دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال ششم، شماره بیست و چهارم، خرداد و تیر ۱۳۹۹
شماره شاپا: ۲۵۸۸X-۵۸۸

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

حلقه نزدیک شبه - ارزیاب و N -زیرگروه شبه - ارزیاب

مهدیه صادقی گوغری[1]، طاهره رودباری لر[2]*

[1و2] گروه ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد کرمان، کرمان، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۷/۰۶/۱۷ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۸/۱۰/۱۹

چکیده

در این مقاله تعاریف ایده‌ال اول قوی، N- زیرگروه اول قوی، حلقه‌ی نزدیک شبه–ارزیاب و N- زیرگروه شبه–ارزیاب ارائه داده شده است. همچنین برخی از خواص آنها با آوردن قضایایی اثبات شده است. سپس نشان داده شده است که اگر N یک حلقه‌ی نزدیک با میدان خارج قسمتی K و P یک ایده‌ال اول قوی از N باشد، آنگاه برای هر مجموعه‌ی ضربی بسته S از N، P_S یک ایده‌ال اول قوی از N_S است. علاوه بر این رابطه بین ایده‌ال اول قوی و N- زیرگروه اول قوی و رابطه بین حلقه‌ی نزدیک شبه–ارزیاب و N- زیرگروه شبه–ارزیاب را با آوردن قضایایی به دست آوردند. همچنین نشان داده است که اگر هر N- زیرگروه یک ایده‌ال از M و P یک N- زیرگروه اول قوی از M باشد، آنگاه $(P:M)$ یک ایده‌ال اول قوی از N است. و در انتها ثابت شده است که اگر P,L دو تا N- زیرگروه از M و $P \subseteq L$ باشد و برای هر $y \in K$، $y^{-1}P \subseteq P$، آنگاه L، N- زیرگروه اول قوی از M است اگر و فقط اگر $\frac{L}{P}$، N- زیرگروه اول قوی از $\frac{M}{P}$ باشد.

واژه‌های کلیدی: ایده‌آل اول قوی، N- زیرگروه اول قوی، حلقه‌ی نزدیک شبه–ارزیاب، N- زیرگروه شبه–ارزیاب.

*. عهده‌دار مکاتبات: Email: taherehroodbarylor@iauk.ac.ir

۱- مقدمه

هاستون و هدستروم ایده‌آل اول قوی و دامنه‌ی شبه ارزیاب را نخستین بار در سال ۱۹۷۸ تعریف کردند [۱]، به دنبال آن اندرسون، دابز و بداوی به مطالعه‌ی بیشتر این حلقه‌ها پرداختند و در سال ۱۹۹۷ ایده‌آل اول قوی را برای حلقه‌های جابجایی و یکدار تعمیم دادند و حلقه‌ی شبه ارزیاب را تعریف کردند. سپس در سال ۲۰۰۲، بداوی با معرفی ایده‌آل‌های اول شبه قوی، تعمیمی دیگر از دامنه‌های شبه ارزیابی را تحت عنوان دامنه‌های شبه تقریباً ارزیابی ارائه و مورد بررسی قرار داد [۲]. و در سال ۲۰۱۱ مقدری و نکوئی روی زیرمدول‌های اول قوی و مدول‌های شبه- ارزیاب کار کردند و نتایج جالبی بدست آوردند [۳]. در اینجا نیز ما بر آن شدیم تا این نتایج را روی حلقه‌های نزدیک دنبال کنیم.

یک حلقه‌ی نزدیک راست، مجموعه‌ی نا تهی N همراه با دو عمل دوتایی "+" و "." است. بطوریکه:

(۱) $(N,+)$ یک گروه باشد(لزوماً آبلی نباشد)،

(۲) $(N,.)$ یک نیم‌گروه باشد،

(۳) برای هر $n_1,n_2,n_3 \in N$، $(n_1+n_2).n_3 = n_1n_3+n_2n_3$ برقرارباشند [۴].

در این مقاله همه‌ی حلقه‌های نزدیک N راست، جابجایی (تحت عمل ضرب) و یکدار هستند. M یک N–گروه یکانی است.

زیرگروه I از $(N,+)$ را یک زیرگروه نرمال گوئیم هرگاه برای هر $n \in N , i \in I$ داشته باشیم $n+i-n \in I$ [۴].

زیرگروه نرمال I از $(N,+)$ را یک ایده‌آل از N می‌گوئیم هرگاه شرایط زیر برقرار باشند:

(۱) $IN \subseteq I$،

(۲) برای هر $n,n' \in N , i \in I$، $n'(n+i)-n'n \in I$.

اکنون هر زیرگروه نرمال R از $(N,+)$ که در شرط (۱) صدق کند را ایده‌ال راست از N می‌گوئیم و با $R <_r N$ نمایش می‌دهیم و هر زیرگروه نرمال L از $(N,+)$ که در شرط (۲) صدق کند را ایده‌ال چپ از N می‌گوئیم و با $L <_l N$ نمایش می‌دهیم [۵].

فرض کنید $(M,+)$ همراه با صفر یک گروه، N یک حلقه نزدیک آنگاه M را همراه با تابع $N\times M \to M$ (تصویر (n,m) تحت این تابع با nm نمایش داده می‌شود) N- گروه گفته می‌شود اگر برای هر $n,n' \in N , m \in M$ در شرایط زیر صدق کند:

الف) $(n+n')m = nm+n'm$،

ب) $(nn')m = n(n'm)$.

و N- گروه M با نماد ${}_NM$ نمایش داده می‌شود [۴].

فرض کنید N , N' حلقه‌های نزدیک باشند و M,M'، N- گروه باشند. آنگاه:

الف) نگاشت $h:N \to N'$ را همریختی گویند، اگر برای هر $m,n \in N$ داشته باشیم: $h(m+n) = h(m)+h(n), h(m.n) = h(m).h(n)$

ب) نگاشت $h:M \to M'$ را N–همریختی گویند، اگر برای هر $n \in N, m_1,m_2 \in M$ داشته باشیم: $h(m_1+m_2)=h(m_1)+h(m_2)$, $h(nm_1)=nh(m_1)$ [۴].

فرض کنید N یک حلقه‌ی نزدیک باشد آنگاه S را یک زیر مجموعه‌ی ضربی بسته از $(N,.)$ می‌گویند هرگاه $1_N \in S$ و برای هر $a,b \in S$، $a.b \in S$ [۴].

قرارداد: η_1، مجموعه‌ی همه‌ی حلقه‌های نزدیک و یکدار می‌باشد [۴].

فرض کنید N یک حلقه‌ی نزدیک و S یک زیر مجموعه‌ی ضربی بسته $(N,.)$ باشد. آنگاه N_S را یک حلقه‌ی نزدیک خارج قسمتی چپ (راست) از N گفته می‌شود اگر در شرایط زیر صدق کند:

(۱) $N_S \in \eta_1$،

(۲) $h:N \to N_S$، (h تکریختی باشد)

(۳) برای هر $s \in S$: s در $(N,.)$ وارون‌پذیر باشد،

(۴) برای هر $q \in N_S$ وجود داشته باشد $s \in S, n \in N$ بطوریکه $q=h(n)h(s)^{-1}$ ($q=h(s)^{-1}h(n)$) [۴].

N از دامنه صحیح نزدیک K حلقه خارج قسمتی میدان خارج قسمتی نزدیک گفته می‌شود هرگاه هر عضو مخالف صفر آن وارون‌پذیر باشد.

فرض کنید N یک حلقه‌ی نزدیک، M یک N- گروه و S یک زیر مجموعه‌ی ضربی بسته از $(N,.)$ باشد، آنگاه

M_S را یک N-گروه خارج قسمتی چپ (راست) از M گویند، اگر شرایط زیر برقرار باشند:

(۱) M_S یک N-گروه یکدار باشد،

(۲) $h: M \to M_S$، (h تکریختی باشد)

(۳) برای هر $s \in S$: s در $(N,.)$ وارون‌پذیر باشد،

(۴) برای هر $q \in M_S$ وجود داشته باشد $s \in S, m \in M$ بطوریکه $q = h(m)s^{-1}$ $(q = s^{-1}h(m))$. [۵]

فرض کنید N یک حلقه‌ی نزدیک، M یک N- گروه و S یک زیر مجموعه‌ی ضربی بسته از $(N,.)$باشد. در [۵]، رابطه‌ی هم ارزی : روی $M \times S$ را به صورت $(m,s):(n,t) \Leftrightarrow \exists (s_1,s_2) \in S \times S$ به طوریکه $ms_1 = ns_2 , ss_1 = ts_2$.
تعریف کردند و کلاس‌های هم ارزی (m,s) را به صورت $[m,s]$ نمایش می‌دهند و در [۵]، جمع و ضرب از N-گروه‌های کسری M_S را به صورت زیر تعریف کردند. برای هر $m,m' \in M$ و بعضی از $s_1,s_2 \in S$ داریم:

$$(m,s).(m',s') = (m's_2, ss_1)$$
$$(m,s)+(m',s') = (ms_1+m's_2, ss_1),$$

فرض کنید N یک حلقه‌ی نزدیک و M یک N-گروه باشد. آنگاه M، N- گروه ضربی نامیده می‌شود، هرگاه برای هر N- زیرگروه K از M، ایده‌ال I از N وجود داشته باشد به طوریکه $K = IM$. [۶]

فرض کنید P یک N- گروه از M باشد، آنگاه [۵]،
$(P:M) = \{x \in N \mid xM \subseteq P\}$

فرض کنید N یک حلقه–ی نزدیک و P یک ایده‌ال از N باشد، آنگاه P را یک ایده‌ال اول از N گویند. اگر برای هر $x,y \in N$ و $xNy \subseteq P$ ایجاب کند $x \in P$ یا $y \in P$ است. چون N یکدار است بنابراین اگر $xNy \subseteq P$ باشد آنگاه $xy \in P$) در نتیجه $x \in P$ یا $y \in P$). [۷]

فرض کنید N یک حلقه‌ی نزدیک و $d \in N$ *باشد.* آنگاه d عضو منظم از N گفته می‌شود اگر برای $y \in N$، $dy = 0$ ایجاب کند $d = 0$ یا $y = 0$. [۴]

فرض کنید M یک N– گروه باشد. آنگاه M را با وفا[1] گویند اگر $(0:M) = \{0\}$. [۴]

حلقه‌ی نزدیک N را میدان– نزدیک گویند اگر $(N-\{0\},.)$ یک گروه باشد [۴].

قضیه ۱. ۱. فرض کنید N یک حلقه‌ی نزدیک و S یک زیر مجموعه‌ی ضربی بسته از $(N,.)$ باشد. آنگاه N_S را یک حلقه‌ی نزدیک خارج قسمتی چپ از N است اگر و فقط اگر

(۱) S یک زیر مجموعه‌ی ناتهی باشد،

(۲) برای هر $s \in S$; s حذف پذیر باشد،

(۳) S در شرط اور چپ صدق کند. [۴]

فرض کنید N یک حلقه‌ی نزدیک و S یک مجموعه‌ی ضربی بسته از $(N,.)$ باشد، آنگاه N در شرط اور[2] چپ صدق می‌کند اگر برای هر $(n,s) \in N \times S$ وجود داشته باشد $(n_1,s_1) \in N \times S$ به طوریکه $ns_1 = sn_1$. [۴]

فرض کنید N یک حلقه‌ی نزدیک و S یک مجموعه‌ی ضربی بسته از $(N,.)$ باشد و N در شرط اور چپ صدق می‌کند، آنگاه در [۵]، جمع و ضرب N_S را بصورت زیر تعریف کردند. برای هر $n,n' \in N$, $s,s' \in S$، $s_1 \in S$, $n_1 \in N$ وجود دارد به طوریکه:

$$\frac{n}{s}+\frac{n'}{s'} = \frac{ns_1+n'n_1}{ss_1} , \quad \frac{n}{s}.\frac{n'}{s'} = \frac{n'n_1}{ss_1}$$

قضیه ۱. ۲. فرض کنید N یک حلقه‌ی نزدیک، M یک N- گروه، S یک زیرمجموعه‌ی ضربی بسته از (N,.)، N در شرط اُور چپ صدق کند و همچنین S وارون‌پذیر باشد. آنگاه M دارای N -زیرگروه چپ M_S است اگر و فقط اگر:

(۱) S یک مجموعه‌ی ناتهی باشد،

(۲) برای هر s عضو S :s حذف پذیر باشد. [۵]

۲- حلقه‌های نزدیک شبه ارزیاب

در این بخش مفاهیم حلقه‌های نزدیک شبه ارزیاب،

1. faithful
2. Left ore condition

ایده‌ال‌های اول قوی را معرفی و بعضی خواص آنها را بررسی می‌شود.

تعریف۲. ۱. ایده‌ال اول P از حلقه‌ی نزدیک N را، ایده‌ال اول قوی می‌نامیم اگر برای هر $a,b \in N$، aP , bN تحت عمل زیر مجموعه قابل مقایسه باشند.

مثال ۲. ۲. حلقه‌ی نزدیک $(N,+,.)$ را در نظر می‌گیریم که $(N,+)$ گروه چهارتایی کلاین روی $\{0,a,b,c\}$ و "." آن را به صورت زیر تعریف شده است [۸].

.	0	a	b	c
0	0	0	0	0
a	0	0	0	a
b	0	a	b	b
c	0	a	b	c

با محاسباتی ساده می‌بینیم که $I_1 = \{0\}$، $I_2 = \{0,a\}$ و N تنها ایده‌ال‌های N هستند. $I_2 = \{0,a\}$ تنها ایده‌ال اول N است. واضح است که برای هر $a,b \in N$، $aI_2 \subseteq bN$ است. در نتیجه I_2 یک ایده‌ال اول قوی است.

لم ۲. ۳. فرض کنید N یک حلقه نزدیک جابجایی باشد. آنگاه N_S یک حلقه نزدیک جابجایی است.

اثبات: فرض کنید N یک حلقه نزدیک جابجایی باشد، حال نشان می‌دهیم که N_S یک حلقه نزدیک جابجایی است.

$\frac{x}{s},\frac{y}{s'} \in N_S$ برای هر $(x,s') \in N \times S$، در شرط اور چپ صدق N را در نظر می‌گیریم. بنابراین $(n',t') \in N \times S$ وجود دارد. بطوریکه $xt' = s'n' \Rightarrow n' = s'^{-1}xt'$. آنگاه

$$\frac{x}{s}.\frac{y}{s'} = \frac{yn'}{st'} = \frac{ys'^{-1}xt'}{st'} = \frac{ys'^{-1}x}{s} = \frac{yx}{ss'} = \frac{xy}{ss'}$$

$(y,s) \in N \times S$ را در نظر می‌گیریم و چون N در شرط اور چپ صدق می‌کند. بنابراین $(n'',t'') \in N \times S$ وجود دارد بطوریکه $yt'' = sn'' \Rightarrow n'' = s^{-1}yt''$. آنگاه

$$\frac{y}{s'}.\frac{x}{s} = \frac{xn''}{s't''} = \frac{xs^{-1}yt''}{s't''} =$$
$$\frac{xs^{-1}y}{s'} = \frac{xy}{s's} = \frac{xy}{ss'}$$

لم ۲. ۴. فرض کنید P ایده‌ال اول از حلقه‌ی نزدیک خارج قسمتی N_S و K میدان خارج قسمتی از حلقه نزدیک N باشد. آنگاه برای هر $\frac{x}{t},\frac{y}{s} \in K$، $\frac{y}{s}N_S \subseteq \frac{x}{t}P$ یا $\frac{x}{t}P \subseteq \frac{y}{s}N_S$.

اثبات. فرض کنید $\frac{x}{t},\frac{y}{s} \in K$ باشند. نشان می‌دهیم که $\frac{y}{s}N_S \subseteq \frac{x}{t}P$. چون P ایده‌ال اول از حلقه‌ی نزدیک خارج قسمتی N_S است کافی است نشان می‌دهیم که $\frac{y}{s} \in \frac{x}{t}P$. $\frac{p_1}{t_1} \in P$ در نظر می‌گیریم. چون یک حلقه نزدیک جابجایی است بنا به لم۲. ۳. N_S نیز جابجایی است.

$$\frac{p_1}{t_1}.\frac{x}{t} = \frac{x}{t}.\frac{p_1}{t_1} \in \frac{x}{t}P$$

حال $(ys^{-1}t_1,x) \in N \times S$ را در نظر می‌گیریم. و چون N در شرط اور چپ صدق می‌کند. بنابراین $(n_1,s_1) \in N \times S$ وجود دارد بطوریکه $ys^{-1}t_1s_1 = xn_1 \Rightarrow n_1 = x^{-1}ys^{-1}t_1s_1$. در نتیجه

$$\frac{p_1}{t_1}.\frac{x}{t} = \frac{xn_1}{t_1s_1} = \frac{xx^{-1}ys^{-1}t_1s_1}{t_1s_1} = \frac{ys^{-1}}{1} = \frac{y}{s}$$

$$\frac{y}{s} \in \frac{x}{t}P$$

تعریف ۲. ۵. فرض کنید N یک حلقه‌ی نزدیک باشد، آنگاه N را حلقه‌ی نزدیک شبه ارزیاب می‌نامیم اگر هر ایده‌ال اول P از N، ایده ال اول قوی باشد.

مثال ۲. ۶. مثال ۲. ۲. یک حلقه‌ی نزدیک شبه ارزیاب است.

قضیه ۲. ۷. فرض کنید N یک حلقه‌ی نزدیک با میدان خارج قسمتی K و P یک ایده‌ال اول قوی از N باشد. آنگاه برای هر مجموعه‌ی ضربی بسته S از N به طوریکه $1 \in S$، P_S یک ایده‌ال اول قوی از N_S است.

اثبات. فرض کنید P ایده‌ال اول قوی از حلقه‌ی نزدیک N باشد. ابتدا نشان می‌دهیم که P_S یک ایده‌ال اول از N_S است.

(۱) چون $\frac{0}{1} \in P_S$ است، پس P_S یک مجموعه‌ی ناتهی است،

(۲) برای هر $\frac{x}{s}, \frac{y}{s'} \in P_S$ ، $(s,s') \in N \times S$ را در نظر می‌گیریم و چون N در شرط اور چپ صدق می‌کند، بنابراین $(n',t') \in N \times S$ وجود دارد بطوریکه $st' = s'n'$. آنگاه

$$\frac{x}{s} - \frac{y}{s'} = \frac{xt' - yn'}{st'} \in P_S$$

(۳) حال نشان می‌دهیم که P_S یک زیرمجموعه نرمال از N_S است. کافی است نشان دهیم که برای هر

$$\frac{n}{s} + \frac{x}{s'} - \frac{n}{s} \in P_S \,,\ \frac{x}{s'} \in P_S, \frac{n}{s} \in N_S$$

$(s,s') \in N \times S$ را در نظر می‌گیریم و چون N در شرط اور چپ صدق می‌کند. بنابراین $(n_1, s_1) \in N \times S$ وجود دارد، بطوریکه $ss_1 = s'n_1$ باشد. آنگاه

$$\frac{n}{s} + \frac{x}{s'} = \frac{ns_1 + xn_1}{ss_1}$$

و $(s_1, 1) \in N \times S$ در نظر می‌گیریم و چون N در شرط اور چپ صدق می‌کند. بنابراین $(n_2, s_2) \in N \times S$ وجود دارد بطوریکه $s_1 s_2 = 1 n_2$ باشد، آنگاه

$$\frac{n}{s} + \frac{x}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{ns_1 + xn_1}{ss_1} - \frac{n}{s} =$$

$$= \frac{(ns_1 + xn_1)s_2 - nn_2}{ss_1 s_2} =$$

$$\frac{ns_1 s_2 + xn_1 s_2 - nn_2}{ss_1 s_2} =$$

$$\frac{ns_1 s_2 + xn_1 s_2 - ns_1 s_2}{ss_1 s_2} \in P_S$$

بنابراین P_S یک زیرمجموعه نرمال از N_S است.

(۴) نشان می‌دهیم که P_S یک ایده‌ال راست از N_S است.

یعنی $P_S . N_S \subseteq P_S$ یا (برای هر $\frac{x_i}{s_i} \in P_S, \frac{n_i}{s'_i} \in N_S$، $\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{s_i} . \frac{n_i}{s'_i} \subseteq P_S$)

بدون اینکه به کلیت مسئله خللی وارد شود $n = 2$ در نظر می‌گیریم؛ با استفاده از لم ۱. ۲. N_S یک حلقه‌ی نزدیک جابجایی است. بنابراین

$$\frac{x_1}{s_1} . \frac{n_1}{s'_1} + \frac{x_2}{s_2} . \frac{n_2}{s'_2} =$$

$$\frac{n_1}{s'_1} . \frac{x_1}{s_1} + \frac{n_2}{s'_2} . \frac{x_2}{s_2} =$$

$$\frac{x_1 n'}{s'_1 t'} + \frac{x_2 n''}{s'_2 t''} =$$

$$\frac{x_1 n' r + x_2 n'' m}{s'_1 t' r} \in P_S$$

$(\exists n', n'', m \in N, t', t'', r \in S)$.

(۵) برای هر $\frac{n}{s}, \frac{n'}{s'} \in N_S, \frac{x}{t} \in P_S$ نشان می‌دهیم. P_S یک ایده ال چپ است. یعنی

$$\left(\frac{n'}{s'}\left(\frac{n}{s} + \frac{x}{t}\right) - \frac{n'}{s'} . \frac{n}{s} \in P_S\right)$$

$(s,t) \in N \times S$ در نظر می‌گیریم و چون N در شرط اور چپ صدق می‌کند، بنابراین $(n_1, t_1) \in N \times S$ وجود دارد به طوریکه $st_1 = tn_1$ باشد، آنگاه $\frac{n}{s} + \frac{x}{t} = \frac{nt_1 + xn_1}{st_1}$ و $(1, t_1) \in N \times S$ در نظر می‌گیریم و چون N در شرط اور چپ صدق می‌کند، در نتیجه $(n_2, t_2) \in N \times S$ وجود دارد بطوریکه $t_1 n_2 = t_2$ باشد. آنگاه

$$\frac{n'}{s'}\left(\frac{nt_1 + xn_1}{st_1}\right) =$$

$$\frac{(nt_1 + xn_1)n_2}{s' t_2} =$$

$$\frac{nt_1n_2+xn_1n_2}{s't_2}$$

و $(t_1n_2,1)\in N\times S$ در نظر می‌گیریم و چون N در شرط اور چپ صدق می‌کند، بنابراین $(n_3,t_3)\in N\times S$ وجود دارد بطوریکه $t_1n_2t_3=n_3\in S$ باشد. و $\frac{n'}{s'}.\frac{n}{s}=\frac{nn_3}{s's_3}$ و $(t_1n_2,n_3)\in N\times S$ در نظر می‌گیریم و چون N در شرط اور چپ صدق می‌کند، در نتیجه $(n_4,t_4)\in N\times S$ وجود دارد بطوریکه $t_1n_2t_4=n_3n_4$ باشد. پس

$$\frac{n'}{s'}(\frac{nt_1+xn_1}{st_1})-\frac{n'}{s'}.\frac{n}{s}=$$
$$\frac{(nt_1+xn_1)n_2}{s't_2}-\frac{nn_3}{s't_3}=$$
$$\frac{nt_1n_2t_4+xn_1n_2t_4-nn_3n_4}{s't_2t_4}=$$
$$\frac{nt_1n_2t_4+xn_1n_2t_4-nt_1n_2t_4}{s't_2t_4}\in P_S$$

در نتیجه P_S یک ایده‌ال چپ از N_S است. از محاسبات بالا نتیجه می‌گیریم که P_S یک ایده‌ال از N_S است. اکنون نشان می‌دهیم P_S یک ایده‌ال اول از N_S است.

فرض کنید $\frac{x}{s},\frac{y}{t}\in N_S$ اگر $\frac{x}{s}.\frac{y}{t}\in P_S$ باشد. آنگاه نشان می‌دهیم که $\frac{x}{s}\in P_S$ یا $\frac{y}{t}\in P_S$. فرض کنید $\frac{x}{s}\notin P_S$ و $\frac{x}{s}.\frac{y}{t}\in P_S$ باشد. $(s,1)\in N\times S$ در نظر می‌گیریم و چون N در شرط اور چپ صدق می‌کند. بنابراین $(n_1,t_1)\in N\times S$ وجود دارد بطوریکه $st_1=n_1$ باشد.

$$\frac{x}{s}.\frac{y}{t}=\frac{yn_1}{st_1}=\frac{yn_1}{n_1}=$$
$$\frac{y}{1}\in P_S\Rightarrow y\in P$$

بنابراین $\frac{y}{t}\in P_S$ است. در نتیجه P_S یک ایده‌ال اول از N_S است. برای هر $\frac{x}{t},\frac{y}{s}\in K$، اگر $\frac{x}{t}.\frac{y}{s}\in P_S$ باشد آنگاه واضح است که $\frac{y}{s}\in P_S$. در نتیجه P_S یک ایده‌ال اول قوی از N_S است.

نتیجه ۲. ۸. فرض کنید P ایده‌ال اول قوی از حلقه‌ی نزدیک N باشد. آنگاه N_S یک حلقه نزدیک شبه ارزیاب است.

۳- N-گروه شبه ارزیاب در حلقه‌های نزدیک

در این بخش، مفاهیمی از N-گروه شبه ارزیاب در حلقه‌های نزدیک، ایده ال کسری، N-زیرگروه کسری و N-زیرگروه اول قوی در حلقه‌های نزدیک را معرفی می‌کنیم. هدف ما پیدا کردن رابطه بین حلقه‌ی نزدیک شبه ارزیاب و N -گروه شبه ارزیاب است و رابطه بین N-زیرگروه اول قوی و ایده‌ال اول قوی، با اثبات چند قضیه نشان داده شده است. در این بخش K میدان خارج قسمتی از حلقه نزدیک یکدار N است.

تعریف ۳. ۱. فرض کنید N یک حلقه‌ی نزدیک و M یک N-گروه یکدار باشد، آنگاه P را N-زیرگروه اول گوئیم اگر $P\neq M$ و برای هر $n\in N, m\in M$، $nm\in P$ باشد، آنگاه $m\in P$ یا $n\in(P:M)$.

مثال ۳. ۲. فرض کنید $N=\left\{\begin{pmatrix}\bar a & \bar 0\\ \bar b & \bar c\end{pmatrix}\middle|\bar a,\bar b,\bar c\in Z_2\right\}$ همراه با جمع و ضرب ماتریس‌ها یک حلقه‌ی نزدیک و $M={}_NN$ باشد. $S=\left\{\begin{pmatrix}\bar 1 & \bar 0\\ \bar 0 & \bar 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar 1 & \bar 0\\ \bar 1 & \bar 1\end{pmatrix}\right\}$ را مجموعه ضربی بسته از N در نظر می‌گیریم، بنابراین با کمی محاسبات داریم

$$M_S=\left\{\frac{\begin{pmatrix}\bar 0&\bar 0\\ \bar 0&\bar 0\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}\bar 1&\bar 0\\ \bar 1&\bar 1\end{pmatrix}},\frac{\begin{pmatrix}\bar 1&\bar 0\\ \bar 0&\bar 0\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}\bar 1&\bar 0\\ \bar 0&\bar 1\end{pmatrix}},\frac{\begin{pmatrix}\bar 0&\bar 0\\ \bar 1&\bar 0\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}\bar 1&\bar 0\\ \bar 1&\bar 1\end{pmatrix}},\frac{\begin{pmatrix}\bar 0&\bar 0\\ \bar 1&\bar 1\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}\bar 1&\bar 0\\ \bar 0&\bar 1\end{pmatrix}},\frac{\begin{pmatrix}\bar 1&\bar 0\\ \bar 1&\bar 0\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}\bar 1&\bar 0\\ \bar 1&\bar 1\end{pmatrix}},\frac{\begin{pmatrix}\bar 1&\bar 0\\ \bar 0&\bar 1\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}\bar 1&\bar 0\\ \bar 0&\bar 1\end{pmatrix}},\frac{\begin{pmatrix}\bar 1&\bar 0\\ \bar 1&\bar 1\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}\bar 1&\bar 0\\ \bar 0&\bar 1\end{pmatrix}}\right\}$$

$$P_1=\left\{\begin{pmatrix}\bar 0&\bar 0\\ \bar 0&\bar 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar 0&\bar 0\\ \bar 1&\bar 0\end{pmatrix}\right\}$$

$$P_2=\left\{\begin{pmatrix}\bar 0&\bar 0\\ \bar 0&\bar 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar 0&\bar 0\\ \bar 0&\bar 1\end{pmatrix}\right\}$$

$$P_3=\left\{\begin{pmatrix}\bar 0&\bar 0\\ \bar 0&\bar 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar 0&\bar 0\\ \bar 1&\bar 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar 1&\bar 0\\ \bar 0&\bar 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar 1&\bar 0\\ \bar 1&\bar 0\end{pmatrix}\right\}$$

$$P_4=\left\{\begin{pmatrix}\bar 0&\bar 0\\ \bar 0&\bar 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar 0&\bar 0\\ \bar 1&\bar 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar 0&\bar 0\\ \bar 0&\bar 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar 0&\bar 0\\ \bar 1&\bar 1\end{pmatrix}\right\}$$

و $M = {}_N N$ تنها N–زیرگروه‌های غیر صفر از M هستند. اکنون نشان می‌دهیم که P_3 یک N–زیرگروه اول از M است. فرض کنید $\begin{pmatrix}\bar 1&\bar 0\\ \bar 0&\bar 0\end{pmatrix}\in N, \begin{pmatrix}\bar 1&\bar 0\\ \bar 1&\bar 1\end{pmatrix}\in M$ بطوریکه $\begin{pmatrix}\bar 1&\bar 0\\ \bar 1&\bar 1\end{pmatrix}\notin P_3$ باشد. پس $\begin{pmatrix}\bar 1&\bar 0\\ \bar 0&\bar 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\bar 1&\bar 0\\ \bar 1&\bar 1\end{pmatrix}\in P_3$ و واضح است که $\begin{pmatrix}\bar 1&\bar 0\\ \bar 0&\bar 0\end{pmatrix}M\subseteq P_3$. با محاسبات مشابه می‌بینیم که P_3 یک N– زیرگروه اول از M است.

تعریف ۳. ۳. فرض کنید N یک حلقه‌ی نزدیک با میدان خارج قسمتی K و M یک N–گروه باشد، آنگاه N–زیرگروه اول P از M را N– زیرگروه اول قوی می‌گوئیم اگر برای هر $x\in M_S$ و $y\in K$، $yx\in P$، ایجاب کند $x\in P$ یا $y\in(P:M)$.

مثال ۳. ۴. حلقه‌ی نزدیک $\mathbb{Z}$ با میدان خارج قسمتی $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{Z}$ را به عنوان یک $\mathbb{Z}$– گروه در نظر بگیرید. آنگاه واضح است که $2\mathbb{Z}$ یک $\mathbb{Z}$– زیرگروه اول قوی از $\mathbb{Z}$ است.

تعریف ۳. ۵. اگر N یک حلقه‌ی نزدیک و M یک N– گروه باشد. N– زیرگروه L از M_S را N–زیرگروه کسری می‌گوئیم، اگر $r\in S$ وجود داشته باشد، بطوریکه $rL\subseteq M$.

مثال ۳. ۶. در مثال ۳. ۲. $L=\left\{\frac{\begin{pmatrix}\bar 0&\bar 0\\ \bar 0&\bar 0\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}\bar 1&\bar 0\\ \bar 1&\bar 1\end{pmatrix}},\frac{\begin{pmatrix}\bar 1&\bar 0\\ \bar 0&\bar 0\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}\bar 1&\bar 0\\ \bar 0&\bar 1\end{pmatrix}}\right\}$ را در نظر بگیرید. واضح است که L، N–زیرگروهی از M_S است. $r=\begin{pmatrix}\bar 1&\bar 0\\ \bar 1&\bar 1\end{pmatrix}\in S$ قرار می‌دهیم، لذا داریم $rL=\left\{\begin{pmatrix}\bar 0&\bar 0\\ \bar 0&\bar 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\bar 0&\bar 0\\ \bar 1&\bar 0\end{pmatrix}\right\}\subseteq M$. بنابراین L، N–زیر گروه کسری از M است.

اگر N یک حلقه‌ی نزدیک باشد. برای $y\in K$ و $x\in M_S$ پس واضح است که Ny یک ایده ال کسری از N و Nx یک N–زیرگروه کسری از M است.

قضیه ۳. ۷. فرض کنید P یک N–زیرگروه حقیقی از M باشد. آنگاه P یک N –زیرگروه اول قوی است اگر و فقط اگربرای هر ایده‌ال I از N و هر N –زیرگروه کسری L از M، $IL\subseteq P$ نتیجه دهد که $L\subseteq P$ یا $I\subseteq(P:M)$.

اثبات. فرض کنید P یک N–زیرگروه اول قوی باشد، $IL\subseteq P$ و $L\not\subset P$. نشان می‌دهیم $I\subseteq(P:M)$. چون $L\not\subset P$ بنابراین $x\in L$ وجود دارد که $x\notin P$. اکنون $y\in I$ در نظر بگیرید. پس $yx\in IL$.

از طرفی $IL\subseteq P$. بنابراین $yx\in P$، چون P یک N–زیرگروه اول قوی است و $x\notin P$. بنا به فرض $y\in(P:M)$. در نتیجه $I\subseteq(P:M)$.

برعکس، واضح است که P یک N–زیرگروه اول از M است. فرض کنید $y\in K$ و $x\in M_S$، $yx\in P$ و $x\notin P$. $I=Ny$ یک ایده ال کسری از N و $L=Nx$، یک N –زیرگروه کسری از M در نظر می‌گیریم، بنابراین به راحتی دیده می‌شود $IL\subseteq P$، آنگاه $L=Nx\subseteq P$ یا $I=Ny\subseteq(P:M)$. پس $x\in P$ یا $NyM\subseteq P$. از طرفی $x\notin P$ بنابراین $NyM\subseteq P$. چون N یک حلقه‌ی نزدیک یکدار است لذا $yM\subseteq P$. در نتیجه $y\in(P:M)$.

قضیه ۳. ۸. فرض کنید P یک N–زیرگروه حقیقی از M باشد. آنگاه P یک N–زیرگروه اول قوی است اگر و فقط اگر برای هر $y\in K$ و هر N –زیرگروه کسری L از M، $yL\subseteq P$ ایجاب کند $L\subseteq P$ یا $y\in(P:M)$.

اثبات. فرض کنید P یک N–زیرگروه اول قوی $y\in K$ و $x\in L$ بطوریکه $yx\in P$ باشد. در نتیجه $x\in P$ یا $y\in(P:M)$ است. پس $L\subseteq P$ یا $y\in(P:M)$.

برعکس. واضح است که P یک N–زیرگروه اول است. فرض کنید $y\in K$ و $x\in M_S$ بطوریکه $yx\in P$. $L=Nx$، یک N–زیرگروه کسری از M، در نظر می‌گیریم. بنابراین $yL\subseteq P$، آنگاه $L=Nx\subseteq P$ یا $y\in(P:M)$. چون یک حلقه نزدیک یکدار است بنابراین $x\in P$ یا $y\in(P:M)$. لذا P یک N–زیرگروه اول قوی از M است.

قضیه ۳. ۹. فرض کنید P یک N–زیرگروه۰–اول از M باشد، آنگاه P یک N–زیرگروه اول قوی است اگر و فقط اگر برای هر $y\in K$، $y^{-1}P\subseteq P$ یا $y\in(P:M)$.

اثبات. فرض کنید $y\in K$، $y\notin(P:M)$ و $x\in P$ باشد. چون $x=yy^{-1}x\in P$ و P یک N–زیرگروه اول قوی است و از طرفی $y\notin(P:M)$ پس $y^{-1}x\in P$. بنابراین $y^{-1}x\in y^{-1}P\subseteq P$.

برعکس. فرض کنید $y\in K$ و $x\in M_S$ بطوریکه $yx\in P$ است. اگر $y^{-1}P\subseteq P$ باشد، آنگاه $x=y^{-1}yx=y^{-1}(yx)\in y^{-1}P\subseteq P$، در غیر این صورت $y\in(P:M)$. بنابراین P یک N–زیرگروه اول قوی است.

قضیه ۳. ۱۰. فرض کنید P و L، N–زیرگروه‌هایی از M باشند بطوریکه $P\subseteq L$. اگر برای هر $y\in K$، $y^{-1}P\subseteq P$. آنگاه L، N–زیرگروه اول قوی از M است اگر و فقط اگر $\frac{L}{P}$، N–زیرگروه اول قوی از $\frac{M}{P}$ باشد.

اثبات. فرض کنید L، N–زیرگروه اول قوی از M و $y\in K$ باشد. بنا به قضیه ۳. ۱۰. $y^{-1}L\subseteq L$ یا $y\in(P:M)$، بنابراین $y^{-1}\frac{L}{P}\subseteq\frac{L}{P}$ یا $y\in(\frac{L}{P}:\frac{M}{P})$.

برعکس. فرض کنید $\frac{L}{P}$، N–زیرگروه اول قوی از $\frac{M}{P}$ باشد. پس $y^{-1}\frac{L}{P}\subseteq\frac{L}{P}$ یا $y\in(\frac{L}{P}:\frac{M}{P})$ است. آنگاه $y^{-1}L\subseteq L$ یا $y\in(L:M)$ و بنا به قضیه۳. ۹. L، N–زیرگروه اول قوی از M است.

قضیه ۳. ۱۱. فرض کنید هر N–زیرگروه یک ایده‌ال از M و P یک N–زیرگروه اول قوی از M باشد. آنگاه $(P:M)$ یک ایده ال اول قوی از N است.

اثبات. بنا به فرض P یک N–زیرگروه اول قوی از M است. حال نشان می‌دهیم که $(P:M)\in spec(N)$.

(۱) $(P:M)$ مجموعه ناتهی است. چون $0\in(P:M)$.

(۲) فرض کنید $a,b\in(P:M)$ آنگاه واضح است که $a-b\in(P:M)$.

(۳) نشان می‌دهیم که $(P:M)$، یک زیرگروه نرمال از N است. $n\in N$ و $a\in(P:M)$ در نظر می‌گیریم و نشان می‌دهیم $n+a-n\in(P:M)$. چون P یک N–زیرگروه و هر N–زیرگروه یک ایده‌ال است. پس $(n+a-n)M=(nM+aM-nM)\subseteq P$ بنابراین $(P:M)$ یک زیرگروه نرمال از N است.

(۴) نشان می‌دهیم که $(P:M)$ ایده ال راست است، یعنی $(P:M)N\subseteq(P:M)$. فرض کنید $a_i\in(P:M)$ و $n_i\in N$ باشد. آنگاه $\sum_{i=1}^{n}(a_in_i)M\subseteq\sum_{i=1}^{n}a_i(n_iM)\subseteq\sum_{i=1}^{n}a_iM\subseteq P$ در نتیجه $(P:M)N\subseteq(P:M)$.

(۵) حال نشان می‌دهیم که $(P:M)$ ایده ال چپ است. یعنی برای هر $n,n'\in N$ و $a\in(P:M)$ داریم، $n'(n+a)-n'n\in(P:M)$.
فرض کنید،

$$(n'(n+a)-n'n)M = n'(nM+aM)-n'nM\subseteq P$$

بنابراین $(P:M)$ ایده‌ال چپ است. نشان می‌دهیم که $(P:M)$ ایده ال اول از N است. فرض کنید $x,y\in N$ و $x.y\in(P:M)$ در نتیجه $(xy)M=x(yM)\subseteq P$ باشد. آنگاه $x\in P$ یا $yM\subseteq P$. فرض کنید $yM\subseteq P$، در نتیجه $y\in(P:M)$ در غیر این صورت $x\in P$ پس $xM\subseteq PM\subseteq P$، آنگاه $x\in(P:M)$. بنابراین $(P:M)\in spec(N)$. حال نشان می‌دهیم که $(P:M)$ یک ایده‌ال اول قوی از N است.
فرض می‌کنیم برای $a,b\in K$، $a.b\in(P:M)$. بنابراین $a(bM)=abM\subseteq P$. چون P یک N–زیرگروه اول از M است بنا به قضیه ۳ .۸، $a\in(P:M)$ یا $bM\subseteq P$ از طرفی $P\subset M$ لذا $b\in(P:M)$. در نتیجه $(P:M)$ یک ایده ال اول قوی از N است.

تعریف ۳. ۱۲. N–گروه M را یک N–گروه شبه ارزیاب می‌گوئیم، اگر هر N–زیر گروه اول از M، N–زیرگروه اول قوی از M باشد.

تعریف ۳. ۱۳. فرض کنید M، N–گروه و P ایده ال از N باشد و $T_P(M)$ را به صورت $T_P(M)=\{m\in M|(1-p)m=0,\exists p\in P\}$ تعریف می‌کنیم. اگر $M=T_P(M)$، آنگاه M را N–گروه، P–تابدار گوئیم. اگر $M\neq T_P(M)$ آنگاه M را N–گروه، P– دوری می‌نامیم، به طوریکه $m\in M$، $p\in P$ وجود داشته باشد، که $(1-p)M\subseteq Nm$.

قضیه ۳. ۱۴. فرض کنید P یک ایده‌ال اول از N، $M={}_NN$ یک N–گروه ضربی با وفا و هر N–زیرگروه از M یک ایده ال از آن باشند. آنگاه P یک ایده ال اول قوی از N است اگر و فقط اگر PM یک N–زیرگروه اول قوی از M باشد.

اثبات. فرض کنید P یک ایده‌ال اول از N باشد، حال نشان می‌دهیم PM یک N–زیرگروه اول از M است. فرض کنید برای هر $n\in N$ و $m\in M$، $nm\in PM$ باشد. آنگاه $nm\in nM\subseteq PM$ در نتیجه $n\in(PM:M)$. بنابراین PM یک N–زیرگروه اول از M است. فرض کنید برای هر $x=\frac{a}{t}\in M_S$, $y=\frac{r}{s}\in K$، $yx\in PM$ باشد. اگر $y\notin P$، آنگاه $A=\{b\in N|bx\in PM\}$ قرار می‌دهیم. واضح است که A یک ایده ال از N است. اگر $A=N$ باشد. آنگاه $x\in PM$ است. حال اگر $A\neq N$ آنگاه ایده ال ماکسیمال Q از N وجود دارد بطوریکه $A\subseteq Q$. می‌دانیم که $1\in M$ بنابراین طبق تعریف $T_Q(M)$ اگر $1\in T_Q(M)$ باشد بنابراین $1\in Q$ پس تناقض است در نتیجه $1\notin T_Q(M)$، لذا $M\neq T_Q(M)$ در نتیجه M، Q– دوری است. پس $m\in M$ و $q\in Q$ وجود دارد به طوریکه $(1-q)M\subseteq Nm$. از طرفی $(1-q)PM\subseteq Pm$.
حال $u\in N$ و $v\in P$ وجود دارد به طوریکه $(1-q)a=um$ و $(1-q)ra=stvm$.
بنابراین $rum=stvm\in Pm$ در نتیجه $(ru)m\in Pm\subseteq PM$. چون PM یک N–زیرگروه اول است پس $m\in PM$ و $ru\in(PM;M)$ ایجاب می‌کند $ruM\subseteq PM$. بنابراین $p_1\in P$ وجود دارد بطوریکه $ruM=p_1M$ در نتیجه $ruM-p_1M=0$ لذا $(ru-p_1)M=0$ و چون M با وفا است پس $ru-p_1=0$ در نتیجه $ru=p_1\in P$ یعنی $ru\in P$.
حال اگر $(st)^{-1}ru=(s^{-1}r)(t^{-1}u)\in P$ در نتیجه $s^{-1}r\in P$ یا $(t^{-1}u)\in P$. اگر $s^{-1}r\in P$ آنگاه بنابراین $s^{-1}r=\frac{r}{s}\in P$ $y=y.1=\frac{r}{s}.1\in PM$، اگر $s^{-1}r\notin P$ آنگاه $(t^{-1}u)\in P$. از طرفی $(1-q)a=um$، لذا

$$(1-q)x=(1-q)\frac{a}{t}=\frac{u}{t}m=t^{-1}um\in PM$$

پس $1-q\in A\subseteq Q$ ایجاب می کند $1\in Q$.
در نتیجه با ماکسیمال بودن Q در تناقض است. بنابراین PM یک N-زیرگروه اول قوی از M است.
برعکس. فرض کنید PM یک N-زیرگروه اول قوی از M است. بنا به قضیه ۳. ۱۲. $(PM:M)$ یک ایده ال اول قوی از N است. اکنون نشان می‌دهیم که $P=(PM:M)$ است. واضح است که $P\subseteq(PM:M)$. نشان می‌دهیم که $(PM:M)\subseteq P$. فرض کنید $x\in(PM:M)$ درنتیجه $xM\subseteq PM$ پس بنابراین $p_1\in P$ وجود دارد بطوریکه $xM=p_1M\Rightarrow(x-p_1)M=0$ و چون M با وفا است پس $x-p_1=0$ بنابراین $x=p_1\in P$ در نتیجه P یک ایده ال اول قوی از N است.

قضیه ۳. ۱۵. فرض کنید $M={}_NN$ یک N-گروه ضربی با وفا و هر N-زیرگروه یک ایده ال از M باشند. آنگاه M یک N-گروه شبه ارزیاب است اگر و فقط اگر N حلقه‌ی نزدیک شبه ارزیاب باشد.
اثبات. فرض کنید M یک N-گروه شبه ارزیاب و P یک ایده‌ال اول از N باشد. چون M یک N-گروه ضربی با وفا و PM یک ایده ال اول از M است، بنا به قضیه ۳. ۱۴. PM یک N-زیرگروه اول قوی از M است. P یک ایده‌ال اول قوی از N است، در نتیجه N حلقه‌ی نزدیک شبه ارزیاب است.
برعکس. فرض کنید L یک N-زیرگروه از M باشد. چون M یک N-گروه ضربی با وفا است، پس برای بعضی از ایده‌ال‌های اول N مانند P داریم $L=PM$.
از طرفی N حلقه‌ی نزدیک شبه ارزیاب و P یک ایده ال اول قوی از N است، بنا به قضیه ۳. ۱۴. L،N -زیرگروه اول قوی از M است. پس نتیجه می‌گیریم که M یک N-گروه شبه ارزیاب است.

۴- نتیجه‌گیری

در این مقاله مفاهیم ایده‌ال اول قوی، N- زیرگروه اول قوی، حلقه‌ی نزدیک شبه-ارزیاب و N-زیرگروه شبه-ارزیاب در حلقه‌های نزدیک مورد مطالعه قرار گرفته و همچنین برخی از خواص آنها بررسی شده است.
در اینجا سعی شده با استفاده از قضایایی رابطه بین N-زیرگروه اول قوی و N-زیرگروه اول قوی خارج قسمتی از آن N-زیرگروه و همچنین رابطه بین حلقه‌ی نزدیک شبه-ارزیاب و N-زیرگروه شبه-ارزیاب را بدست بیاورند.
در انتها پیشنهادهای زیر را می‌توان مطرح کرد:
در این مقاله برخی مفاهیم مانند حلقه نزدیک ارزیاب وN-زیرگروه ارزیاب در حلقه‌های نزدیک مطرح نشده‌اند. می‌توان این مفاهیم را به عنوان ایده‌هایی برای تحقیق بیشتر در زمینه حلقه‌های نزدیک پیشنهاد کرد.

فهرست منابع

[1] Hedstrom. J. R and Houston E. G, (1978). Pseudo-valuation domains, Pacific Journal of Mathematics.

[2] Anderson .D. F, Badawi .A, and Dobbs .D. E, (2000). Pseudo-valuation domain, Bollettino dell'Unione Matematica Italiana

[3] Moghaderi. J and Nekooei. R, (2011). Stronghly Prime, Submodules and Pseudo- valuation Modules, International Electronic Journal of Algebra

[4] Pilz. G, (1983). Near-Rings. North Holland, Amsterdam.

[5] sadeghi Gougheri. M and Roudbarylor. T, The Constraction of Fraction N-subgroups in Near Ring, submitted.

[6] Khodadadpour. E and Roudbarylor. T, Some types of Multiplication N-group in Near-Rings, submitted.

[7] Birkenmeier. G, Heatherly. H, and Lee.E, (1993). Prime Ideals in Near-Rings, Results in Mathematics.

[8] Dheena. P and Satheesh kumar. G, (2008). completlely 2-primal Ideals in Near-rings, Tamsui oxford journal of mathematical sciences.