دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال ششم، شماره بیست و چهارم، خرداد و تیر ۱۳۹۹
شماره شاپا: ۲۵۸۸X-۵۸۸

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
پژوهش‌های نوین در ریاضی

عدد احاطه‌گری وقوعی گراف‌ها

پریسا عزیزی کشاورز[1]، ابوالفضل تهرانیان[2*]

[1و2] گروه ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات، تهران، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۷/۰۸/۰۷ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۸/۰۸/۱۱

چکیده

در این مقاله مفهوم عدد احاطه‌گری وقوعی گراف‌ها معرفی شده و مجموعه احاطه‌گر وقوعی و عدد احاطه‌گری وقوعی برخی از گراف‌های خاص مانند گراف مسیر، گراف دور، گراف چرخ، گراف کامل و گراف ستاره مورد مطالعه قرار گرفته است. ابتدا عدد احاطه‌گری وقوعی تعدادی از گراف‌های خاص مانند گراف مسیر، گراف دور، گراف ستاره، گراف چرخ و همچنین گراف کامل محاسبه شده است. سپس عدد رنگی احاطه‌گری وقوعی برخی از گراف‌های ذکر شده محاسبه شده و نتایجی در این زمینه به دست آمده است. نشان داده شده که مقدار این عدد برای گراف مسیر از مرتبه n برابراست با $\lceil 2(n-1)/5 \rceil + 3$. همچنین برای گراف دور از مرتبه n مقدار آن برابر است با $\lceil 2n/5 \rceil + 3$. ثابت شده که عدد رنگی احاطه‌گری وقوعی برای گراف ستاره S_n برابر $n+1$ بوده و همچنین برای گراف کامل از مرتبه n نشان داده شده که این مقدار برابر n است.

واژه‌های کلیدی: رنگ‌آمیزی وقوعی، عدد رنگی، مجموعه احاطه‌گر.

*. عهده دار مکاتبات: Email: tehranian@srbiau.ac.ir

۱- مقدمه

در این بخش مفهوم عدد احاطه‌گری و عدد احاطه‌گری وقوعی گراف‌ها را بیان می‌کنیم. در سرتاسر این مقاله گراف‌های مورد بررسی، گراف‌های ساده، بدون جهت و بدون طوقه هستند. مفهوم رنگ‌آمیزی وقوعی نخستین بار در سال ۱۹۹۳ توسط برالدی و مسی معرفی شد[1].

تعریف ۱-۱. گراف ساده G یک دوتایی به صورت $G=(V,E)$ بوده که در آن V یک مجموعه ناتهی و متناهی و E مجموعه‌ای از زیرمجموعه‌های دو عضوی V است. هر عضو V یک رأس و هر عضو E یک یال گراف G نامیده می‌شود.

تعریف ۱- ۲. اگر در گراف G، $e=\{u,v\}$ یالی از آن باشد، دو رأس u و v مجاور نامیده می‌شوند.

تعریف ۱- ۳. تعداد اعضای مجموعه V در گراف G مرتبه آن نامیده می‌شود.

تعریف ۱- ۴. هرگاه در گراف G نقاط ابتدا و انتهای یالی یکسان باشند، آن یال طوقه نامیده می‌شود.

تعریف ۱- ۵. درجه رأس v در گراف G تعداد یال‌های واقع بر آن تعریف شده و با نماد $deg_G v$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۱-۶ . گراف جهت دار G زوج $G=(V,A)$ بوده که در آن V یک مجموعه ناتهی و متناهی و A مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب اعضای V است.

تعریف ۱-۷. گراف $H=(V_1,E_1)$ یک زیرگراف گراف $G=(V,E)$ نامیده می‌شود هرگاه $V_1\subseteq V$ و $E_1\subseteq E$.

تعریف ۱-۸. گرافی که تمام رئوس آن مجاور باشند گراف کامل نامیده می‌شود. گراف کامل از مرتبه n با نماد K_n نشان داده می‌شود.

تعریف ۱-۹. گراف G منتظم نامیده می‌شود هرگاه درجه تمام رئوس آن یکسان باشد. اگر در گراف منتظم G درجه رئوس برابر r باشد، آن را r- منتظم می‌نامند.

تعریف ۱-۱۰. هر گراف ۲- منتظم از مرتبه n گراف دور نامیده شده و با نماد C_n نشان داده می‌شود.

تعریف ۱-۱۱. گراف G دو بخشی نامیده می‌شود هرگاه بتوان مجموعه رئوس آن را به دو مجموعه V_1 و V_2 افراز کرد به‌طوری که از دو رأس انتهایی هر یال، یک رأس متعلق به V_1 و دیگری متعلق به V_2 باشد.

تعریف ۱-۱۲. گراف دو بخشی G دو بخشی کامل نامیده می‌شود هرگاه تمام رئوس V_1 با تمام رئوس V_2 مجاور باشند. در این صورت اگر تعداد اعضای V_1 و V_2 به ترتیب برابر n و m باشد، آن را با نماد $K_{n,m}$ نشان می‌دهند.

تعریف ۱-۱۳. گراف $K_{1,n}$ ستاره نامیده شده و با نماد S_n نشان داده می‌شود.

تعریف ۱-۱۴. یک گشت از رأس u به رأس v در گراف G دنباله‌ای از رئوس و یال‌های آن به صورت $ue_1u_1e_2u_2\dots e_{n-1}u_{n-1}e_nv$ است که در آن: $e_n=\{u_{n-1},v\}$ ، $e_k=\{u_{k-1},u_k\}$ و $e_1=\{u,u_1\}$.

تعریف ۱-۱۵. یک پیگرد بین دو رأس مفروض گراف G گشتی است که در آن یال تکراری وجود نداشته باشد.

تعریف ۱-۱۶. یک مسیر بین دو رأس مفروض گراف G پیگردی است که در آن رأس تکراری وجود نداشته باشد.

تعریف ۱-۱۷. هرگاه گراف G از مرتبه n تنها از یک

مسیر تشکیل شده باشد، گراف مسیر نامیده شده و با نماد P_n نشان داده می‌شود.

تعریف ۱-۱۸. یک رنگ‌آمیزی رأسی برای گراف G عبارتست از نگاشتی به صورت $C: V \rightarrow S$. هر عضو S یک رنگ نامیده می‌شود.

تعریف ۱-۱۹. یک رنگ‌آمیزی را برای گراف G سره می‌نامند هرگاه رئوس مجاور آن در این رنگ‌آمیزی هم رنگ نباشند. گراف G را k- رنگ شدنی می‌نامند هرگاه یک k- رنگ‌آمیزی سره داشته باشد.

تعریف ۱-۲۰. هرگاه k کوچک‌ترین عددی باشد که گراف G به ازای آن k- رنگ شدنی است، در این صورت k را عدد رنگی G نامیده و با نماد$\chi(G)$ نشان می‌دهند.

تعریف ۱-۲۱. اگر $G = (V, E)$ یک گراف ساده باشد، مجموعه وقوع‌های آن به صورت زیر تعریف می‌شود:

$I(G) = \{(v, e) | e \in E , e = vw,\ v, w \in V\ \}$

در این مجموعه مجاورت برای دو رأس (v, e) و (w, f) به شرط دارا بودن یکی از شرایط زیر تعریف می‌شود:

$(1) v = w;$

$(2) e = f;$

(3) $vw = e$ یا $vw = f.$

گراف حاصل از مجموعه رئوس $I(G)$ و یال‌های دارای شرایط فوق، گراف وقوع G نامیده می‌شود. یک رنگ آمیزی وقوعی برای G عبارت است از یک رنگ‌آمیزی رأسی سره برای گراف وقوع G. تعداد رنگ‌های یک رنگ آمیزی وقوعی برای گراف G به طوری که کمترین تعداد رنگ در آن به کار رفته باشد عدد رنگی وقوعی G نامیده شده و با نماد $\chi_i(G)$ نشان داده می‌شود. برالدی و مسی عدد رنگی وقوعی درخت‌ها، گراف‌های کامل و گراف‌های دو بخشی کامل را به دست آورند. آنها حدسی را در این رابطه مطرح نمودند که به حدس ICC معروف بوده و برای گراف مفروض G به صورت زیر است:

$$\chi_i(G) \leq \Delta(G) + 2$$

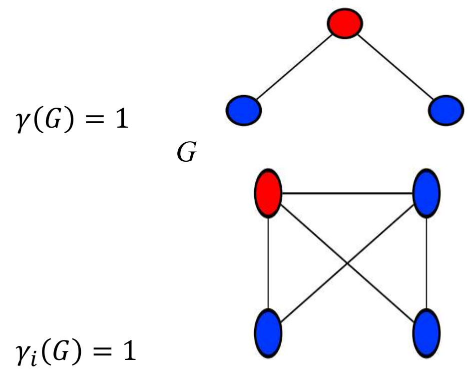
گویدولی در سال ۱۹۹۷ در [5] نشان داد که حدس فوق در حالت کلی برقرار نیست، اگرچه این حدس برای کلاس‌های زیادی از گراف‌ها صدق می‌کند. چن در مقاله‌ای عدد رنگی وقوعی مسیرها، دورها، چرخ‌ها و گراف‌های سه بخشی کامل را تعیین نمود. همچنین شیو و چن نشان دادند که برخی از گراف‌های مکعبی مانند گراف‌های همیلتونی عدد رنگی وقوعی حداکثر $\Delta(G) + 2$ دارند و حدس زدند که این رابطه برای هر گراف مکعبی برقرار باشد. درستی این حدس بعدها توسط مایدانسکی به اثبات رسید. او نشان داد که هر گراف با بیشترین درجه حداکثر ۳، عدد رنگی وقوعی حداکثر ۵ دارد. در حالت کلی به دست آوردن عدد رنگی وقوعی برای هر گراف مسئله پیچیده‌ای است.

تعریف ۱-۲۲. رأس u در گراف G رأس v را احاطه می‌کند هرگاه $v \in N_G(u)$ یا $u = v$. در گراف G هرگاه S یک زیر مجموعه ناتهی از $V(G)$ باشد به طوری که هر رأس $V(G)$ توسط حداقل یک رأس S احاطه شود، در این صورت S یک مجموعه احاطه‌گر برای G نامیده می‌شود. تعداد اعضای کوچک‌ترین مجموعه احاطه‌گر G عدد احاطه‌گر آن نامیده شده و با نماد $\gamma(G)$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۱-۲۳. یک رنگ‌آمیزی احاطه‌گر برای گراف G، یک رنگ‌آمیزی رأسی سره‌ی آن است به‌طوری که هر رأس یک کلاس رنگی را احاطه کند. عدد رنگی احاطه‌گر G که با نماد $\chi_d(G)$ نشان داده می‌شود عبارتست از کمترین تعداد رنگ‌های به کار رفته در یک رنگ‌آمیزی احاطه‌گر G. مفهوم عدد رنگی احاطه‌گر نخستین بار توسط جرا در [3] معرفی شده و نتایجی در این زمینه با به کار بردن الگوریتم‌هایی به دست آمده است. همچنین عدد رنگی احاطه‌گر تعدادی از گراف‌های خاص توسط جرا و همکارانش محاسبه شده است. در کل پیدا کردن مجموعه احاطه‌گر و عدد رنگی احاطه‌گر گراف‌ها از جمله مسائل دشوار و مهم‌ترین مسائل در نظریه گراف و ترکیبیات است که کاربرهای زیادی دارد.

تعریف ۱-۲۴. تعداد اعضای کوچک‌ترین مجموعه احاطه‌گر برای گراف وقوع G عدد احاطه‌گری وقوعی G نامیده شده و با نماد $\gamma_i(G)$ نشان داده می‌شود.

مثال ۱-۲۵. عدد احاطه‌گر و عدد احاطه‌گری وقوعی برای گراف G به صورت زیر است:



گراف وقوع G

رأس با رنگ قرمز در گراف G و گراف وقوع G تشکیل کوچک‌ترین مجموعه احاطه‌گر برای آنها می‌دهد.

تعریف ۱-۲۶. عدد رنگی احاطه‌گر برای گراف وقوع G عدد رنگی احاطه‌گری وقوعی G نامیده شده و با نماد $\chi_{d_i}(G)$ نشان داده می‌شود.

۲- عدد احاطه‌گری وقوعی گراف‌های خاص

در این بخش ابتدا عدد احاطه‌گری وقوعی گراف مسیر را به دست آورده و سپس در قضایای بعدی مقدار آن را برای گراف دور، گراف ستاره، گراف چرخ و گراف کامل به دست می‌آوریم.

تذکر ۲-۱. [2] برای $n \geq 2$ ، $\gamma(P_n) = \lceil n/3 \rceil$.

قضیه۲-۲. $\gamma_i(P_n) = \lceil 2\,(\mathrm{n}-1)\,/\,5 \rceil$.

اثبات. فرض کنید $V(P_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ و $E(P_n) = \{e_1, e_2, \dots, e_{n-1}\}$ به ترتیب مجموعه رئوس و یال‌های P_n باشند. با توجه با اینکه P_n تنها از یک مسیر تشکیل می‌شود، آن را به صورت $P_n: v_1e_1v_2e_2v_3e_3 \dots v_{n-1}e_{n-1}v_n$ می‌توان نشان داد. دو حالت زیر را در نظر بگیرید:

۱- (۵ پیمانه) ۴ یا ۳ یا ۰ ≡ (n-۱)۲

در این حالت مجموعه‌ای به صورت

$D = \{(v_{5k+2}, e_{5k+2}), (v_{5j}, e_{5j-1}) | k \geq 0, j \geq 1\}$

یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف وقوع P_n است. زیرا به ازای هر $k \geq 0$، رأس (v_{5k+2}, e_{5k+2}) رئوس (v_{5k+1}, e_{5k+1})،(v_{5k+2}, e_{5k+2}) (v_{5k+3}, e_{5k+2})،(v_{5k+2}, e_{5k+1}) و (v_{5k+3}, e_{5k+3}) را احاطه می‌کند. به علاوه، به ازای $j \geq 1$، رأس (v_{5j}, e_{5j-1}) تمام رئوس به فرم (v_{5j-1}, e_{5j-2})، (v_{5j-1}, e_{5j-1}) (v_{5j}, e_{5j-1})، (v_{5j}, e_{5j})، (v_{5j+1}, e_{5j}) را احاطه می‌کند.

بوضوح در گراف وقوع P_n تمام رئوس به فرم (v_i, e_i) و (v_i, e_{i-1}) هستند. حال برای رأس به فرم (v_i, e_i)، هرگاه (پیمانه ۵) ۳ یا ۲ یا ۱ $\equiv i$، این رأس توسط یکی از رئوس مجموعه D به فرم (v_{5k+2}, e_{5k+2}) احاطه می‌شود. این رأس با شرایط مذکور یکتاست. به علاوه هرگاه (پیمانه ۵) ۴ یا ۰ $\equiv i$، رأس (v_i, e_i) توسط رأس منحصر به فردی به فرم (v_{5j}, e_{5j-1}) از مجموعه D احاطه می‌شود. همچنین برای رأس به فرم (v_i, e_{i-1})، هرگاه (پیمانه ۵) ۳ یا ۲ $\equiv i$، این رأس توسط رأس یکتایی از D به فرم (v_{5k+2}, e_{5k+2}) احاطه می‌شود، در صورتی که در حالت (پیمانه ۵) ۴ یا ۱ یا ۰ $\equiv i$، رأس (v_i, e_{i-1}) توسط رأس یکتایی به فرم (v_{5j}, e_{5j-1}) احاطه می‌شود. در نتیجه هر رأس گراف وقوع P_n توسط حداقل یکی از رئوس D احاطه می‌شود. بنابراین D یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف وقوع P_n است. حال با توجه به اینکه گراف وقوع P_n دارای $2(n-1)$ رأس بوده و از هر پنج رأس متوالی، فقط یک رأس انتخاب شده، واضح است که D کوچک‌ترین مجموعه احاطه‌گر آن بوده و حکم برقرار می‌شود.

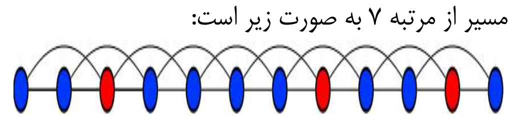
۲- (۵ پیمانه) ۲ یا ۱ ≡ (n-۱)۲

در این حالت مجموعه D را به فرم زیر در نظر بگیرید:

$$D = \{(v_{5k+2}, e_{5k+2}), (v_{5j}, e_{5j-1}), (v_n, e_{n-1}) \mid k \geq 0, j \geq 1\}$$

مشابه استدلال قسمت قبل، در این حالت نیز حکم برقرار می‌شود.

مثال ۲-۳. قضیه قبل برای گراف وقوع حاصل از گراف مسیر از مرتبه ۷ به صورت زیر است:



تذکر ۲-۴. [2] برای $n \geq 3$، $\gamma(C_n) = \lceil n/3 \rceil$

قضیه ۲-۵. $\gamma_i(C_n) = \lceil 2n/5 \rceil$.

اثبات. فرض کنید $V(C_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ و $E(C_n) = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ به ترتیب مجموعه رئوس و یال‌های C_n باشند و به ازای $1 \leq i \leq n-1$، $e_i = \{v_i, v_{i+1}\}$ و $e_n = \{v_1, v_n\}$ را در نظر بگیرید. مجموعه احاطه‌گر برای گراف وقوع C_n در هر یک از حالات زیر را در نظر بگیرید:

۱- $2n \equiv$ ۰ یا ۳ یا ۴ (پیمانه ۵)

در این حالت قرار دهید:

$$D = \{(v_{5i+2}, e_{5i+2}), (v_{5j}, e_{5j-1}) \mid i \geq 0, j \geq 1\}$$

ادامه برهان، مشابه برهان قضیه ۲-۲ است با این تفاوت که در گراف وقوع C_n تعداد رئوس برابر $2n$ و در گراف وقوع P_n برابر $2(n-1)$ است. حال هر رأس گراف وقوع C_n توسط حداقل یک عضو D احاطه می‌شود.
بنابراین D یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف وقوع C_n با $\lceil 2n/5 \rceil$ عضو است. گراف C_n با مفروضات قبل از دوری به طول n به صورت $C_n: v_1e_1v_2e_2v_3e_3 \dots v_ne_nv_1$ تشکیل می‌شود. حال مجموعه D طوری ساخته شده است که از هر پنج رأس متوالی مجاور، یک رأس را انتخاب نموده، بنابراین کمترین تعداد رئوس را دارد. در نتیجه عدد احاطه‌گر گراف وقوع C_n در این حالت برابر $\lceil 2n/5 \rceil$ است.

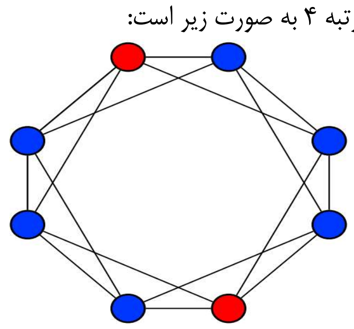
۲- $2n \equiv$ ۱ یا ۲ (پیمانه ۵)

این حالت نیز مشابه قضیه ۲.۲ ثابت می‌شود. در این حالت مجموعه D را به صورت

$$D = \{(v_{5i+2}, e_{5i+2}), (v_{5k}, e_{5k-1}), (v_1, e_n) \mid i \geq 0, k \geq 1\}$$

در نظر بگیرید. این مجموعه کوچک‌ترین مجموعه احاطه‌گر برای گراف وقوع C_n بوده و حکم ثابت می‌شود.

مثال ۲-۶. قضیه قبل برای گراف وقوع حاصل از گراف دور از مرتبه ۴ به صورت زیر است:

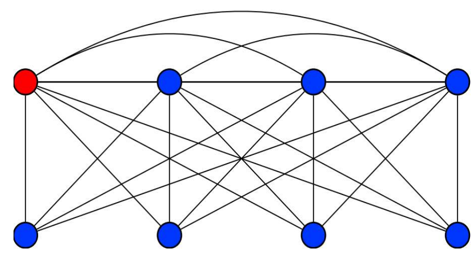


تذکر ۲-۷. $\gamma(S_n) = 1$.

قضیه ۲-۸. $\gamma_i(S_n) = 1$

اثبات. فرض کنید $V(S_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n, v\}$ مجموعه رئوس گراف ستاره باشد به طوری که هر v_i از درجه یک و v از درجه n هستند. به علاوه فرض کنید $E(S_n) = \{e_1, e, \dots, e_n\}$ مجموعه یال‌های آن باشند به طوری که $e_i = \{v, v_i\}$. بوضوح (v, e_1) تمام رئوس را احاطه می‌کند، بنابراین $S = \{(v, e_1)\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای $I(S_n)$ بوده و در نتیجه حکم برقرار می‌شود.

مثال ۲-۹. قضیه قبل برای گراف ستاره S_4 به صورت زیر است:



تذکر ۲-۱۰. $\gamma(W_n) = 1$

قضیه ۲-۱۱. $\gamma_i(W_n) = \lceil 2\,(n-1)\,/\,5 \rceil + 1$

اثبات. با توجه به اینکه $|E(W_n)| = 2n$ و به ازای هر گراف G، $|V(I(G))| = 2|E(G)|$، بنابراین $|V(I(W_n))| = 4n$.

فرض کنید $V(W_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n, v\}$ مجموعه رئوس گراف چرخ باشد به طوری که هر v_i از درجه سه و v از درجه n هستند.

به علاوه فرض کنید $E(W_n) = \{e_1, e, \dots, e_{2n}\}$ مجموعه یال‌های آن باشند. واضح است که W_n از گراف دور $C_n: v_1e_1v_2e_2v_3e_3 \dots v_ne_nv_1$ که در آن به ازای $1 \le j \le n$، $e_{n+j} = \{v, v_j\}$ تشکیل شده است. به علاوه با توجه به اینکه در گراف وقوع G:

$$deg\left((v_i, v_iv_j)\right) = 2deg_G v_i + deg_G v_j - 2$$

بنابراین در گراف وقوع W_n سه نوع رأس به فرم‌های زیر به ازای $1 \le i,j \le n$ وجود دارد:

(1^*) (v_i, e_j). در این حالت از مباحث فوق نتیجه می‌شود که درجه این رأس در گراف وقوع W_n برابر ۷ است.

(2^*) (v_j, e_{n+j}). درجه این رأس در گراف وقوع W_n برابر $n+4$ است.

(3^*) (v, e_{n+j}). درجه این رأس در گراف وقوع W_n برابر $2n+1$ است.

حالات ممکنه زیر را در نظر بگیرید:

(۱) $n \equiv$ ۴ یا ۲ (۵ پیمانه)

(۲) $n \equiv$ ۰ یا ۱ یا ۳ (۵ پیمانه)

برای حالت اول قرار دهید:

$S = \{(v, e_{n+1}), (v_i , e_{i-1}), (v_j, e_j), (v_n , e_n)\}.$

برای حالت دوم نیز قرار دهید:

$S = \{(v, e_{n+1}), (v_i , e_{i-1}), (v_j, e_j)\}$

که در آن $j \equiv$ ۰ (۵ پیمانه) , $i \equiv$ ۳ (۵ پیمانه).

از مباحث فوق نتایج بعدی حاصل می‌شوند:

(i) به ازای $n+1 \le j \le 2n$ و $1 \le i \le n$، (v, e_{n+1}) تمام رئوس به فرم‌های (v, e_j)، (v_i, e_{i+n})، (v_1, e_1)، (v_1, e_n)، (v, e_{n+1}) را احاطه می‌کند. تعداد این رئوس برابر $2n+2$ است. ((v, e_{n+1}) تمام رئوس از نوع 2^* و 3^* را احاطه می‌کند. تعداد این رئوس برابر $2n$ است. همچنین (v, e_{n+1}) رئوس (v_1, e_1) و (v_1, e_n) را احاطه می‌کند.)

(ii) به ازای $i \equiv$ ۳ (۵ پیمانه)، (v_i, e_{i-1}) تمام رئوس به فرم‌های (v_{i+1}, e_i)، (v_i, e_i)، (v_{i-1}, e_{i-2})، (v_{i-1}, e_{i-1}) و (v_i, e_{i-1}) را احاطه می‌کند. این رئوس متفاوت از رئوس قسمت (i) هستند.

(iii) به ازای $i \equiv$ ۰ (۵ پیمانه)، (v_i, e_i) تمام رئوس به فرم‌های (v_i, e_{i-1})، (v_{i+1}, e_{i+1})، (v_{i+1}, e_i)، (v_{i-1}, e_{i-1})، (v_i, e_i) را احاطه می‌کند. این رئوس متفاوت از قسمت‌های (i) و (ii) هستند.

(iv) (v_n, e_n) رئوس باقیمانده را احاطه می‌کند. (این مورد برای $n \equiv$ ۴ یا ۲ (۵ پیمانه) برقرار است.)

حال تمام رئوس از نوع 1^* توسط رئوس به فرم (v_i, e_{i-1}) یا (v_i, e_i) در (ii) یا (iii) یا (iv) احاطه می‌شود. در نتیجه S تمام رئوس گراف وقوع را احاطه می‌کند. به‌علاوه، تعداد رئوس S با فرم‌های (ii)، (iii) و (iv) برابر است با $\lceil 2n - 2/5 \rceil$. بنابراین S یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف وقوع W_n بوده و در نتیجه $\gamma_i(W_n) \le \lceil 2\,n - 2\,/\,5 \rceil + 1.$

اما با توجه به ساختار S، این کوچک‌ترین مجموعه احاطه‌گر است.

تذکر ۲-۱۲. $\gamma(K_n) = 1$.

قضیه ۲-۱۳. $\gamma_i(K_n) = \lceil n/2 \rceil$.

اثبات. فرض کنید $V(K_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ و $E(K_n) = \{e_1, e, \dots, e_m\}$ که $m = n(n-1)/2$،

همچنین برای $1 \le i \le n-1$ فرض کنید $e_i = \{v_i, v_{i+1}\}$ و $e_n = \{v_1, v_n\}$ و $S = \{(v_j, e_j) | 1 \le j \le n\, , j = 2k+1, k \ge 0\}$.
حال برای $1 \le j \le n-1$ هر رأس در S تمام رئوس به فرم‌های (v_j, e) و (v_{j+1}, e^*) را احاطه می‌کند. به علاوه، اگر n زوج باشد، آنگاه $|S| = n/2$ و اگر فرد باشد، $|S| = \lceil n/2 \rceil$ (در این مورد (v_n, e_n) رئوس باقیمانده را احاطه می‌کند.) از توضیحات فوق نتیجه می‌شود که S کوچک‌ترین مجموعه احاطه‌گر برای گراف وقوع K_n بوده و حکم ثابت می‌شود.

۳- عدد رنگی احاطه‌گری وقوعی

تذکر ۳-۱. [3] به ازای $n \ge 2$،

$$\chi_d(P_n) = \begin{cases} \lceil n/3 \rceil + 1, & n = 2,3,4,5,7 \\ \lceil n/3 \rceil + 2, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

قضیه ۳-۲. به ازای $n \ge 6$،

$$\chi_{d_i}(P_n) = \begin{cases} \lfloor 2(n-1)/5 \rfloor + 3, & 2(n-1) \equiv 0 (\text{پیمانه } 5) \\ \lfloor 2(n-1)/5 \rfloor + 4, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

به عبارت دیگر، $\chi_{d_i}(P_n) = \lceil 2(n-1)/5 \rceil + 3$.

اثبات. فرض کنید $V(P_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ و $E(P_n) = \{e_1, e_2, \dots, e_{n-1}\}$ به ترتیب مجموعه رئوس و یال‌های P_n بوده و همچنین فرض کنید: $P_n: v_1 e_1 v_2 e_2 v_3 e_3 \dots v_{n-1} e_{n-1} v_n$. مجموعه‌های زیر را در نظر بگیرید:

$A_i = \{(v_{5i+1}, e_{5i+1}), (v_{5i+2}, e_{5i+1}), (v_{5i+2}, e_{5i+2}), (v_{5i+3}, e_{5i+2}), (v_{5i+3}, e_{5i+3}) | i \ge 0\}$

$B_i = \{(v_{5i-1}, e_{5i-2}), (v_{5i-1}, e_{5i-1}), (v_{5i}, e_{5i-1}), (v_{5i}, e_{5i}), (v_{5i+1}, e_{5i}) | i \ge 1\}$

همچنین مجموعه C را با شرایط زیر در نظر بگیرید:

۱- هرگاه $2(n-1) \equiv 0$ (پیمانه 5)، $C = \emptyset$.

۲- هرگاه $2(n-1) \equiv 1$ (پیمانه 5)، $C = \{(v_n, e_{n-1})\}$.

۳- هرگاه $2(n-1) \equiv 2$ (پیمانه 5)، $C = \{(v_{n-1}, e_{n-1}), (v_n, e_{n-1})\}$،

۴- هرگاه $2(n-1) \equiv 3$ (پیمانه 5)، $C = \{(v_{n-1}, e_{n-2}), (v_{n-1}, e_{n-1}), (v_n, e_{n-1})\}$ ،

۵- هرگاه $2(n-1) \equiv 4$ (پیمانه 5)، $C = \{(v_{n-2}, e_{n-2}), (v_{n-1}, e_{n-2}), (v_{n-1}, e_{n-1}), (v_n, e_{n-1})\}$

توجه شود که در هر رنگ‌آمیزی احاطه‌گری برای گراف وقوع P_n، رأس (v_{5i+2}, e_{5i+2}) از مجموعه A_i باید حداقل یک کلاس رنگی را احاطه نماید و با توجه به اینکه این رأس فقط اعضای A_i را احاطه می‌کند، در نتیجه حداقل یکی از اعضای A_i باید در هر رنگ‌آمیزی احاطه گری رنگ متفاوتی از رنگ رئوس سایر مجموعه‌های A_j و B_j داشته باشد. به عبارت دیگر، در مجموعه A_i یک رنگ غیرتکراری در مقایسه با رنگ سایر مجموعه‌های A_j و B_j باید وجود داشته باشد. (امکان دارد در مجموعه A_i این رنگ بیش از یکبار ظاهر شود اما در هیچ مجموعه A_j و B_j نمی‌تواند ظاهر شود) حال رأس (v_{5i}, e_{5i-1}) در مجموعه B_i نیز دارای شرایط مشابهی است. با توجه به اینکه (v_{5i}, e_{5i-1}) فقط اعضای B_i را احاطه می‌کند، حداقل یک رنگ غیرتکراری در هر B_i به طوری که این رنگ در سایر مجموعه‌های A_j و B_j ظاهر نمی‌شود، باید وجود داشته باشد. از مطالب ذکر شده نتیجه می‌شود که در هر رنگ‌آمیزی احاطه گری حداقل $\lfloor 2(n-1)/5 \rfloor$ رنگ مورد نیاز است، زیرا تعداد کل مجموعه‌های A_i و B_i برابر $\lfloor 2(n-1)/5 \rfloor$ است. از طرف دیگر با توجه به اینکه در A_0، رئوس $(v_1, e_1), (v_2, e_1)$ و (v_2, e_2) مجاورند، دو رنگ متفاوت از رنگ‌های اشاره شده‌ی قبلی نیز برای رنگ‌آمیزی احاطه‌گری موردنیازند. بنابراین برای هر رنگ‌آمیزی احاطه‌گری گراف وقوع P_n حداقل $\lfloor 2(n-1)/5 \rfloor + 2$ رنگ موردنیاز است. حال ادعا می‌کنیم که حداقل یکی از مجموعه‌های A_0 یا B_1 نیز یک رنگ متمایز از رنگ‌های قبلی را برای رئوسش نیاز دارد. اثبات ادعا: طبق مطالب اشاره شده برای رنگ‌آمیزی رئوس A_0 حداقل سه رنگ متمایز مورد نیاز است. حال

اگر این تعداد رنگ بیشتر از سه باشد ادعا ثابت می‌شود. در غیر این صورت فرض کنید در A_0 دقیقاً سه رنگ متمایز برای رنگ‌آمیزی رئوس وجود داشته باشد. این سه رنگ را با a، b و c نشان دهید. برای چنین رنگ‌آمیزی احاطه‌گری بدون اینکه خللی به اثبات وارد شود، فرض کنید رئوس (v_1, e_1) و (v_3, e_2) با a رنگ‌آمیزی شوند. (با توجه به وجود سه رنگ و مجاورت رئوس A_0، این دو رأس باید هم رنگ باشند.) به علاوه برای رئوس (v_2, e_1) و (v_3, e_3) نیز که رنگ مشترکی دارند، b را اختصاص دهید. سپس (v_2, e_2) را با c رنگ کنید. لازم به ذکر است که c همان رنگ غیرتکراری در A_0 است که در هیچ یک از مجموعه‌های A_i و B_i مشاهده نمی‌شود. (اگر رنگ c در مجموعه‌های دیگر تکرار شود، رأس (v_1, e_1) هیچ کلاسی را نمی‌تواند احاطه کند که این امکان‌پذیر نیست.) از طرف دیگر اگر رئوس B_1 نیز دقیقا با سه رنگ رنگ-آمیزی شوند و اگر به فرض خلف، در این مجموعه تنها یک رنگ غیرتکراری در سایر مجموعه‌های A_i و B_i وجود داشته باشد، در این صورت در رنگ‌آمیزی رئوس B_1، رئوس (v_4, e_3) و (v_5, e_5) رنگ یکسانی دارند که این رنگ با a، b و c متفاوت است. زیرا (v_3, e_2) (v_3, e_3)، و(v_4, e_3) مجاورند و رنگ c غیر تکراری است. این رنگ را با d نشان دهید. همچنین (v_4, e_4) و (v_6, e_5) باید هم رنگ باشند و با توجه به اینکه این رنگ باید در A_0 تکرار شده باشد، تنها رنگ مورد استفاده a است. حال (v_5, e_4) باید با b رنگ‌آمیزی شود، اما باشرایط ایجاد شده رأسی مانند (v_4, e_3) نمی‌تواند هیچ کلاس رنگی را احاطه نماید که این یک تناقض است. بنابراین در یکی از مجموعه‌های A_0 یا B_1 رنگی متفاوت از رنگ‌های قبلی وجود دارد. در نتیجه برای هر رنگ آمیزی احاطه‌گری حداقل $\lfloor 2(n-1)/5 \rfloor + 3$ رنگ مورد نیاز است. حال اگر $2(n-1) \equiv$ (پیمانه 5)4 یا 3، با توجه به اینکه مجموعه C شامل بیش از دو عضو بوده و رأس (v_n, e_{n-1}) فقط اعضای مجموعه C را احاطه می‌کند، بنابراین در این مجموعه نیز باید یک رنگ غیرتکراری از رنگ‌های سایر مجموعه‌ها وجود داشته باشد. در نتیجه در این حالت حداقل $\lfloor 2(n-1)/5 \rfloor + 4$ رنگ موردنیاز است. هرگاه $2(n-1) \equiv 1$ (پیمانه 5)2 یا طبق مباحث قبلی حداقل یکی از مجموعه های A_i، B_i یا C باید یک رنگ غیر تکراری متمایز جدید داشته باشد. بنابراین حداقل $\lfloor 2(n-1)/5 \rfloor + 4$ رنگ نیز در این حالت مورد نیاز است. هرگاه $2(n-1) \equiv 0$ (پیمانه 5)، آنگاه $C = \emptyset$، در نتیجه در این حالت حداقل $\lfloor 2(n-1)/5 \rfloor + 3$ رنگ موردنیاز است. از تمام حالات بررسی شده نتیجه می شود که در هر رنگ‌آمیزی احاطه گری برای گراف وقوع P_n حداقل $\lceil 2(n-1)/5 \rceil + 3$ رنگ مورد نیاز است. حال یک رنگ‌آمیزی احاطه‌گری برای گراف وقوع P_n به صورت زیر به دست می‌آید:

گام اول: $2(n-1) \equiv 0$ (پیمانه 5).

نگاشت رنگی زیر را در نظر بگیرید:

$$\alpha: I(P_n) \to C = \{1,2,3,\dots,\frac{n-1}{5},1',2',3',\dots,\left(\frac{n-1}{5}\right)',1^*,2^*,3^*\}$$

لازم به ذکر است که با توجه به اینکه $2(n-1) \equiv 0$ (پیمانه 5)، بنابراین $|A_i| = |B_i| = \frac{n-1}{5}$. به ازای $i \geq 0$ برای رأس (v_{5i+2}, e_{5i+2}) از A_i قرار دهید:

$$\alpha((v_{5i+2}, e_{5i+2})) = i+1. \quad (0 \leq i \leq \frac{n-1}{5} - 1)$$

به ازای $1 \leq i \leq \frac{n-1}{5}$ رأس (v_{5i}, e_{5i-1}) از B_i را به صورت $\alpha((v_{5i}, e_{5i-1})) = i'$ رنگ‌آمیزی کنید. سپس برای رئوس باقیمانده رنگ‌های 1^*، 2^* و 3^* را به صورت زیر در نظر بگیرید: به ازای $k = 3j$ و $j \geq 0$ در مجموعه A_k:

$$\alpha((v_{5k+1}, e_{5k+1})) = \alpha((v_{5k+3}, e_{5k+3})) = 1^*،$$
$$\alpha((v_{5k+2}, e_{5k+1})) = 2^*،$$
$$\alpha((v_{5k+3}, e_{5k+2})) = 3^*.$$

حال فرض کنید $k = 3i$ و $i \geq 1$ و قرار دهید: برای $j = k-1$ در مجموعه A_j:

$$\alpha((v_{5j+1}, e_{5j+1})) = \alpha((v_{5j+3}, e_{5j+3})) = 2^*،$$
$$\alpha((v_{5j+2}, e_{5j+1})) = 3^*،$$

$\alpha((v_{5j+3}, e_{5j+2})) = 1^*.$

برای $j = k - 2$ در مجموعه A_j:

$\alpha((v_{5j+1}, e_{5j+1})) =$
$\alpha((v_{5j+3}, e_{5j+3})) = 3^*$،
$\alpha((v_{5j+2}, e_{5j+1})) = 1^*$،
$\alpha((v_{5j+3}, e_{5j+2})) = 2^*.$

برای $j = k - 1$ در مجموعه B_j:

$\alpha((v_{5j-1}, e_{5j-2})) =$
$\alpha((v_{5j+1}, e_{5j})) = 1^*$،
$\alpha((v_{5j-1}, e_{5j-1})) = 2^*$،
$\alpha((v_{5j}, e_{5j})) = 3^*.$

برای $j = k - 2$ در مجموعه B_j:

$\alpha((v_{5j-1}, e_{5j-2})) =$
$\alpha((v_{5j+1}, e_{5j})) = 2^*$،
$\alpha((v_{5j-1}, e_{5j-1})) = 3^*$،
$\alpha((v_{5j}, e_{5j})) = 1^*.$

در مجموعه B_k:

$\alpha((v_{5k+1}, e_{5k-2})) =$
$\alpha((v_{5k+1}, e_{5k})) = 3^*$،
$\alpha((v_{5k-1}, e_{5k-1})) = 1^*$،
$\alpha((v_{5k}, e_{5k})) = 2^*.$

بنابراین یک رنگ‌آمیزی احاطه گری برای گراف وقوع P_n با کمترین تعداد رنگ به دست آمده و حکم ثابت می‌شود.

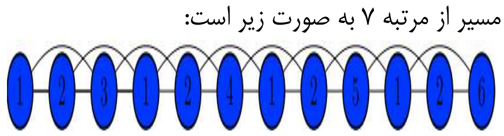
گام دوم: (پیمانه 5)$1 \equiv (n-1)2$. این قسمت مشابه قسمت قبل است با این تفاوت که در این حالت $C = \{(v_n, e_{n-1})\}$، بنابراین کافی است رأس (v_n, e_{n-1}) را با یک رنگ متمایز از رنگ‌های انتخاب شده رنگ‌آمیزی نمود.

گام سوم: (پیمانه 5)$2 \equiv (n-1)2$. این قسمت مشابه حالت‌های قبل است. با توجه به اینکه $C = \{(v_{n-1}, e_{n-1}), (v_n, e_{n-1})\}$، کافی است رأس (v_{n-1}, e_{n-1}) را با یک رنگ غیر تکراری و متمایز از رنگ‌های انتخاب شده قبل رنگ‌آمیزی کرده و برای رأس (v_n, e_{n-1}) یک رنگ تکراری که قبلاً انتخاب شده، طوری نسبت دهید که رنگ آن با رنگ رئوس مجاورش متفاوت باشد.

گام چهارم: (پیمانه 5)$3 \equiv (n-1)2$. برهان مشابه قسمت‌های قبل است. کافی است در مجموعه C رأس (v_{n-1}, e_{n-2}) را با یک رنگ غیرتکراری و جدید و بقیه رئوس را با رنگ‌های تکراری با همان روال قبلی رنگ آمیزی نمود که رئوس مجاور رنگ‌های متمایزی داشته باشند.

گام پنجم: (پیمانه 5)$4 \equiv (n-1)2$. کافی است در مجموعه C، رأس (v_{n-1}, e_{n-2}) را با یک رنگ غیرتکراری و جدید و بقیه رئوس را با رنگ‌های 1^*، 2^* و 3^* طوری رنگ‌آمیزی نمود که رئوس مجاور غیرهم رنگ باشند. با توجه به مراحل انجام شده حکم نتیجه می‌شود.

مثال ۳-۳. قضیه قبل برای گراف وقوع حاصل از گراف مسیر از مرتبه ۷ به صورت زیر است:



تذکر ۳-۴. [4] برای $n \geq 3$،

$$\chi_d(C_n) = \begin{cases} \lceil n/3 \rceil, & \text{اگر } n = 4 \\ \lceil n/3 \rceil + 1, & \text{اگر } n = 5 \\ \lceil n/3 \rceil + 2, & \text{سایر موارد} \end{cases}$$

قضیه ۳-۵. $\chi_{d_i}(C_n) = \lceil 2n/5 \rceil + 3$.

اثبات. برهان مشابه قضیه ۳-۲ است. فرض کنید $V(C_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ و $E(C_n) = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ به ترتیب مجموعه رئوس و یال‌های C_n بوده و همچنین فرض کنید:

$C_n: v_1 e_1 v_2 e_2 v_3 e_3 \dots v_n e_n v_1.$

مجموعه‌های زیر را در نظر بگیرید:

$A_i = \{(v_{5i+1}, e_{5i+1}), (v_{5i+2}, e_{5i+1}), (v_{5i+2}, e_{5i+2}), (v_{5i+3}, e_{5i+2}), (v_{5i+3}, e_{5i+3}) \mid i \geq 0\}$

$B_k = \{(v_{5k-1}, e_{5k-2}), (v_{5k-1}, e_{5k-1}), (v_{5k}, e_{5k-1}), (v_{5k}, e_{5k}), (v_{5k+1}, e_{ki}) | k \geq 1\}$

همچنین مجموعه C را به صورت زیر در نظر بگیرید:

۱- هرگاه $2n \equiv 0$(پیمانه5)،
$C = \emptyset$،

۳- هرگاه $2n \equiv 1$(پیمانه5)،
$C = \{(v_1, e_n)\}$،

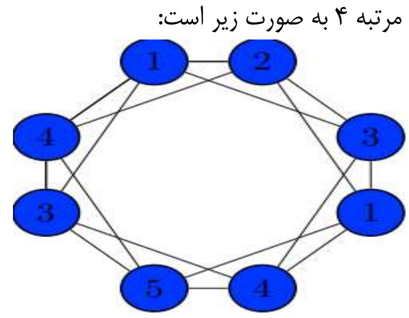
۳- هرگاه $2n \equiv 2$(پیمانه5)،
$C = \{(v_n, e_n), (v_1, e_n)\}$،

۴- هرگاه $2n \equiv 3$(پیمانه5)،
$C = \{(v_n, e_{n-1}), (v_n, e_n), (v_1, e_n)\}$،

۵- هرگاه $2n \equiv 4$(پیمانه5)،
$C = \{(v_1, e_n), (v_n, e_n), (v_{n-1}, e_{n-1}), (v_n, e_{n-1})\}$

ادامه استدلال مشابه قضیه ۲.۳ است.

مثال ۳-۶. قضیه قبل برای گراف وقوع حاصل از گراف دور از مرتبه ۴ به صورت زیر است:



تذکر ۳-۷. برای $n \geq 1$، $\chi_d(S_n) = 2$.

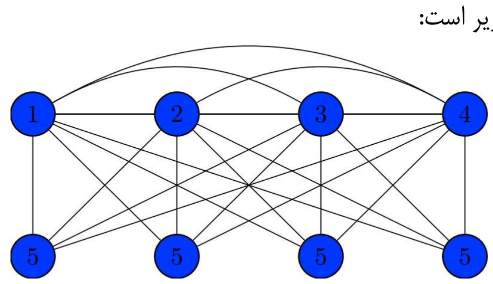
قضیه ۳-۸. برای $n \geq 1$، $\chi_{d_i}(S_n) = n + 1$.

اثبات. فرض کنید $V(S_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n, v\}$ و $E(S_n) = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ به ترتیب مجموعه رئوس و یال‌های S_n باشند به طوری که هر رأس به فرم v_i از درجه یک و v از درجه n بوده و $e_i = \{v, v_i\}$. با توجه به اینکه K_{n+1} زیر گرافی از گراف وقوع حاصل از S_n است، بنابراین $\chi_{d_i}(S_n) \geq n + 1$. نگاشت زیر را در نظر بگیرید:

$\alpha: I(S_n) \to C = \{1,2,3, \dots, n+1\}$

که در آن برای $1 \leq i \leq n$ ، $\alpha((v, e_i)) = i$ و $\alpha((v_i, e_i)) = n + 1$. (به ازای $1 \leq i \leq n$، رئوس (v_i, e_i) مجاور نیستند.) حال به ازای $1 \leq i \leq n$، رئوس (v_i, e_i) و (v, e_i) کلاس i را احاطه می‌کنند. در نتیجه α یک نگاشت رنگی احاطه‌گری برای گراف وقوع S_n با کمترین تعداد رنگ بوده و حکم برقرار می‌شود.

مثال ۳-۹. قضیه قبل برای گراف ستاره S_4 به صورت زیر است:



تذکر ۳-۱۰. [3] به ازای $n \geq 1$، $\chi_d(K_n) = n$.

قضیه ۳-۱۱. به ازای $n \geq 1$، $\chi_{d_i}(K_n) = n$.

اثبات. فرض کنید $V(K_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ و $E(K_n) = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ به ترتیب مجموعه رئوس و یال‌های K_n باشند که به ازای $1 \leq i \leq n - 1$، $e_i = \{v_i, v_{i+1}\}$ و $e_n = \{v_1, v_n\}$. با توجه به اینکه $\chi_i(K_n) = n$،
بنابراین $\chi_{d_i}(K_n) \geq n$. نگاشت رنگی زیر را در نظر بگیرید:

$\alpha: I(K_n) \to C = \{1,2,3, \dots, n\}$
$\alpha\left((v_i, v_i v_j)\right) = j$

با این تعریف، α یک نگاشت رنگی است که برای رئوس مجاور رنگ‌های متمایزی نسبت می‌دهد. به علاوه، به ازای $1 \leq i, j \leq n$، $(v_i, v_i v_j)$ کلاس i را احاطه می‌کند. بنابراین حکم برقرار می‌شود.

فهرست منابع

[1] R.A. Brualdi, J.J.Q. Massey. Incidenceand strong edge colorings of graphs. *Discrete Math* 122: 51-58 (1993)

[2] G. Chartrand, P. Zhang. Introduction to graph theory. *McGraw Hill, Boston* (2005)

[3] R. M. Gera, S. Horton, C. Rasmussen. Dominator Coloring and Safe Clique Partitions. *Congressus Numerantium* 181 (7-9): 19-32 (2006)

[4] R. M. Gera. On Dominator colorings in graphs. *Graph Theory Notes of New York*, LIT 25-30 (2007)

[5] B. Guiduli. On incidence coloring and star arboricity of graphs. *Discrete Math* 163: 275-278 (1997)

[6] R.M. Gera. On the dominator colorings in bipartite graphs. *ITNG.IEEE* 1-6 (2007)

[7] O.Ore. Theory of graphs. no.38 in American Mathematical Society Publications, *AMS, Providence* (1962)

[8] T.Haynes, M. Henning. Domination in graphs of maximum degree 3. *Discrete Math* 292:131-141 (2005)

[9] F.V. Fomin, D.M. Thilikos. Dominating sets in planar graphs. Branch-width and exponential speed-up, *Siam Journal on Computing* 36(2): 281-309 (2006)

[10] M.Chellali, F. Maffray. Dominator colorings in some classes of graphs. *Graphs and Combin* 1-11(2011)

[11] I. Algor and N. Alon. The star arboricity of graphs. *Discrete Math*