



## حل عددی معادلات انتگرال جبری ولترا با روش بسط تیلور

الهام انتقامی<sup>۱</sup>، عزیزاله باباخانی<sup>۲\*</sup>، حسن حسین‌زاده<sup>۳</sup>

<sup>(۳۱)</sup> گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه مازندران، بابلسر، ایران

<sup>(۲)</sup> گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل، بابل

تاریخ ارسال مقاله: ۹۷/۰۳/۲۷ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۹/۰۲/۲۰

### چکیده

معادله انتگرال جبری یک رده‌ی خاص از دستگاه معادلات انتگرال ولترا می‌باشد که کاربردهای فراوانی در زمینه‌های فیزیک و مهندسی دارد. در این مقاله، با بکارگیری بسط تیلور، حل عددی یک دستگاه از معادلات انتگرال جبری تشریح می‌گردد. در این روش با استفاده از بسط تیلور تابع مجهول، دستگاه معادله انتگرال جبری به یک دستگاه معادلات خطی از تابع مجهول و مشتقاتش تبدیل می‌شود. همچنین تحت شرایطی، همگرایی جواب حاصل از این روش به جواب دقیق دستگاه اثبات شد. ضمناً چند مثال برای توصیف این روش در تعیین جواب عددی آن و دقت روش مذکور و مقایسه آن با روش‌هایی که توسط سایرین انجام شده، ارائه گردیده است.

**واژه‌های کلیدی:** معادلات انتگرال جبری، دستگاه معادلات انتگرال ولترا، بسط تیلور، آنالیز خطا.

۱- مقدمه

بسیاری از وقایع فیزیکی، مانند برنامه‌های کاربردی بیولوژیکی در پویایی جمعیت و ژنتیک که تحرک‌ها به طور طبیعی به وجود می‌آیند یا به وسیله کنترل ایجاد می‌شوند را می‌توان توسط معادلات دیفرانسیل، معادلات انتگرال، معادلات انتگرال-دیفرانسیل یا به وسیله یک دستگاه از این معادلات مدل‌سازی کرد. معادلات انتگرال جبری، یک رده‌ی خاص از دستگاه معادلات انتگرال ولترا هستند. این رده شامل دستگاه معادلات انتگرال ولترای نوع اول و نوع دوم می‌باشد. چنین معادلات و دستگاه‌هایی اغلب در بسیاری از مسائل فیزیکی و کاربردی بوجود می‌آیند. به طور مثال در زمینه‌ی فرایندهای دینامیکی در راکتورهای شیمیایی [۱]، شناسایی هسته‌های حافظه در انتقال گرما [۲]، مواد ویسکوالاستیک [۳]، معادله‌های بیوهارمونیک دو بعدی در یک نوار نیمه نامتناهی [۴]، تکامل یک واکنش شیمیایی در یک سلول کوچک [۵] و قوانین کیرششف. اولین پژوهش در رابطه با دستگاه معادلات انتگرال جبری در کارهای چیستیاکف [۶] و گیر [۷] دیده می‌شود. گیر و چیستیاکف شاخص دیفرانسیل را معرفی کردند. برای اولین بار بولاتف [۸] شاگرد چیستیاکف شاخص چپ را معرفی کرد. اولین روش عددی توسط کائوتن [۹] ارائه شده است. کائوتن حل رده‌ای از معادلات انتگرال جبری از شاخص یک را با استفاده از چند جمله‌ای-های تکه‌ای مورد مطالعه قرار داده است. شاید مهم‌ترین کار در زمینه معادلات انتگرال جبری، فصل آخر کتاب برونر [۱۰] باشد. اخیراً نیز برخی محققین روش‌هایی برای حل این معادلات ارائه کرده‌اند (برای جزئیات بیشتر به [۱۱-۱۵] مراجعه شود). در این مقاله دستگاه معادله انتگرال ولترای زیر را در نظر می‌گیریم:

$$A(S)X(s) - \int_0^s K(s,t)X(t)dt = Y(s), \quad s \in [0,1] \quad (1)$$

به طوری که

$$\begin{aligned} A(s) &= [a_{pq}(s)], \quad p, q = 1, 2, \dots, m \\ X(s) &= [x_1(s), x_2(s), \dots, x_m(s)]^T, \\ Y(s) &= [y_1(s), y_2(s), \dots, y_m(s)]^T, \\ K(s, t) &= [k_{pq}(s, t)], \quad p, q = 1, 2, \dots, m. \end{aligned}$$

در این دستگاه  $A, Y$  و  $K$  توابع معلوم می‌باشند و  $X$  تابع مجهول است. اگر  $\det A(s) = 0$  آن‌گاه دستگاه (۱) به یک دستگاه معادلات انتگرال جبری معروف است. با توجه به شرط  $\det A(s) = 0$ ، آن‌گاه دستگاه (۱) دارای چندین جواب است یا اصلاً جواب ندارد. قضیه زیر شرط کافی برای وجود جواب یکتا دستگاه (۱) را بیان می‌کند.

**قضیه ۱-۱:** [۸] فرض کنید دستگاه (۱) با شرط  $\det A(s) = 0$  در شرایط زیر صدق کند:

۱. به ازای همه  $s \in [0,1]$  داریم:

$$Rank A(s) = \deg(\det[\lambda A(s) + K(s, s)]) = k,$$

به طوری که  $k$  ثابت و  $\lambda$  یک اسکالر می‌باشد.

۲.  $Rank A(0) = Rank[A(0)|X(0)]$ .

۳.  $K(s, t) \in C^1(\Delta)$  و  $A(s), X(s) \in C^1[0,1]$  که در آن  $\Delta = \{0 \leq t \leq s \leq 1\}$ .

آن‌گاه دستگاه (۱) دارای جواب یکتا و پیوسته می‌باشد.

ما در این مقاله به منظور حل عددی دستگاه (۱) از روش بسط تیلور استفاده کردیم. بنابراین این مقاله به شرح زیر سازمان یافته است. در بخش ۲ روش بسط تیلور برای حل دستگاه معادلات انتگرال جبری (۱) را تشریح نموده و آنالیز خطای روش را در بخش ۳ آورده‌ایم. بخش ۴ را با ارائه‌ی مثال‌های گوناگون جهت توصیف کارایی روش به پایان رسانده‌ایم. همچنین در این بخش به مقایسه دقت این روش با سایر روش‌ها پرداخته‌ایم.

۲- روش بسط تیلور

صورت دیگر دستگاه معادلات انتگرال جبری (۱) عبارت است از:

$$\sum_{q=1}^m [a_{pq}(s)x_q(s) - \int_0^s k_{pq}(s, t)x_q(t)dt] = y_p(s), \quad (2)$$

که در آن  $p = 1, 2, \dots, m$

حال به ازای  $i = 1, 2, \dots, n$  قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned} k_{pq_s}^{(i)}(s, t) &= \frac{\partial^i k_{pq}(s, t)}{\partial s^i}, \\ k_{pq_s}^{(i)} &= \frac{\partial^i k_{pq}(s, t)}{\partial s^i} \Big|_{t=s}. \end{aligned}$$

$$\sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} \left( \int_0^s k'_{pq_s}(s, t)(t - s)^j dt \right) x_q^{(j)}(s) = y'_p(s), \quad (8)$$

$$\sum_{q=1}^m \left[ a''_{pq}(s)x_q(s) + 2a'_{pq}(s)x'_q(s) + a_{pq}(s)x''_q(s) - k'_{pq}(s, s)x_q(s) - k_{pq}(s, s)x'_q(s) - k'_{pq_s}(s, s)x_q(s) - \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} \left( \int_0^s k''_{pq_s}(s, t)(t - s)^j dt \right) x_q^{(j)}(s) \right] = y''_p(s). \quad (9)$$

برای معادله (۵) نیز عبارت زیر حاصل می‌گردد:

$$\sum_{q=1}^m \left[ \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a_{pq}^{(n-j)}(s)x_q^{(j)}(s) - \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} k_{pq}^{(n-1-j)}(s)x_q^{(j)}(s) - \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{j=0}^{n-2-i} \binom{n-2-i}{j} [k_{pq_s}^{(i+1)}(s, s)]^{(n-2-i-j)} x_q^{(j)}(s) - \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} \left( \int_0^s k_{pq_s}^{(n)}(s, t)(t - s)^j dt \right) x_q^{(j)}(s) \right] = y_p^{(n)}(s), \quad (10)$$

در این جا فرض می‌کنیم  $x_q(s)$  به‌وسیله چند جمله‌ای تیلور از درجه  $n$  تقریب زده شده است. بنابر این معادلات (۷) - (۱۰) تشکیل یک دستگاه با  $m(n+1)$  معادله خطی و  $m(n+1)$  ضریب مجهول  $x_q(s), x'_q(s), \dots, x_q^{(n)}(s)$  می‌دهند که در آن  $q = 1, 2, \dots, m$ .

این دستگاه را می‌توان با روش‌های عددی موجود حل نمود. علاوه براین می‌توان آن را به شکل ماتریسی به صورت زیر نمایش داد:

$$TX + Y = 0, \quad (11)$$

که در آن ماتریس‌های  $X, Y$  عبارتند از:

$$X = \begin{bmatrix} x_1(s), x'_1(s), \dots, x_1^{(n)}(s), \dots, x_m^{(n)}(s) \end{bmatrix}^T, \\ Y = \begin{bmatrix} y_1(s), y'_1(s), \dots, y_1^{(n)}(s), \dots, y_m^{(n)}(s) \end{bmatrix}^T,$$

و ماتریس  $T$ ، ماتریسی  $m(n+1)$  بعدی است که هر یک از مولفه‌هایش در هر سطر به ترتیب ضرایب توابع

همچنین به ازای  $j = 0, 1, \dots, n$  فرض می‌کنیم:

$$\left[ k_{pq_s}^{(i)}(s, s) \right]^{(j)} = \frac{d^j}{ds^j} k_{pq_s}^{(i)}(s, s), \\ k_{pq}^{(j)}(s, s) = \frac{d^j}{ds^j} k_{pq}(s, s).$$

چنانچه  $n$  بار از معادلات (۲) مشتق بگیریم، عبارت‌های زیر حاصل می‌گردد:

$$\sum_{q=1}^m \left[ a'_{pq}(s)x_q(s) - a_{pq}(s)x'_q(s) - k_{pq}(s, s)x_q(s) - \int_0^s k'_{pq_s}(s, t)x_q(t) dt \right] = y'_p(s) \quad (3)$$

مشتق مرتبه دوم آن عبارت است از:

$$\sum_{q=1}^m \left[ a''_{pq}(s)x_q(s) + 2a'_{pq}(s)x'_q(s) + a_{pq}(s)x''_q(s) - k'_{pq}(s, s)x_q(s) - k_{pq}(s, s)x'_q(s) - k'_{pq_s}(s, s)x_q(s) - \int_0^s k''_{pq_s}(s, t)x_q(t) dt \right] = y''_p(s), \quad (4)$$

همچنین با استفاده از قانون لایب نیتز مشتق مرتبه  $m$  دارای نمایش زیر است:

$$\sum_{q=1}^m \left[ \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a_{pq}^{(n-j)}(s)x_q^{(j)}(s) - \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} k_{pq}^{(n-1-j)}(s)x_q^{(j)}(s) - \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{j=0}^{n-2-i} \binom{n-2-i}{j} [k_{pq_s}^{(i+1)}(s, s)]^{(n-2-i-j)} x_q^{(j)}(s) - \int_0^s k_{pq_s}^{(n)}(s, t)x_q(t) dt \right] = y_p^{(n)}(s), \quad (5)$$

برای هر ثابت دلخواه  $s$ ، فرض می‌کنیم:

$$x_q(t) \approx x_q(s) + x'_q(s)(t - s) + \dots + \frac{1}{n!} x_q^{(n)}(s)(t - s)^n. \quad (6)$$

با جای‌گذاری عبارت (۶) در (۲) و در هریک از معادله‌های (۳)-(۵) به ترتیب معادله‌های زیر را به دست می‌آوریم:

$$\sum_{q=1}^m \left[ a_{pq}(s)x_q(s) - \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} \left( \int_0^s k_{pq}(s, t)(t - s)^j dt \right) x_q^{(j)}(s) \right] = y_p(s), \quad (7)$$

$$\sum_{q=1}^m \left[ a'_{pq}(s)x_q(s) + a_{pq}(s)x'_q(s) - k_{pq}(s, s)x_q(s) - \int_0^s k'_{pq_s}(s, t)x_q(t) dt \right] = y'_p(s),$$

$$\sum_{q=1}^m \left[ a_{pq}(s) (x_q(s) - \bar{x}_q(s)) - \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} \int_0^s k_{pq}(s,t) (t-s)^j (x_q^{(j)}(s) - \bar{x}_q^{(j)}(s)) dt \right] = \frac{x_q^{(n+1)}(\xi(s))}{(n+1)!} \int_0^s k_{pq}(s,t) (t-s)^{n+1} dt, \quad (15)$$

$$\sum_{q=1}^m \left[ (a'_{pq}(s) - k_{pq}(s,s)) (x_q(s) - \bar{x}_q(s)) + a_{pq}(s) (x'_q(s) - \bar{x}'_q(s)) - \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} \int_0^s k'_{pq}(s,t) (t-s)^j (x_q^{(j)}(s) - \bar{x}_q^{(j)}(s)) dt \right] = \frac{x_q^{(n+1)}(\xi(s))}{(n+1)!} \int_0^s k'_{pq}(s,t) (t-s)^{n+1} dt. \quad (16)$$

به این ترتیب با ادامه این روند، برای معادله  $m$  عبارت زیر حاصل می‌شود:

$$\sum_{q=1}^m \left[ \begin{array}{l} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a_{pq}^{(n-j)}(s) - \\ \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} k_{pq}^{(n-1-j)}(s,s) - \\ \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{j=0}^{n-2-i} \binom{n-2-i}{j} [k_{pq_s}^{(i+1)}(s,s)]^{(n-2-i-j)} \\ - \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} k_{pq_s}^{(n)}(s,t) (t-s)^j dt \end{array} \right] (x_q^{(j)}(s) - \bar{x}_q^{(j)}(s)) = \frac{x_q^{(n+1)}(\xi(s))}{(n+1)!} \int_0^s k_{pq}(s,t) (t-s)^{n+1} dt, \quad (17)$$

که در این معادلات  $p = 1, 2, \dots, m$  برای خطاهای  $x_q^{(j)}(s) - \bar{x}_q^{(j)}(s)$  برای  $j = 0, 1, \dots, n$  و  $q = 1, 2, \dots, m$  یک دستگاه معادلات خطی تشکیل می‌دهند. بنابراین اگر قرار دهیم:

$$BE = F, \quad (18)$$

که در آن

$$E = \begin{bmatrix} x_1(s) - \bar{x}_1(s) \\ x'_1(s) - \bar{x}'_1(s) \\ \vdots \\ x_1^{(n)}(s) - \bar{x}_1^{(n)}(s) \\ \vdots \\ x_m^{(n)}(s) - \bar{x}_m^{(n)}(s) \end{bmatrix},$$

مجهول  $x_m(s), \dots, x_1^{(n)}(s), \dots, x'_1(s), x_1(s), \dots, x_m^{(n)}(s), \dots$  می‌باشد.

اگر  $\det T \neq 0$ ، آن‌گاه معادله (۱۱) را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$X = -T^{-1}Y. \quad (12)$$

سپس ضرایب  $x_q^{(j)}(s)$  به ازای  $q = 1, 2, \dots, m$  و  $j = 0, 1, \dots, n$  به طور منحصر بفرد توسط معادله (۱۲) مشخص می‌شود. بنابراین دستگاه (۱) دارای جواب یکتا است. این جواب به وسیله چند جمله‌ای تیلور زیر تعیین می‌شود. یعنی:

$$x_q(t) = \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} x_q^{(j)}(s) (t-s)^j, \quad (13)$$

که در آن  $q = 1, 2, \dots, m$ .

### ۳- آنالیز خطا

یکی از مباحث مهم روش‌های عددی، بررسی حداکثر خطا بین جواب تقریبی و جواب دقیق است.

**قضیه ۳-۱:** فرض کنید  $x_m, \dots, x_1$  جواب‌های دقیق دستگاه معادلات انتگرال جبری (۲) و  $\bar{x}_m, \dots, \bar{x}_1$  جواب‌های تقریبی دستگاه (۲) باشند که به روش بسط تیلور به دست آمده‌اند. اگر به ازای تمامی  $M, j = 0, 1, \dots, n$  مثبتی وجود داشته باشد به طوری که  $\sup \{ |k_{pq}^{(j)}(s,t)|, 0 \leq t \leq s \leq 1 \} \leq M$  آن‌گاه جواب تقریبی به جواب دقیق همگراست.

**برهان:** به ازای  $t$ ‌ای که ممکن است وابسته به  $S$  باشد، سری تیلور  $x_q(t)$  عبارت است از:

$$x_q(t) = \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} x_q^{(j)}(s) (t-s)^j + \frac{1}{(n+1)!} x_q^{(n+1)}(\xi(s)) (t-s)^{n+1}, \quad (14)$$

که  $q = 1, 2, \dots, m$ .

با جای‌گذاری (۱۴) در هریک از معادلات (۲) - (۵) و (۷) - (۱۰) و سپس با تفاضل نظیر یکدیگر این دسته از معادلات، عبارت‌های زیر حاصل می‌گردد:

چند جمله‌ای از درجه  $n$  یا کمتر باشد، روش حاضر دقیق خواهد بود. خطاهای  $E$  بوسیله معادله  $E = B^{-1}F$  قابل بررسی است. بنابراین با در نظر گرفتن  $\|\cdot\|$  به عنوان نرم ماتریسی، نابرابری زیر حاصل می‌گردد.

$$\|E\| \leq \|B^{-1}\| \|F\|,$$

که حداکثر خطا به وسیله این نابرابری ارزیابی می‌گردد.

#### ۴- مثال‌های عددی

در این بخش، مثال‌های عددی متنوعی را مطرح می‌کنیم که گویای دقت و کارایی روش مذکور می‌باشد. همچنین حداکثر خطای مطلق روش حاضر را با روش‌های به کار گرفته شده در [۱۱، ۱۵، ۱۶] مقایسه می‌کنیم. تمام محاسبات توسط نرم افزار متلب انجام شده است.

**مثال ۴-۱:** دستگاه معادلات انتگرال جبری زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{bmatrix} 1 & s \\ s & s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \end{bmatrix} + \int_0^s \begin{bmatrix} e^{s-t} & 0 \\ e^{-2t} & e^{s+t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \end{bmatrix}$$

به طوری که

$$\begin{aligned} y_1(s) &= se^{-s} + e^s(s+1), \\ y_2(s) &= 2se^s + 1 + e^{-s}(s^2 - 1). \end{aligned}$$

این دستگاه دارای جواب دقیق

$$x_1(s) = e^s, \quad x_2(s) = e^{-s}$$

می‌باشد. جدول‌های ۱، ۲، ۳ و شکل‌های ۱ و ۲ را ببینید. باید توجه داشت که جدول ۳ مقایسه روش حاضر با روش‌های ارائه شده در مراجع [۱۱، ۱۵، ۱۶] را نشان می‌دهد.

$$F = \begin{bmatrix} \frac{x_1^{(n+1)}(\xi(s))}{(n+1)!} \int_0^s k_{p1}(s,t)(t-s)^{n+1} dt \\ \frac{x_1^{(n+1)}(\xi(s))}{(n+1)!} \int_0^s k'_{p1_s}(s,t)(t-s)^{n+1} dt \\ \vdots \\ \frac{x_1^{(n+1)}(\xi(s))}{(n+1)!} \int_0^s k_{p1_s}^{(n)}(s,t)(t-s)^{n+1} dt \\ \vdots \\ \frac{x_1^{(n+1)}(\xi(s))}{(n+1)!} \int_0^s k_{pm_s}^{(n)}(s,t)(t-s)^{n+1} dt \end{bmatrix}$$

و ماتریس  $B$  ماتریسی  $m(n+1)$  بعدی است که مولفه‌هایش در هر سطر به ترتیب ضرایب  $x_1(s) - \bar{x}_1(s)$  و  $x'_1(s) - \bar{x}'_1(s)$  و  $x_m^{(n)}(s) - \bar{x}_m^{(n)}(s)$  می‌باشند. به طور مثال:

$$b_{11} = a_{11}(s) - \int_0^s k_{11}(s,t) dt,$$

$$b_{12} = - \int_0^s k_{11}(s,t)(t-s) dt.$$

هرگاه برای  $j = 0, 1, \dots, n$  قرار دهیم:

$$\alpha = \sup \left\{ |x_q^{(j)}(s)|, 0 \leq s \leq 1 \right\},$$

آن‌گاه با توجه به فرض قضیه داریم:

$$\left| \frac{x_1^{(n+1)}(\xi(s))}{(n+1)!} \int_0^s k_{pq_s}^{(j)}(s,t)(t-s)^{n+1} dt \right| \leq \frac{\alpha M}{(n+2)!}.$$

بنابراین هرگاه  $n \rightarrow \infty$   $F \rightarrow (0, 0, \dots, 0)^T$ . در نتیجه فرآیند تشریح شده دلالت بر همگرایی جواب تقریبی به جواب دقیق دستگاه معادلات انتگرال جبری (۱) دارد. از طرفی دیگر حداکثر خطای حاصل از این روش را می‌توان به صورت زیر بیان کرد.

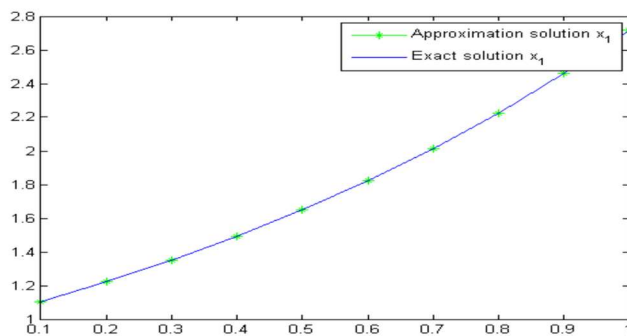
واضح است که باتوجه به دستگاه (۱۸) اگر جواب دقیق دستگاه یعنی  $x_q(s)$  به ازای  $q = 1, 2, \dots, m$  یک

جدول ۱: خطای مطلق  $x_1(s)$  در مثال ۱-۴

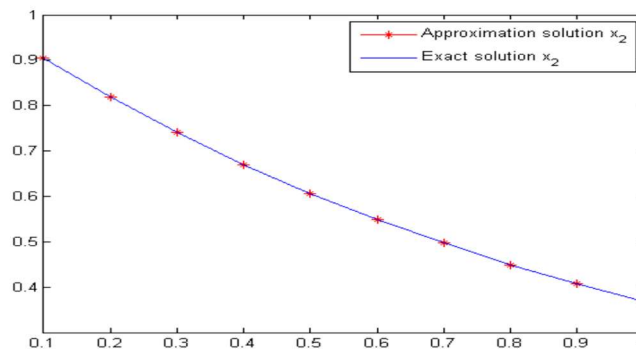
s	n = 6	n = 7	n = 8
0.1	3.7450e-04	7.6849e-05	7.1133e-06
0.2	9.2782e-05	1.4219e-05	8.1198e-07
0.3	4.5862e-05	1.3465e-05	1.6334e-06
0.4	1.0524e-04	2.3748e-05	2.3921e-06
0.5	1.2463e-04	2.6291e-05	2.5060e-06
0.6	1.2646e-04	2.5934e-05	2.4213e-06
0.7	1.2221e-04	2.4804e-05	2.3013e-06
0.8	1.1692e-04	2.3666e-05	2.1929e-06
0.9	1.1226e-04	2.2710e-05	2.1038e-06
1	1.0849e-04	2.1944e-05	2.0324e-06

جدول ۲: خطای مطلق  $x_2(s)$  در مثال ۱-۴

s	n = 6	n = 7	n = 8
0.1	9.7217e-05	2.2969e-05	2.3784e-06
0.2	5.6183e-06	3.0656e-05	5.9989e-07
0.3	4.5944e-05	1.1815e-05	1.3862e-06
0.4	5.3629e-05	1.2542e-05	1.3200e-06
0.5	4.6938e-05	1.0324e-05	1.0196e-06
0.6	3.6022e-05	7.6003e-06	7.2413e-07
0.7	2.5708e-05	5.3013e-06	4.9754e-07
0.8	1.7639e-05	3.6100e-06	3.3785e-07
0.9	1.1855e-05	2.4274e-06	2.2755e-07
1	7.8242e-06	1.6069e-06	1.5107e-07



شکل ۱: جواب دقیق و تقریبی  $x_1(s)$  در مثال ۱-۴



شکل ۲: جواب دقیق و تقریبی  $x_2(s)$  در مثال ۱-۴

جدول ۳: مقایسه حداکثر خطای مطلق در مثال ۴-۱

	روش حاضر $n = 8$	روش [۱۱] $m = 32$ $m = 64$		روش [۱۶] $n = 5, m = 10$	روش [۱۵] $n = 10$
$e_1(s)$	$7.1133e - 06$	$2.8278e - 02$	$1.3125e - 02$	$1.03e - 05$	$1.10e - 04$
$e_2(s)$	$2.3784e - 06$	$2.3382e - 02$	$1.0446e - 02$	$5.05e - 06$	$1.10e - 04$

$$\begin{cases} 3sx_1(s) + (2s + 1)x_2(s) + \int_0^s 2x_2(t)dt = 2s & (۲۰) \\ sx_1(s) - 2sx_2(s) - \int_0^s 2(s+t)(x_1(t) + x_2(t))dt = s - \frac{5}{3}s^3 + \frac{7}{6}s^4 \end{cases}$$

این دستگاه را با روش سری حل می‌کنیم.

**حل با روش سری:** فرض می‌کنیم:

$$\begin{aligned} x_1(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n, \\ x_2(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n s^n. \end{aligned}$$

با جایگذاری این سری‌ها در دستگاه (۲۰) داریم:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (3a_n + \frac{2(n+2)}{n+1} b_n) s^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n s^n = 2s, \quad (۲۱)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - 2b_n) s^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n+6}{(n+1)(n+2)} a_n s^{n+2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n+10}{(n+2)(n+3)} b_n s^{n+3} &= s - \frac{5}{3}s^3 + \frac{7}{6}s^4, \quad (۲۲) \end{aligned}$$

و از آن جا ضرایب ثابت  $a_0 = 1, b_0 = 0$  و  $b_1 = -1$

با استفاده از روابط:

$$3a_1 + b_2 = 3, \quad a_1 - 2b_1 - \frac{6}{2}a_0 = 0,$$

به ترتیب از (۲۱) و (۲۲) داریم:  $a_1 = 1$  و  $b_2 = 0$ .

با ادامه فرایند مقایسه ضرایب هم درجه‌ی دو طرف دستگاه معادلات (۲۱) و (۲۲) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} a_2 = a_3 = a_4 = \dots = 0, \\ b_3 = b_4 = b_5 = \dots = 0. \end{aligned}$$

یعنی:

$$x_2(s) = -s \quad \text{و} \quad x_1(s) = 1 + s.$$

**مثال ۴-۲:** دستگاه معادلات انتگرال جبری زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ s & -2s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \end{bmatrix} - \int_0^s \begin{bmatrix} 3t & 2s+1 \\ 2(s+t) & 2t(s+t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \end{bmatrix}$$

به طوری که

$$\begin{aligned} y_1(s) &= -s^2, \\ y_2(s) &= s - \frac{5s^3}{3} + \frac{7s^4}{6}. \end{aligned}$$

این دستگاه دارای جواب دقیق

$$x_1(s) = 1 + s, \quad x_2(s) = -s$$

می‌باشد. جدول‌های ۴، ۵، ۶ و شکل‌های ۳ و ۴ را ببینید. ضمناً جدول ۶ مقایسه روش حاضر با روش‌های ارائه شده در مراجع [۱۱، ۱۶] را نشان می‌دهد.

همچنین هر کدام از جواب‌های دقیق اشاره شده برای مثال‌های ۱-۴ و ۲-۴ را می‌توان با استفاده از سری توانی بدست آورد هر چند روش‌های دیگری نیز ممکن است. در این خصوص چنانچه مثال ۴-۲ را در نظر بگیریم، با مشتق‌گیری از معادله اول این دستگاه آن را به معادله انتگرال نوع دوم تبدیل می‌کنیم. یعنی داریم:

$$\int_0^s 3tx_1(t)dt + \int_0^s (2s+1)x_2(t)dt = s^2, \quad (۱۸)$$

با مشتق‌گیری معادله انتگرال (۱۸) نسبت به  $s$  معادله زیر حاصل می‌گردد:

$$3sx_1(s) + (2s+1)x_2(s) + \int_0^s 2x_2(t)dt = 2s. \quad (۱۹)$$

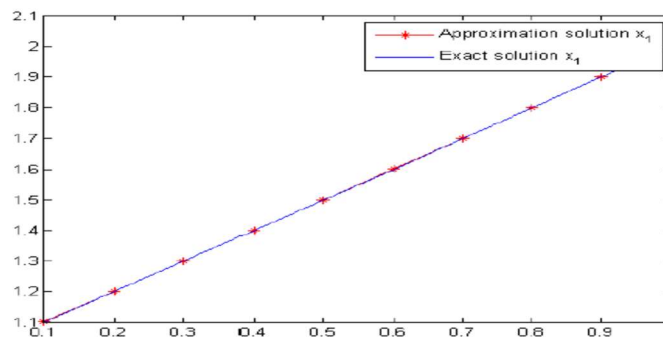
با ترکیب معادله (۱۹) با معادله دوم از دستگاه مثال ۴-۲ دستگاه معادله انتگرال زیر را بدست می‌آوریم.

جدول ۴: خطای مطلق  $x_1(s)$  در مثال ۲-۴

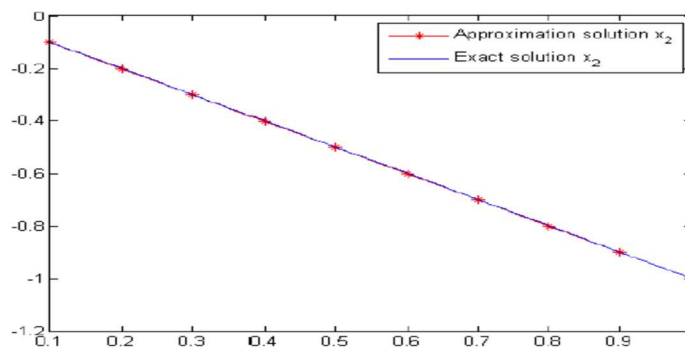
s	n = 1	n = 2	n = 3
0.1	3.5527e-15	2.8866e-15	2.2204e-15
0.2	3.7748e-15	2.8866e-15	2.6645e-15
0.3	3.7748e-15	2.8866e-15	2.4425e-15
0.4	3.5527e-15	2.6645e-15	2.6645e-15
0.5	3.5527e-15	2.4425e-15	2.4425e-15
0.6	3.3307e-15	2.4425e-15	2.4425e-15
0.7	3.3307e-15	2.2204e-15	2.4425e-15
0.8	3.3307e-15	2.2204e-15	2.4425e-15
0.9	3.3307e-15	2.4425e-15	2.4425e-15
1	3.1086e-15	2.2204e-15	2.2204e-15

جدول ۵: خطای مطلق  $x_2(s)$  در مثال ۲-۴

s	n = 1	n = 2	n = 3
0.1	1.6376e-15	1.0686e-15	1.5543e-15
0.2	1.6098e-15	1.1102e-15	1.2768e-15
0.3	1.8319e-15	1.2768e-15	1.3323e-15
0.4	1.7764e-15	1.2768e-15	1.1657e-15
0.5	1.8874e-15	1.2212e-15	1.1102e-15
0.6	1.8874e-15	1.3323e-15	9.9920e-15
0.7	1.9984e-15	1.3323e-15	1.1102e-15
0.8	2.1094e-15	1.3323e-15	1.1102e-15
0.9	2.1094e-15	1.3323e-15	1.1102e-15
1	2.2204e-15	1.3323e-15	1.1102e-15



شکل ۳: جواب دقیق و تقریبی  $x_1(s)$  در مثال ۲-۴



شکل ۴: جواب دقیق و تقریبی  $x_2(s)$  در مثال ۲-۴



جدول ۶: مقایسه حداکثر خطای مطلق در مثال ۴-۲

	روش حاضر	روش [۱۱]		روش [۱۶]
	$n = 3$	$m = 32$	$m = 64$	$n = 5, m = 10$
$e_1(s)$	$2.6645e - 15$	$2.5036e - 02$	$9.3213e - 02$	$1.11e - 15$
$e_2(s)$	$1.5543e - 15$	$2.5746e - 02$	$1.2943e - 02$	$7.77e - 16$

$$\int_0^s \begin{bmatrix} s^3 + t + 1 & \cos(3t) + 1 \\ s + t + 2 & \sin(3t) + 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \end{bmatrix}$$

دارای جواب دقیق:  $x_1(s) = \cos s$  و  $x_2(s) = \sin 3s$  می‌باشد. جدول‌های ۷، ۸، ۹ و شکل‌های ۵ و ۶ را ببینید. باید توجه داشت که جدول ۹ مقایسه روش حاضر و روش‌های ارائه شده در مراجع [۱۱، ۱۶] را نشان می‌دهد.

مثال ۴-۳: هرگاه قرار دهیم:

$$y_1(s) = 1 - (1 + s + s^3) \sin s - \frac{1}{3}(3 + \cos 3s) \left(\sin \frac{3s}{2}\right)^2,$$

$$y_2(s) = 1 - \cos s - 2(1 + s) \sin s + \frac{1}{12}(-8 - 6s + 8 \cos 3s + \sin 6s).$$

آن‌گاه دستگاه معادلات انتگرال جبری زیر

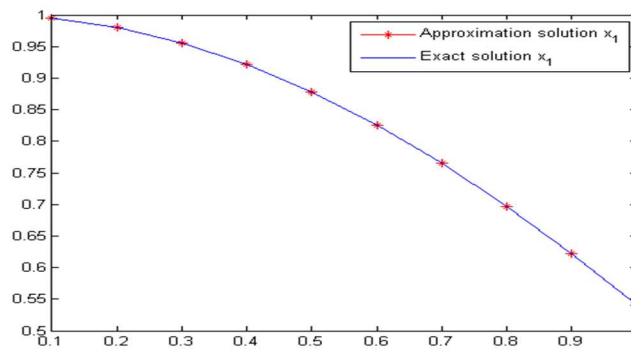
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \end{bmatrix} =$$

جدول ۷: خطای مطلق  $x_1(s)$  در مثال ۴-۳

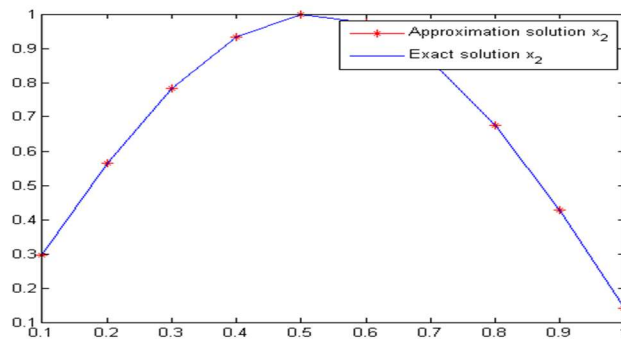
s	$n = 9$	$n = 10$	$n = 11$
0.1	1.6984e-04	3.5454e-05	5.8795e-06
0.2	3.9201e-05	1.0464e-05	8.3561e-07
0.3	6.8959e-06	6.2319e-07	5.5591e-07
0.4	2.0932e-05	2.5964e-06	8.8096e-07
0.5	2.4321e-05	3.3508e-06	9.3985e-07
0.6	2.4631e-05	3.2838e-06	9.4008e-07
0.7	2.4079e-05	2.8767e-06	9.2610e-07
0.8	2.3183e-05	2.1716e-06	9.0774e-07
0.9	2.2016e-05	1.0381e-06	8.8995e-07
1	2.0514e-05	8.0347e-07	8.7744e-07

جدول ۸: خطای مطلق  $x_2(s)$  در مثال ۴-۳

s	$n = 9$	$n = 10$	$n = 11$
0.1	1.9502e-04	3.7183e-05	9.2265e-06
0.2	3.5563e-04	1.0308e-05	5.9726e-06
0.3	6.4224e-05	1.9958e-07	1.8231e-06
0.4	1.2526e-05	6.3435e-06	9.1111e-08
0.5	7.3925e-06	8.1067e-06	4.1791e-07
0.6	1.3976e-05	6.9763e-06	5.7990e-07
0.7	1.7040e-05	7.9394e-07	6.9044e-07
0.8	1.9762e-05	2.2930e-07	8.1799e-07
0.9	2.2799e-05	1.2744e-06	8.8555e-07
1	2.6092e-05	4.7791e-06	1.2183e-06



شکل ۵: جواب دقیق و تقریبی  $x_1(s)$  در مثال ۳-۴



شکل ۶: جواب دقیق و تقریبی  $x_2(s)$  در مثال ۴-۳

مجهول و مشتقاتش تبدیل شده است. جواب تقریبی را با استفاده از حل دستگاه معادلات خطی به دست آوردیم. سپس همگرایی و ارزیابی خطای ناشی از این روش را مورد توجه قرار دادیم. در پایان نیز با آوردن چند مثال دقت بالای جواب تقریبی و سادگی محاسبات نسبت به سایر روش را نشان دادیم.

#### ۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله یک روش مفید برای تعیین جواب تقریبی دستگاه معادلات انتگرال جبری بیان کردیم. در این روش با استفاده از بسط تیلور تابع مجهول، دستگاه معادله انتگرال جبری مفروض به یک دستگاه معادلات خطی از تابع

جدول ۹: مقایسه حداکثر خطای مطلق در مثال ۳-۴

	روش حاضر	روش [۱۱]		روش [۱۶]
	$n = 11$	$m = 32$	$m = 64$	$n = 5, m = 10$
$e_1(s)$	$5.8795e - 06$	$7.9056e - 03$	$3.8495e - 03$	$2.22e - 05$
$e_2(s)$	$9.2265e - 06$	$4.0186e - 02$	$1.7720e - 02$	$1.20e - 03$

Mathematics of Computation, 70, 1503-1514 (2000).

[10] Brunner, H. : Collocation methods for Volterra integral and related functional equations. University Press, Cambridge. (2004).

[11] Balakumar, V., Mutugesan, K. : Numerical solution of Volterra integral-algebraic equations using block pulse functions. Applied Mathematics and Computation, 263, 165-170 (2015).

[12] Ghoreishi, F., Hadizadeh, M., Pishbin, S. : On the convergence analysis of the spline collocation method for system of integral algebraic equations of index-2. Int. J. Comput. Methods, 9, 1250048 (2012).

[13] Pishbin, S., Ghoreishi, F., Hadizadeh, M. : A posteriori error estimation for the Legendre collocation method applied to integral-algebraic Volterra equations. Electronic Transactions on Numerical Analysis, 38, 327-346 (2011).

[14] Bellour, A., Rawashdeh, E. A. : Numerical solution of third kind integral-algebraic equations. Matematik Vensik, 63, 223-233 (2011).

[15] Budniakova, O. S., Bulatov, M. V. : Numerical solution of integral-algebraic equations for multistep methods. Comput. Math. Math. Phys, 52(5), 691-701 (2012).

[16] Mirzaee, F. : Bernoulli collocation method with residual correction for solving integral-algebraic equations. Journal of Linear and Topological Algebra, 40, 193-208 (2015).

[1] Kafarov, V. V., Mayorga, B. Dallos, C. : Mathematical method for analysis of dynamic processes in chemical reactors. Chem. Eng. Sc. 54, 4669-4678 (1999).

[2] Wolfersdorf, L. V. : On identification of memory kernel in linear theory of heat conduction. Math. Meth. App. Sci., 17, 919-932 (1994).

[3] Zenchuk, A. I. : Combination of inverse spectral transform method and method of characteristics: Deformed Pohlmeier equation. J. Nonlinear Math. Phys., 15, 437-448 (2008).

[4] Cannon, J. R. : The one-dimensional heat equation. New York: Cambridge University Press. (1984).

[5] Jumarhon, B., Lamb, W., Mckee, S., Tang, T. : A Volterra integral type method for solving a class of nonlinear initial-boundary value problems. Numer. Meth. Partial Diff. Eq., 12, 265-281 (1996).

[6] Chistyakov, V. F. : Algebro-Differential Operators with Finite-Dimensional Core. Nauka, Siberian Publishing Company RAS, Novosibirsk. (1996).

[7] Gear, C. W. : Differential-algebraic equations, indices and integral-algebraic equations. SIAM. J. Numer. Anal., 27, 1527-1534 (1990).

[8] Bulatov, M. V. : Regularization of singular systems of Volterra integral equations. Computational Mathematics and Mathematical Physics, 42, 315-320 (2002).

[9] Kauthen, J. P. : The numerical solution of integral-algebraic equations of index 1 by polynomial spline collocation methods.

