



تقریب ضرایب برای رده‌ای از توابع دو-تک ارز مرمورفیک

صفا صالحیان^{۱*}، احمد معتمدنژاد^۲

(^۱) استادیار، گروه ریاضی، واحد گرگان، دانشگاه آزاد اسلامی، گرگان، ایران

(^۲) دانشیار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۷/۰۷/۲۱ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۹/۰۲/۱۶

چکیده

رده Σ را خانواده توابع مرمورفیک f^1 به فرم $f(z) = z + b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{z^n}$ در نظر می‌گیریم که بر دامنه $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < \infty\}$ تک ارز^۲ (تحلیلی و یک به یک) باشند. تابع تک ارز f را دو-تک ارز مرمورفیک گوییم هرگاه وارون آن نیز تک ارز باشد، یعنی $f^{-1} \in \Sigma$. رده همه توابع دو-تک ارز مرمورفیک را با نماد $\Sigma_{\mathbb{B}}$ نشان می‌دهیم. اخیراً زیر رده‌های مختلفی از توابع دو-تک ارز مرمورفیک توسط محققین معرفی شده است. در این مقاله، ابتدا مشتق q -ام^۳ را تعریف و سپس به کمک مشتق q -ام زیر رده جدید $D_{\Sigma_{\mathbb{B}}}(\alpha, \lambda, \delta, q)$ از توابع دو-تک ارز مرمورفیک^۴ را بر روی دامنه $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < \infty\}$ معرفی و بررسی می‌کنیم. این رده تعمیم رده‌های متعددی می‌باشد که توسط پژوهشگران مختلف معرفی شده است. در ادامه با استفاده از بسط چند جمله‌ای فابری^۵، ضرایب اولیه b_0, b_1, b_2 و عمومی b_n مربوط به توابع متعلق به رده $D_{\Sigma_{\mathbb{B}}}(\alpha, \lambda, \delta, q)$ را بدست می‌آوریم. در انتها، کران بالایی برای ضرایب اولیه $|b_0|, |b_1|, |b_2|$ و عمومی $|b_n|$ را نیز محاسبه می‌کنیم. نتایج بدست آمده در این مقاله، کارهای مربوط به چندین نویسنده پیشین را تعمیم و بهبود می‌بخشد.

واژه‌های کلیدی: تقریب ضرایب، چند جمله‌ای فابر، توابع مرمورفیک، توابع دو-تک ارز مرمورفیک، مشتق q -ام.

s.salehian84@gmail.com

*. عهده دار مکاتبات:

1. Meromorphic function
2. Univalent (Analytic and one to one)
3. q -derivative
4. Meromorphic bi-univalent function
5. Faber polynomial

۱- مقدمه

فرض کنید Σ رده توابع مرمورفیک به شکل زیر باشد

$$f(z) = z + b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{z^n} \quad (۱)$$

به طوری که تابع $f(z)$ بر دامنه

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < \infty\}$$

تک ارز (تحلیلی و یک به یک) است. از آنجاییکه تابع $f \in \Sigma$ تک ارز است لذا دارای وارونی به شکل زیر می‌باشد:

$$f^{-1}(f(z)) = z \quad (z \in \Delta)$$

و

$$f(f^{-1}(w)) = w \quad (M < |w| < \infty, M > 0).$$

با استفاده از چند جمله ای فابر ضرایب تابع وارون $g(w) = f^{-1}(w)$ بصورت زیر بدست می‌آید.

(برای جزئیات بیشتر منابع [۱و۲] را مشاهده نمایید).

$$g(w) = f^{-1}(w) = w + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{w^n} = w - b_0 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} K_{n+1} \frac{1}{w^n} \quad (M < |w| < \infty) \quad (۲)$$

بطوریکه

$$K_{n+1}^n = n b_0^{n-1} b_1 + n(n-1) b_0^{n-2} b_2 + \frac{1}{2} n(n-1)(n-2) b_0^{n-3} (b_3 + b_1^2) + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{3!} b_0^{n-4} (b_4 + 3b_1 b_2) + \sum_{j \geq 5}^{\infty} b_0^{n-j} V_j$$

به طوری که $V_j (5 \leq j \leq n)$ چند جمله‌ای همگن از درجه j برحسب متغیرهای b_1, b_2, \dots, b_n می‌باشند. تابع $f \in \Sigma$ را دو-تک ارز مرمورفیک گویند هرگاه وارون آن نیز تک ارز باشد، یعنی $f^{-1} \in \Sigma$. رده همه توابع دو-تک ارز مرمورفیک را با نماد $\Sigma_{\mathcal{B}}$ نمایش می‌دهند.

در زمینه یافتن کران برای ضرایب توابع تک ارز مرمورفیک مطالعات زیادی انجام گرفته است. برای مثال، اسچيفر [۱۱] نشان داد اگر f تابع تک ارز مرمورفیک و $b_0 = 0$ آنگاه $|b_2| \leq \frac{2}{3}$. سپس در سال ۱۹۷۱، دورن

[۴] ثابت کرد اگر f یک تابع تک ارز مرمورفیک با شرط

$$|b_n| \leq \frac{2}{n+1} \quad 1 \leq k \leq \frac{n}{2} \quad b_k = 0$$

اخیراً، بسیاری از پژوهشگران مانند بولت و همکارانش [۳]، حمیدی و همکارانش [۵] رده‌هایی از توابع دو-تک ارز مرمورفیک را معرفی کردند. (برای مطالعه بیشتر به منابع [۶]، [۷]، [۸]، [۹]، [۱۰]، [۱۳] و [۱۴] مراجعه نمایید). هدف ما در این مقاله معرفی رده جدیدی از توابع دو-تک ارز مرمورفیک است که تعمیمی از رده‌های پیشین است. نتایجی که بدست می‌آوریم تعمیم و بهبودی از نتایج مراجع [۳] و [۵] است.

نتیجه ۱۵، که در انتهای مقاله آن‌را بدست می‌آوریم، بهبودی از قضیه ۲ بدست آمده در مرجع [۵] است. چون بدون شرط (*) آن‌را بدست آورده‌ایم.

تعریف ۱ [۵]: تابع دو-تک ارز مرمورفیک $f \in \Sigma_{\mathcal{B}}$ به فرم (۱) را متعلق به زیررده $\Sigma_{\mathcal{B}}(\alpha, \lambda)$ گویند هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

$$Re \left((1 - \lambda) \frac{f(z)}{z} + \lambda f'(z) \right) > \alpha \quad (\lambda \geq 1, 0 \leq \alpha < 1, z \in \Delta)$$

و

$$Re \left((1 - \lambda) \frac{g(w)}{w} + \lambda g'(w) \right) > \alpha \quad (\lambda \geq 1, 0 \leq \alpha < 1, w \in \Delta),$$

بطوریکه تابع g وارون تابع f است که در رابطه (۲) آمده است.

قضیه ۲ [۵]: فرض کنید تابع دو-تک ارز مرمورفیک $f \in \Sigma_{\mathcal{B}}$ متعلق به زیررده $\Sigma_{\mathcal{B}}(\alpha, \lambda)$ باشد. اگر شرط (*) $b_0 = b_1 = \dots = b_{n-1} = 0$ برقرار باشد. آنگاه:

$$|b_n| \leq \frac{2(1-\alpha)}{(n+1)\lambda-1} \quad (n \geq 1).$$

برای اثبات قضایای اصلی به لم زیر نیاز داریم.

لم ۳ [۴]: فرض کنید تابع

$$\lim_{q \rightarrow 1^-} D_q^2 f(z) = f''(z), \text{ بعلاوه،}$$

حال با استفاده از مشتق q -ام رده زیر را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۶: تابع دو-تک ارز مرمورفیک $f \in \Sigma_{\mathcal{B}}$ به فرم (۱) را متعلق به رده $D_{\Sigma_{\mathcal{B}}}(\alpha, \lambda, \delta, q)$ گوئیم هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re}\left((1 - \lambda + 2\delta) \frac{f(z)}{z} \right. \\ & \left. + (\lambda - 2\delta) D_q f(z) + \delta z D_q^2 f(z)\right) > \alpha \\ & (\lambda \geq 1, 0 \leq \alpha < 1, \delta \geq 0, 0 < q < 1) \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re}\left((1 - \lambda + 2\delta) \frac{g(w)}{w} \right. \\ & \left. + (\lambda - 2\delta) D_q g(w) + \delta z D_q^2 g(w)\right) > \alpha \\ & (\lambda \geq 1, 0 \leq \alpha < 1, \delta \geq 0, 0 < q < 1) \end{aligned}$$

بطوریکه تابع g وارون تابع f می‌باشد که در رابطه (۲) آمده است.

تبصره ۷: رده توابع $D_{\Sigma_{\mathcal{B}}}(\alpha, \lambda, \delta, q)$ تعمیم رده‌های متعددی می‌باشد که توسط محققین مختلف معرفی شده است. به عنوان نمونه:

مثال ۱: هرگاه $q \rightarrow 1^-$ آنگاه رده $D_{\Sigma_{\mathcal{B}}}(\alpha, \lambda, \delta, q)$ به رده $R_{\Sigma'}(\alpha, \lambda, \delta)$ تبدیل می‌شود که این رده توسط بولت و همکارانش [۳] معرفی و مورد مطالعه قرار گرفته است.

مثال ۲: هم چنین هرگاه $q \rightarrow 1^-$ و $\delta = 0$ آنگاه رده $D_{\Sigma_{\mathcal{B}}}(\alpha, \lambda, \delta, q)$ به رده توابع $\Sigma_{\mathcal{B}}(\alpha, \lambda)$ تبدیل می‌شود که این رده توسط حمیدی و همکارانش [۵] معرفی و مورد مطالعه قرار گرفته است. قضیه زیر را برای رده $D_{\Sigma_{\mathcal{B}}}(\alpha, \lambda, \delta, q)$ بیان و اثبات می‌کنیم.

قضیه ۸: فرض کنید تابع دو-تک ارز مرمورفیک $f \in \Sigma_{\mathcal{B}}$ متعلق به رده $D_{\Sigma_{\mathcal{B}}}(\alpha, \lambda, \delta, q)$ باشد. اگر شرط

$$b_0 = b_1 = \dots = b_{n-1} = 0$$

$$p(z) = 1 + \frac{p_1}{z} + \frac{p_2}{z^2} + \dots$$

بر روی دامنه $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < \infty\}$ تحلیلی و $\operatorname{Re}(p(z)) > 0$ باشد. آنگاه برای هر عدد طبیعی i داریم: $|p_i| \leq 2; (i \in \mathbb{N})$.

۲- کران بالایی برای ضرایب توابع متعلق به رده $D_{\Sigma_{\mathcal{B}}}(\alpha, \lambda, \delta, q)$

در این بخش رده $D_{\Sigma_{\mathcal{B}}}(\alpha, \lambda, \delta, q)$ را با استفاده از مشتق q -ام معرفی و بررسی می‌کنیم.

همچنین، با استفاده از بسط چند جمله‌ای فابر کران بالایی برای ضرایب عمومی $|b_n|$ از توابع متعلق به این رده را بدست می‌آوریم.

مشتق q -ام که تعمیمی از مشتق معمولی است توسط سریواستاوا [۱۲] به صورت زیر تعریف شده است.

تعریف ۴ [۱۲]: عدد حقیقی $0 < q < 1$ را در نظر بگیرید. مشتق q -ام تابع $f \in \Sigma_{\mathcal{B}}$ بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$D_q f(z) = \frac{f(qz) - f(z)}{(q-1)z}.$$

با استفاده از تعریف فوق در حالتی که تابع f به فرم (۱) باشد، مشتق q -ام تابع f بر اساس بسط ضرایب به صورت زیر بدست می‌آید:

$$D_q f(z) = 1 + \sum_{n \geq 1}^{\infty} \frac{[n]_q b_n}{z^{n+1}},$$

بطوریکه

$$[n]_q = \frac{1 - q^n}{q^n(q-1)}.$$

تبصره ۵: هرگاه $q \rightarrow 1^-$ ، آنگاه $[n]_q \rightarrow -n$. بنابراین $\lim_{q \rightarrow 1^-} D_q f(z) = f'(z)$. همچنین برای توابع $f, g \in \Sigma_{\mathcal{B}}$ روابط زیر برقرار است:

$$D_q(f(z) + g(z)) = D_q f(z) + D_q g(z)$$

و

$$\begin{aligned} D_q^2 f(z) &= D_q(D_q f(z)) = \\ &= \sum_{n \geq 1}^{\infty} \frac{[n]_q [n+1]_q b_n}{z^{n+2}}. \end{aligned}$$

$$(1 - \lambda + 2\delta + (\lambda - 2\delta)[n]_q + \delta[n]_q[n + 1]_q)B_n = (1 - \alpha) \times K_{n+1}^1(d_1, d_2, \dots, d_{n+1}) \quad (\lambda)$$

با توجه به فرض

$$b_0 = b_1 = \dots = b_{n-1} = 0$$

نتیجه می‌گیریم که $B_n = -b_n$

لذا معادلات (۷) و (۸) به معادلات زیر تبدیل خواهند شد:

$$(1 - \lambda + 2\delta + (\lambda - 2\delta)[n]_q + \delta[n]_q[n + 1]_q)b_n = (1 - \alpha)c_{n+1}$$

و

$$-(1 - \lambda + 2\delta + (\lambda - 2\delta)[n]_q + \delta[n]_q[n + 1]_q)b_n = (1 - \alpha)d_{n+1}$$

حال با گرفتن قدر مطلق از طرفین هر یک از معادلات بالا

و بکار بردن لم ۳ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} |b_n| &= \frac{(1-\alpha)|c_{n+1}|}{|1-\lambda+2\delta+(\lambda-2\delta)[n]_q+\delta[n]_q[n+1]_q|} \\ &= \frac{(1-\alpha)|d_{n+1}|}{|1-\lambda+2\delta+(\lambda-2\delta)[n]_q+\delta[n]_q[n+1]_q|} \\ &\leq \frac{2(1-\alpha)}{|1-\lambda+2\delta+(\lambda-2\delta)[n]_q+\delta[n]_q[n+1]_q|} \end{aligned}$$

در قضیه بعد شرط اعمال شده در قضیه ۸ را حذف کرده و کران بالایی برای ضرایب اولیه توابع متعلق به رده $D_{\Sigma_B}(\alpha, \lambda, \delta, q)$ را بدست می‌آوریم.

قضیه ۹: فرض کنید تابع دو-تک ارز مرمورفیک $f \in \Sigma_B$ به فرم (۱) متعلق به رده $D_{\Sigma_B}(\alpha, \lambda, \delta, q)$ باشد. آنگاه:

$$\begin{aligned} |b_0| &\leq \frac{2(1-\alpha)}{|1-\lambda+2\delta|} \\ |b_1| &\leq \frac{2(1-\alpha)}{|1-\lambda+2\delta+(\lambda-2\delta)[1]_q+\delta[1]_q[2]_q|} \\ |b_2| &\leq \frac{2(1-\alpha)}{|1-\lambda+2\delta+(\lambda-2\delta)[2]_q+\delta[2]_q[3]_q|} \end{aligned}$$

و

$$|b_0b_1 + b_2| \leq \frac{2(1-\alpha)}{|1-\lambda+2\delta+(\lambda-2\delta)[2]_q+\delta[2]_q[3]_q|}$$

برقرار باشد. آنگاه:

$$|b_n| \leq \frac{2(1-\alpha)}{|1-\lambda+2\delta+(\lambda-2\delta)[n]_q+\delta[n]_q[n+1]_q|}$$

برهان. برای تابع دو-تک ارز مرمورفیک $f(z)$ به فرم (۱)، داریم:

$$\begin{aligned} (1 - \lambda + 2\delta) \frac{f(z)}{z} + (\lambda - 2\delta) D_q f(z) + \delta z D^2_q f(z) &= 1 + (1 - \lambda + 2\delta) \frac{b_0}{z} + \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-\lambda+2\delta+(\lambda-2\delta)[n]_q+\delta[n]_q[n+1]_q)b_n}{z^{n+1}} &\quad (۳) \end{aligned}$$

و بطور مشابه برای تابع $g(w) \in \Sigma_B$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} (1 - \lambda + 2\delta) \frac{g(w)}{w} + (\lambda - 2\delta) D_q g(w) + \delta z D^2_q g(w) &= 1 + (1 - \lambda + 2\delta) \frac{B_0}{w} + \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-\lambda+2\delta+(\lambda-2\delta)[n]_q+\delta[n]_q[n+1]_q)B_n}{w^{n+1}} &\quad (۴) \end{aligned}$$

چون تابع $f \in D_{\Sigma_B}(\alpha, \lambda, \delta, q)$ ، لذا طبق تعریف، دو تابع تحلیلی $h(w) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{z^n}$ و $p(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{w^n}$ با قسمت حقیقی مثبت روی دامنه Δ وجود دارند بطوریکه:

$$\begin{aligned} (1 - \lambda + 2\delta) \frac{f(z)}{z} + (\lambda - 2\delta) D_q f(z) + \delta z D^2_q f(z) &= 1 + (1 - \alpha) \times \\ \sum_{n=0}^{\infty} K_{n+1}^1(c_1, c_2, \dots, c_{n+1}) \frac{1}{z^{n+1}} &\quad (۵) \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} (1 - \lambda + 2\delta) \frac{g(w)}{w} + (\lambda - 2\delta) D_q g(w) + \delta z D^2_q g(w) &= 1 + (1 - \alpha) \times \\ \sum_{n=0}^{\infty} K_{n+1}^1(d_1, d_2, \dots, d_{n+1}) \frac{1}{w^{n+1}} &\quad (۶) \end{aligned}$$

با مقایسه ضرایب متناظر معادلات (۳) و (۵) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} (1 - \lambda + 2\delta + (\lambda - 2\delta)[n]_q + \delta[n]_q[n + 1]_q)b_n &= (1 - \alpha) \times K_{n+1}^1(c_1, c_2, \dots, c_{n+1}) \quad (۷) \end{aligned}$$

و بطور مشابه با مقایسه ضرایب متناظر معادلات (۴) و (۶) خواهیم داشت:

برهان: با مقایسه ضرایب معادله (۷)، برای $n = 0, 1, 2$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}(1 - \lambda + 2\delta)b_0 &= (1 - \alpha)c_1, \\ (1 - \lambda + 2\delta + (\lambda - 2\delta)[1]_q \\ + \delta[1]_q[2]_q)b_1 &= (1 - \alpha)c_2, \\ (1 - \lambda + 2\delta + (\lambda - 2\delta)[2]_q \\ + \delta[2]_q[3]_q)b_2 &= (1 - \alpha)c_3.\end{aligned}$$

و بطور مشابه با مقایسه ضرایب معادله (۸)، در حالت $n = 2$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}-(1 - \lambda + 2\delta + (\lambda - 2\delta)[2]_q \\ + \delta[2]_q[3]_q)(b_0b_1 + b_2) \\ = (1 - \alpha)d_3.\end{aligned}$$

با حل معادلات فوق برای b_0, b_1, b_2 و سپس با استفاده از لم ۳، روابط زیر بدست می‌آید

$$\begin{aligned}|b_0| &= \frac{(1-\alpha)|c_1|}{|1-\lambda+2\delta|} \leq \frac{2(1-\alpha)}{|1-\lambda+2\delta|}, \\ |b_1| &= \frac{(1-\alpha)|c_2|}{|1-\lambda+2\delta+(\lambda-2\delta)[1]_q+\delta[1]_q[2]_q|} \\ &\leq \frac{2(1-\alpha)}{|1-\lambda+2\delta+(\lambda-2\delta)[1]_q+\delta[1]_q[2]_q|}, \\ |b_2| &= \frac{(1-\alpha)|c_3|}{|1-\lambda+2\delta+(\lambda-2\delta)[2]_q+\delta[2]_q[3]_q|} \\ &\leq \frac{2(1-\alpha)}{|1-\lambda+2\delta+(\lambda-2\delta)[2]_q+\delta[2]_q[3]_q|}, \\ |b_0b_1 + b_2| &= \frac{(1-\alpha)|d_3|}{|1-\lambda+2\delta+(\lambda-2\delta)[2]_q+\delta[2]_q[3]_q|} \\ &\leq \frac{2(1-\alpha)}{|1-\lambda+2\delta+(\lambda-2\delta)[2]_q+\delta[2]_q[3]_q|}.\end{aligned}$$

نتیجه‌گیری

با میل دادن $q \rightarrow 1^-$ در قضیه ۸، نتیجه زیر بدست می‌آید.

نتیجه ۱۰: فرض کنید تابع دو-تک ارز مرمورفیک $f \in \Sigma_{\mathcal{B}}$ به فرم (۱) متعلق به رده $R_{\Sigma'}(\alpha, \lambda, \delta)$ باشد. اگر شرط

$$b_0 = b_1 = \dots = b_{n-1} = 0$$

برقرار باشد، آنگاه:

$$|b_n| \leq \frac{2(1-\alpha)}{|1+(n+1)(\delta-\lambda)+(n+1)^2\delta|}.$$

تبصره ۱۱: کران بالا $|b_n|$ در نتیجه ۱۰، تعمیمی از نتیجه بدست آمده توسط بولت و همکارانش [۳] است.

با میل دادن $q \rightarrow 1^-$ در قضیه ۹، نتیجه زیر بدست می‌آید.

نتیجه ۱۲: فرض کنید تابع دو-تک ارز مرمورفیک $f \in \Sigma_{\mathcal{B}}$ به فرم (۱) متعلق به رده $R_{\Sigma'}(\alpha, \lambda, \delta)$ باشد. آنگاه:

$$\begin{aligned}|b_0| &\leq \begin{cases} \frac{2(1-\alpha)}{1-\lambda+2\delta}; & \lambda < 1+2\delta \\ \frac{2(1-\alpha)}{-1+\lambda-2\delta}; & \lambda > 1+2\delta, \end{cases} \\ |b_1| &\leq \begin{cases} \frac{2(1-\alpha)}{1-2\lambda+6\delta}; & \lambda < \frac{1}{2}+3\delta \\ \frac{2(1-\alpha)}{-1+2\lambda-6\delta}; & \lambda > \frac{1}{2}+3\delta, \end{cases} \\ |b_2| &\leq \begin{cases} \frac{2(1-\alpha)}{1-3\lambda+12\delta}; & \lambda < \frac{1}{3}+4\delta \\ \frac{2(1-\alpha)}{-1+3\lambda-12\delta}; & \lambda > \frac{1}{3}+4\delta, \end{cases}\end{aligned}$$

۹

$$\begin{aligned}|b_0b_1 + b_2| \\ \leq \begin{cases} \frac{2(1-\alpha)}{1-3\lambda+12\delta}; & \lambda < \frac{1}{3}+4\delta \\ \frac{2(1-\alpha)}{-1+3\lambda-12\delta}; & \lambda > \frac{1}{3}+4\delta.\end{cases}\end{aligned}$$

تبصره ۱۳: کران‌های بالا $|b_0|$ و $|b_1|$ در نتیجه ۱۲، تعمیمی از تقریب بدست آمده توسط بولت و همکارانش [۳] می‌باشد. علاوه بر آن کران‌های $|b_2|$ و $|b_0b_1 + b_2|$ که در [۳] محاسبه نشده بود را نیز بدست آوردیم.

با قراردادن $\delta = 0$ در نتیجه ۱۰، نتیجه زیر بدست می‌آید.

نتیجه ۱۴: فرض کنید تابع دو-تک ارز مرمورفیک $f \in \Sigma_{\mathcal{B}}$ به فرم (۱) متعلق به رده $\Sigma_{\mathcal{B}}(\alpha, \lambda)$ باشد. اگر شرط

$$b_0 = b_1 = \dots = b_{n-1} = 0$$

برقرار باشد، آنگاه:

$$|b_n| \leq \frac{2(1-\alpha)}{(n+1)\lambda-1}.$$

با قراردادن $\delta = 0$ در نتیجه ۱۲، نتیجه زیر بدست می‌آید.

نتیجه زیر بهبودی از قضیه ۲ بدست آمده در مرجع [۵] است. چون بدون شرط (*) آنرا بدست آورده‌ایم.

نتیجه ۱۵: فرض کنید تابع دو- تک ارز مرمورفیک $f \in \Sigma_B$ به فرم (۱) متعلق به رده $\Sigma_B(\alpha, \lambda)$ باشد. آنگاه:

$$\begin{aligned} |b_0| &\leq \frac{2(1-\alpha)}{\lambda-1}, \\ |b_1| &\leq \frac{2(1-\alpha)}{2\lambda-1}, \\ |b_2| &\leq \frac{2(1-\alpha)}{3\lambda-1} \end{aligned}$$

۹

$$|b_0 b_1 + b_2| \leq \frac{2(1-\alpha)}{3\lambda-1}.$$

- [10] G. Schober. Coefficients of inverses of meromorphic univalent functions. Proc. Amer. Math. Soc. 67(1): 111-116 (1977).
- [11] M. Schiffer, Sur Un problème d'extrémum de la représentation conforme. Bull. Soc. Math. France., 66: 48-55 (1938).
- [12] H. M. Srivastava, Ş. Altınkaya, S. Yalçın . Hankel determinant for a subclass of bi-nivalent functions defined by using a symmetric q -derivative operator, Filomat, 32(2): 503–516. (2018).
- [13] Q.-H. Xu, H. M. Srivastava . Coefficient estimates for the inverses of a certain general class of spirallike functions, Appl. Math. Comput., 219: 7000-7011(2013).
- [14] H.-G. Xiao, Q.-. Xu, Coefficient estimates for three generalized classes of meromorphic and bi-univalent functions, Filomat, 29 (7): 1601-1612 (2015) .
- [1] H. Airault ,A. Bouali . Differential Calculus on the faber polynomials. Bull. Sci. Math. 130 (3): 179-222 (2006).
- [2] H. Airault ,J. Ren. An algebra of differential operators and generating functions on the set of univalent functions. Bull. Sci. Math. 126(5): 343-367(2002).
- [3] S. Bulut, N. Magesh, V. K. Balaji. Faber polynomial coefficient estimates for certain subclasses of meromorphic bi-univalent functions. Comptes Rendus Mathematique. 353(2): 113-116(2015).
- [4] P. L. Duren. Univalent functions, Grundlehren der Mathematischen, Band 259, Springer, Tokyo, 1983.
- [5] S. G. Hamidi, S. A. Halim, J. M. Jahangiri . Coefficient estimates for a class of meromorphic bi-univalent functions. Comptes Rendus Mathematique 351: 349-352 (2013).
- [6] T. Janani, G. MurugusundaraMoorthy. Coefficient estimates of meromorphic bi-starlike functions of complex order. Internat. J. Anal. Appl. 4 (1): 68-77(2014).
- [7] G. P. Kapoor, A. K. Mishr. Coefficient estimates for inverses of starlike functions of positive order. J. Math. nal. Appl., 329(2): 922-934 (2007).
- [8] J. G. Krzyz, R. J. Libera, E. J. Zlotkiewicz .Coefficients of inverse of regular starlike functions. Ann. Univ. Mariae Curie-Skodowska Sect. A 33: 103-109(1979).
- [9] Y. Kubota. Coefficients of meromorphic univalent functions. Kōdai Math. Sem.Rep. 28: 253-261 (1976).

