] برای هر $0\le i\le r$ و $0\le j\le s$، داریم $a^{(i)}Rb^{(j)}=0$. لذا با استفاده از لم ۲.۴ وجود دارد $c\in R$ بطوریکه برای هر i و j داشته باشیم $a^{(i)}Rc=0$ و $cb^{(j)}=b^{(j)}$. در نتیجه داریم،

$$fR[x]c=0 \quad \text{(ii)} \quad \text{و} \quad cg=g \quad \text{(i)}$$

علاوه براین، از آنجا که با توجه لم ۲.۳ $R[x]$ حلقه $\overline{\sigma}$–صلب ضعیف است، از تساوی $fR[x]g=0$ نتیجه می‌شود

$$fR[x]\overline{\sigma}(g)=0 \quad \text{(iii)}$$

از طرف دیگر با به کارگیری معادله $F(x)(R*M)[x]G(x)=0$، بدست می‌آوریم:

$$(fe+\sum_{1\le k\le t} f_k u_k+\sum_{1\le k_1,k_2\le t} f_{k_1k_2}u_{k_1}u_{k_2}+\dots+\sum_{1\le k_1,\dots,k_{n-1}\le t} f_{k_1\dots k_{n-1}}u_{k_1}\dots u_{k_{n-1}})\times(he+\sum_{1\le k\le t} h_k u_k+\sum_{1\le k_1,k_2\le t} h_{k_1k_2}u_{k_1}u_{k_2}+\dots+\sum_{1\le k_1,\dots,k_{n-1}\le t} h_{k_1\dots k_{n-1}}u_{k_1}\dots u_{k_{n-1}})(ce)\times(ge+\sum_{1\le k\le t} g_k u_k+\sum_{1\le k_1,k_2\le t} g_{k_1k_2}u_{k_1}u_{k_2}+\dots+\sum_{1\le k_1,\dots,k_{n-1}\le t} g_{k_1\dots k_{n-1}}u_{k_1}\dots u_{k_{n-1}})=0$$

بنابراین معادله زیر را داریم:

$$fh(cg_k)+fh_k\overline{\sigma}(cg)+f_k\overline{\sigma}(h)\overline{\sigma}(cg)=0 \quad \forall k\in\{1,\dots,t\}$$

با توجه به (i)،(ii) و (iii)، برای هر $1\le k\le t$، داریم $f_k\overline{\sigma}(h)\overline{\sigma}(g)=0$. بنابراین از آنجا که h عضوی دلخواه از $R[x]$ است و σ یک بروریختی است، داریم $f_kR[x]\overline{\sigma}(g)=0$ و از σ–صلب ضعیف بودن $R[x]$ نتیجه می‌گیریم $f_kR[x]g=0$. لذا با توجه به معادله (۲) داریم، $fR[x]g_k=0$. تا اینجا برای هر $1\le k\le t$، تساوی $fR[x]g_k=$

$f_kR[x]\overline{\sigma}(g)=0$ را ثابت کردیم و از شبه آرمندارایز بودن R تساوی،

$$a^{(i)}Rb_k^{(j)}=0=a_k^{(i)}Rb^{(j)}$$

را برای هر $i\in\{0,\dots,r\}$، $j\in\{0,\dots,s\}$ و $k\in\{0,\dots,t\}$ بدست می‌آوریم.
با به کارگیری مجدد لم ۲.۴، از $a^{(i)}Rb^{(j)}=0=a_k^{(i)}Rb^{(j)}$ نتیجه می‌گیریم $a^{(i)}Rc'=a_k^{(i)}Rc'=0$ و $b^{(j)}=c'b^{(j)}$، برای یک $c\in R$ و هر i، j و k. بنابراین

$$c'g=g\ (\mathrm{iv}),\qquad fR[x]c'=0\ \ (\mathrm{v}),$$
$$\forall k\ \ f_kr[x]c'=0\ \ \ (\mathrm{vi}).$$

علاوه براین، $fR[x]c'=0$ و $f_kr[x]c'=0$ نتیجه می‌دهد:

$$fR[x]\sigma(c')=fR[x]\sigma^2(c')=0\ \ \ (\mathrm{vii})\ ,$$
$$\forall k\ f_kR[x]\sigma(c')=f_kR[x]\sigma^2(c')=0,\ \ (\mathrm{viii})$$

زیرا $R[x]$ حلقه $\overline{\sigma}$-صلب ضعیف است. از طرف دیگر با استفاده از معادله $F(x)(R*M)[x]G(x)=0$، بدست می‌آوریم:

$$\Big(fe+\sum_{1\le k\le t}f_ku_k+\sum_{1\le k_1,k_2\le t}f_{k_1k_2}u_{k_1}u_{k_2}+\cdots+\sum_{1\le k_1,\dots,k_{n-1}\le t}f_{k_1\dots k_{n-1}}u_{k_1}\dots u_{k_{n-1}}\Big)\times\Big(he+\sum_{1\le k\le t}h_ku_k+\sum_{1\le k_1,k_2\le t}h_{k_1k_2}u_{k_1}u_{k_2}+\cdots+\sum_{1\le k_1,\dots,k_{n-1}\le t}h_{k_1\dots k_{n-1}}u_{k_1}\dots u_{k_{n-1}}\Big)(c'e)\times\Big(ge+\sum_{1\le k\le t}g_ku_k+\sum_{1\le k_1,k_2\le t}g_{k_1k_2}u_{k_1}u_{k_2}+\cdots+\sum_{1\le k_1,\dots,k_{n-1}\le t}g_{k_1\dots k_{n-1}}u_{k_1}\dots u_{k_{n-1}}\Big)=0.$$

بنابراین معادله زیر را داریم:

$$fh\left(c'g_{k_1k_2}\right)+fh_{k_1}\overline{\sigma}\left(c'g_{k_2}\right)+f_{k_1}\overline{\sigma}\left(h\left(cg_{k_2}\right)\right)+fh_{k_1k_2}\overline{\sigma}^2(c'g)+f_{k_1}\overline{\sigma}\left(h_{k_2}\right)\overline{\sigma}^2(c'g)+f_{k_1k_2}\overline{\sigma}^2\left(h(c'g)\right)=0$$
$$\forall k_1,k_2\in\{1,\dots,t\}$$

با توجه به (iv)، (v)، (vi)، (vii) و (viii)، برای هر $1\le k_1,k_2\le t$، داریم $f_{k_1k_2}\overline{\sigma}^2(h)\overline{\sigma}^2(g)=0$.
بنابراین از آنجا که h عضوی دلخواه از $R[x]$ است و σ یک بروریختی است، داریم $f_{k_1k_2}R[x]\overline{\sigma}^2(g)=0$ و از σ-صلب ضعیف بودن $R[x]$ نتیجه می‌گیریم $f_{k_1k_2}R[x]g=0$. لذا با توجه به معادله (۲) داریم، $fR[x]g_k=0$.

از طرف دیگر از آنجا که $a^{(i)}Rb_k^{(j)}=0$، لذا با توجه به لم ۲.۴، وجود دارد $c''\in R$ بطوریکه برای هر i، j و k، $a^{(i)}Rc''=0$ و $b_k^{(j)}=c'b_k^{(j)}$.
بنابراین $fR[x]c''=0$ و $c''g_k=g_k$. از آنجا که $f(x)(R*M)[x]g(x)=0$ داریم،

$$\Big(fe+\sum_{1\le k\le t}f_ku_k+\sum_{1\le k_1,k_2\le t}f_{k_1k_2}u_{k_1}u_{k_2}+\cdots+\sum_{1\le k_1,\dots,k_{n-1}\le t}f_{k_1\dots k_{n-1}}u_{k_1}\dots u_{k_{n-1}}\Big)\times\Big(he+\sum_{1\le k\le t}h_ku_k+\sum_{1\le k_1,k_2\le t}h_{k_1k_2}u_{k_1}u_{k_2}+\cdots+\sum_{1\le k_1,\dots,k_{n-1}\le t}h_{k_1\dots k_{n-1}}u_{k_1}\dots u_{k_{n-1}}\Big)(c''e)\times\Big(ge+\sum_{1\le k\le t}g_ku_k+\sum_{1\le k_1,k_2\le t}g_{k_1k_2}u_{k_1}u_{k_2}+\cdots+\sum_{1\le k_1,\dots,k_{n-1}\le t}g_{k_1\dots k_{n-1}}u_{k_1}\dots u_{k_{n-1}}\Big)=0.$$

بنابراین معادله زیر را داریم:

$$fh\left(c''g_{k_1k_2}\right)+fh_{k_1}\overline{\sigma}\left(c''g_{k_2}\right)+f_{k_1}\overline{\sigma}\left(h\left(c''g_{k_2}\right)\right)+fh_{k_1k_2}\overline{\sigma}^2(c''g)+f_{k_1}\overline{\sigma}\left(h_{k_2}\right)\overline{\sigma}^2(c''g)+f_{k_1k_2}\overline{\sigma}^2\left(h(c''g)\right)=0\quad\forall k_1,k_2\in\{1,\dots,t\}$$

با استدلالی مشابه بالا می‌توان نتیجه گرفت $f_{k_1}R[x]g_{k_2}=0$. حال با توجه به معادله (۳)، داریم $fR[x]g_{k_1k_2}=0$. بنابراین برای هر $i\in\{0,\dots,r\}$، $j\in\{0,\dots,s\}$ و $k_1,k_2\in\{0,\dots,t\}$ داریم،

$$a^{(i)}Rb_{k_1k_2}^{(j)}=a_{k_1}^{(i)}Rb_{k_2}^{(j)}=a_{k_1k_2}^{(i)}Rb^{(j)}.$$

با ادامه این روند و با توجه به لم ۲.۲، برای هر $1 \leq i \leq r$ و $1 \leq j \leq s$ بدست می‌آوریم $\alpha_i(R * M)\beta_j = 0$. بنابراین $R * M$ شبه آرمنداریز است. همچنین به وضوح $R * M$ نیم اول نیست و اثبات کامل می‌شود.

توجه کنیم که اگر R شبه آرمنداریز باشد، آنگاه $M_n(R)$ و $T_n(R)$ نیز شبه آرمنداریز است (قضیه ۳.۱۲ و نتیجه ۳.۱۵ از [۴] را نگاه کنید). لذا نتیجه زیر را داریم.

نتیجه ۲.۶. فرض کنیم R حلقه APP و σ خودریختی صلب ضعیف باشد. در اینصورت $S(R, n, \sigma)$ و $T(R, n, \sigma)$ شبه آرمنداریز است.

$A = (a_{ij}) \in T(R, n, \sigma)$ را با $(a_{11}, \dots, a_{1n})$ نمایش می‌دهیم. در اینصورت $T(R, n, \sigma)$ با جمع نقطه به نقطه و ضرب به صورت:

$$(a_0, \dots, a_{n-1})(b_0, \dots, b_{n-1}) = (a_0 b_0, a_0 * b_1 + a_1 * b_0, \dots, a_0 * b_{n-1} + \dots + a_{n-1} * b_0)$$

که در آن برای هر i و j، $a_i * b_j = a_i \sigma^i(b_j)$. از طرف دیگر نگاشت

$$\varphi: R[x; \sigma]/x^n \to T(R, n, \sigma),$$

با ضابطه $\varphi(\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i) = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ برای هر $a_i \in R$، $0 \leq i \leq n-1$ یکریختی حلقه ای است. بنابراین $T(R, n, \sigma) \cong R[x; \sigma]/(x^n)$، که در آن $R[x; \sigma]$ حلقه چندجمله‌ای اریب است که برای هر $r \in R$ قانون ضرب به صورت $xr = \sigma(r)x$ می‌باشد. همچنین (x^n) ایده‌آل تولید شده توسط x^n از $R[x; \sigma]$ است. حال با بیان نتیجه زیر این مقاله را پایان می‌دهیم.

نتیجه ۲.۷. فرض کنیم R حلقه APP و σ خودریختی صلب ضعیف از R باشد. در اینصورت $R[x; \sigma]/(x^n)$ شبه آرمنداریز است.

فهرست منابع

[1] J. Chen, X. Yang b, Y. Zhou, On strongly clean matrix and triangular matrix rings, Comm. Algebra 34 (2006) 3659-3674.

[2] M. Habibi, A new class of non-semiprime quasi-Armendariz rings, StudiaScientiarumMathematicarumHungarica 51(2) (2014) 165-171.

[3] M. Habibi, A. Moussavi, Annihilator properties of skew monoid rings, Comm. Algebra 42(2) (2014) 842-852.

[4] Y. Hirano, On annihilator ideals of a polynomial ring over a noncommutative ring, J. Pure Appl. Algebra 168 (2002) 45-52.

[5] Z. K. Liu, W. Zhang, A note on quasi-Armendariz rings, Math. J. Okayama Univ. 52 (2010) 89-95.

[6] Z. K. Liu, R. Y. Zhao, A generalization of PP-rings and p.q.-Baer rings, Glasg. Math. J. 48(2) (2006) 217-229.

[7] A. R. Nasr-Isfahani, A. Moussavi, On weakly rigid rings, Glasg. Math. J. 51(3) (2009) 425-440.

[8] B. Stenström, Rings of Quotients, Springer, Berlin, 1975.

[9] H. Tominaga, On s-unital rings, Math. J. Okay. Univ. 18 (1976) 117-134.