

دسترسی در سایت <http://jnrm.srbiau.ac.ir>

سال ششم، شماره بیست و چهارم، خرداد و تیر ۱۳۹۹

شماره شاپا: ۵۸۸-۲۵۸۸۸

JNRM  
دانشگاه آزاد اسلامی

پژوهش‌های نوین در ریاضی



دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

## وجود حداقل سه جواب ضعیف برای یک دستگاه شبه- خطی بیضوی

سعید شکوه\*

استادیار گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه گنبد کاووس، گنبد کاووس، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۸/۰۲/۱۳ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۸/۱۰/۲۱

### چکیده

در این مقاله با استفاده از قضیه‌هایی که توسط پروفسور ریچری در مقاله [۸] و پروفسور بونانو در مقاله [۶] اثبات شده است، وجود حداقل سه جواب ضعیف را برای یک دستگاه شبه خطی بیضوی ثابت خواهیم کرد. در واقع، ما به دستگاه معادله دیفرانسیل یک عملگر غیرخطی مشتق پذیر نسبت خواهیم داد به طوری که نقاط بحرانی این عملگر جواب‌های ضعیف از دستگاه مورد نظر باشند.

واژه‌های کلیدی: مسائل مقدارمرزی، روش تغییراتی، سه جواب ضعیف.

## ۱- مقدمه

در این مقاله وجود حداقل سه جواب ضعیف را برای دستگاه شبه‌خطی زیر ثابت می‌نماییم:

می‌نامیم. در سال‌های اخیر دستگاه معادلات دیفرانسیل با شرایط مرزی مورد توجه بسیاری از ریاضیدان‌ها بوده است. به‌عنوان مثال مقاله‌های [۱-۴] و مراجع موجود در آن‌ها را مشاهده نمایید. در [۱]، وجود بی‌نهایت جواب برای مساله زیر ثابت شده است:

$$\begin{cases} -(p_i - 1)|u'_i(x)|^{p_i-2} u''_i(x) = \\ \lambda F_{u_i}(x, u_1, \dots, u_n) h_i(x, u'_i), x \in (a, b) \\ u_i(a) = u_i(b) = 0, \text{ for } 1 \leq i \leq n, \end{cases}$$

که  $h_i$  ها توابع کران‌دار از مجموعه  $[a, b] \times \mathbb{R}$  به  $[0, +\infty)$  هستند. در مقاله [۴]، وجود سه جواب ضعیف برای دستگاه زیر بررسی شده است:

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \left( |\nabla u|^{p_1-2} \nabla u \right) \\ + a_1(x) |u|^{p_1-2} u = \lambda F_{u_1}(x, u_1, \dots, u_n) \\ + \mu G_{u_1}(x, u_1, \dots, u_n), \quad \text{in } \Omega, \\ -\operatorname{div} \left( |\nabla u|^{p_2-2} \nabla u \right) \\ + a_2(x) |u|^{p_2-2} u = \lambda F_{u_2}(x, u_1, \dots, u_n) \\ + \mu G_{u_2}(x, u_1, \dots, u_n), \quad \text{in } \Omega, \\ \vdots \\ -\operatorname{div} \left( |\nabla u|^{p_n-2} \nabla u \right) \\ + a_n(x) |u|^{p_n-2} u = \lambda F_{u_n}(x, u_1, \dots, u_n) \\ + \mu G_{u_n}(x, u_1, \dots, u_n), \quad \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial u_i}{\partial \nu} = 0, \text{ for } 1 \leq i \leq n, \text{ on } \partial\Omega. \end{cases}$$

در مقاله [۷]، با استفاده از قضیه‌ای که توسط ریچری اثبات شده است، نویسندگان نشان دادند بازه‌ی باز  $\Lambda \subseteq [0, +\infty)$  موجود است به‌طوری‌که به‌ازای  $\lambda \in \Lambda$ ، دستگاه شبه‌خطی بیضوی زیر دارای دو جواب نابدهی و مجزا می‌باشد:

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda F_u(x, u, v), & x \in \Omega, \\ -\Delta_q u = \lambda F_v(x, u, v) & x \in \Omega, \\ u = v = 0 & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \left( \left( 1 + \frac{|\nabla u|^{p_1}}{\sqrt{1+|\nabla u|^{2p_1}}} \right) |\nabla u|^{p_1-2} \nabla u \right) \\ + a_1(x) |u|^{p_1-2} u = \lambda F_{u_1}(x, u_1, \dots, u_n) \\ + \mu G_{u_1}(x, u_1, \dots, u_n), \quad \text{in } \Omega, \\ -\operatorname{div} \left( \left( 1 + \frac{|\nabla u|^{p_2}}{\sqrt{1+|\nabla u|^{2p_2}}} \right) |\nabla u|^{p_2-2} \nabla u \right) \\ + a_2(x) |u|^{p_2-2} u = \lambda F_{u_2}(x, u_1, \dots, u_n) \\ + \mu G_{u_2}(x, u_1, \dots, u_n), \quad \text{in } \Omega, \\ \vdots \\ -\operatorname{div} \left( \left( 1 + \frac{|\nabla u|^{p_n}}{\sqrt{1+|\nabla u|^{2p_n}}} \right) |\nabla u|^{p_n-2} \nabla u \right) \\ + a_n(x) |u|^{p_n-2} u = \lambda F_{u_n}(x, u_1, \dots, u_n) \\ + \mu G_{u_n}(x, u_1, \dots, u_n), \quad \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial u_i}{\partial \nu} = 0, \text{ for } 1 \leq i \leq n, \text{ on } \partial\Omega \end{cases}$$

که  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  (به‌ازای  $N \geq 1$ ) دامنه کران‌دار با مرزی از کلاس  $C^1$  می‌باشد.  $\nu$  بردار یکه عمود بر  $\Omega$ ،  $\lambda, \mu > 0$  به‌ازای  $1 \leq i \leq n$ ،  $a_i \in L^\infty(\Omega)$  و  $p_i > N$  است. تابع  $F: \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  به‌گونه‌ای است که به‌ازای  $(t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ ،  $F(\cdot, t_1, t_2, \dots, t_n)$  در  $\Omega$  پیوسته و به‌ازای  $x \in \Omega$ ،  $F(x, \cdot, \dots, \cdot)$ ،  $\mathbb{R}^n$ ،  $C^1$  است. همچنین تابع  $G: \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  به‌ازای  $(t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ ،  $G(\cdot, t_1, t_2, \dots, t_n)$  در  $\Omega$  اندازه‌پذیر و به‌ازای  $x \in \Omega$ ،  $G(x, \cdot, \dots, \cdot)$ ،  $\mathbb{R}^n$ ،  $C^1$  است. مساله فوق را در ادامه  $(N_{\lambda, \mu})$

همینین نتایج مشابه در مقاله [۳]، برای مساله زیر اثبات شده است:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p_1-2}\nabla u\right) \\ = \lambda F_{u_1}(x, u_1, \dots, u_n) \text{ in } \Omega, \\ -\operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p_2-2}\nabla u\right) \\ = \lambda F_{u_2}(x, u_1, \dots, u_n), \text{ in } \Omega, \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ -\operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p_n-2}\nabla u\right) \\ = \lambda F_{u_n}(x, u_1, \dots, u_n), \text{ in } \Omega, \\ u_i = 0, \text{ for } 1 \leq i \leq n, \text{ on } \partial\Omega \end{cases}$$

## ۲- ابزار و مفاهیم پایه

ابزار اصلی ما برای اثبات نتایج، قضیه زیر از پروفسور ریچری [۸] است.

### قضیه ۱-۲

فرض نماییم  $X$  یک فضای باناخ انعکاسی حقیقی،  $I \subseteq \mathbb{R}$  یک بازه،  $\Phi: X \rightarrow \mathbb{R}$  یک تابع نیم پیوسته

پایینی  $C^1$  باشد که روی هر زیر مجموعه کراندار از  $X$  کراندار است. همچنین فرض کنیم مشتق آن دارای وارون

پیوسته روی  $X^*$  باشد و  $J: X \rightarrow \mathbb{R}$  یک تابع

$C^1$  با مشتق فشرده باشد و به ازای هر  $\lambda \in I$

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} (\Phi(x) + J(x)) = +\infty$$

و  $\rho \in \mathbb{R}$  موجود باشد که

$$\sup_{\lambda \in I} \inf_{x \in X} (\Phi(x) + \lambda(J(x) + \rho)) <$$

$$\inf_{x \in X} \sup_{\lambda \in I} (\Phi(x) + \lambda(J(x) + \rho)).$$

در این صورت یک مجموعه باز ناتهی  $A \subseteq I$  و یک عدد مثبت  $q$  با خاصیت زیر موجود است:

در این صورت یک مجموعه باز ناتهی  $A \subseteq I$  و یک عدد مثبت  $q$  با خاصیت زیر موجود است:

به ازای  $\lambda \in A$  و به ازای تابع  $\Psi: X \rightarrow \mathbb{R}$  با مشتق فشرده،  $\tau > 0$  موجود است که برای هر  $\mu \in [0, \tau]$  معادله

$$\Phi'(u) + \lambda J'(u) + \mu \Psi'(u) = 0$$

دارای سه جواب ضعیف است.

در اثبات نتیجه اصلی از گزاره ذیل استفاده خواهیم نمود که در مقاله [۶] اثبات شده است.

## گزاره ۱-۲

فرض کنیم  $X$  یک مجموعه ناتهی و  $\Phi, J$  دو تابع روی  $X$  باشد. همچنین فرض کنیم به ازای  $x \in X$

$\Phi(x) \geq 0$  و  $u_0 \in X$  باشد به طوری که

$$\Phi(u_0) = J(u_0) = 0$$

و  $r > 0$  موجود باشد که

$$\Phi(u_1) > r \text{ (الف)}$$

$$\sup_{\Phi(x) < r} (-J(x)) < r \frac{-J(u_1)}{\Phi(u_1)} \text{ (ب)}$$

در این صورت برای هر  $v > 1$  و برای هر  $\rho \in \mathbb{R}$  صادق در

$$\frac{\sup_{\Phi(x) < r} (-J(x)) + r \frac{-J(u_1)}{\Phi(u_1)} - \sup_{\Phi(x) < r} (-J(x))}{v} < \rho < r \frac{-J(u_1)}{\Phi(u_1)},$$

خواهیم داشت

$$\sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \inf_{x \in X} (\Phi(x) + \lambda(J(x) + \rho)) <$$

$$\inf_{x \in X} \sup_{\lambda \in [0, \sigma]} (\Phi(x) + \lambda(J(x) + \rho))$$

که

به ازای  $1 \leq i \leq n$ ، که  $\text{diam}(\Omega)$  اندازه لبگ مجموعه  $\Omega$  می‌باشد.

### تعریف ۱-۲

یک جواب ضعیف از مساله  $(N_{\lambda, \mu})$ ، تابع  $u \in X$  است به طوری که در رابطه زیر صدق کند:

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \left( |\nabla u_i|^{p_i-2} \nabla u_i + \frac{|\nabla u_i|^{2p_i-2} \nabla u_i}{\sqrt{1+|\nabla u_i|^{2p_i}}} \right) \nabla v_i dx$$

$$+ \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n a_i(x) |u_i|^{p_i-2} u_i v_i dx$$

$$- \lambda \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n F_{u_i}(x, u_i(x), \dots, u_n(x)) v_i(x) dx$$

$$- \mu \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n G_{u_i}(x, u_i(x), \dots, u_n(x)) v_i(x) dx = 0$$

به‌ازای هر  $(v_1, v_2, \dots, v_n) \in X$

### ۳- نتایج اصلی

در این فصل نتایج اصلی و اثبات آن‌ها ذکر خواهد شد. ابتدا به‌ازای  $u \in X$  تعریف می‌کنیم:

$$\Phi(u) := \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} (|\nabla u_i|^{p_i} + \sqrt{1+|\nabla u_i|^{2p_i}}) dx,$$

$$+ \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{p_i} a_i(x) |u_i|^{p_i} \right) dx.$$

مشابه روش ارائه شده در مقاله [۹]، می‌توان ثابت کرد تابع فوق دارای مشتق گاتو به صورت زیر است:

$$\Phi'(u)(v) =$$

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \left( |\nabla u_i|^{p_i-2} \nabla u_i + \frac{|\nabla u_i|^{2p_i-2} \nabla u_i}{\sqrt{1+|\nabla u_i|^{2p_i}}} \right) \nabla v_i dx$$

$$+ \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n a_i(x) |u_i|^{p_i-2} u_i v_i dx$$

به‌ازای  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  و  $v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in X$  اینک قضیه اصلی را بیان و اثبات می‌کنیم.

$$\sigma = \frac{vr}{r \frac{-J(u_1)}{\Phi(u_1)} - \sup_{\Phi(x) < r} (-J(x))}.$$

برای استفاده از قضیه‌های فوق، فرض کنیم  $X$  حاصل ضرب دکارتی  $n$  فضای سوبولف  $W^{1,p_1}(\Omega)$ ،  $W^{1,p_2}(\Omega)$ ، ... و  $W^{1,p_n}(\Omega)$ ، یعنی  $X = W^{1,p_1}(\Omega) \times W^{1,p_2}(\Omega) \times \dots \times W^{1,p_n}(\Omega)$

باشد با نرم

$$\|(u_1, u_2, \dots, u_n)\| = \|u_1\| + \|u_2\| + \dots + \|u_n\|,$$

که

$$\|u_i\| = \left( \int_{\Omega} (|\nabla u_i(x)| + a_i(x) |u_i(x)|^{p_i}) dx \right)^{1/p_i}$$

به‌ازای  $1 \leq i \leq n$  است. فرض نماییم:

$$c = \max \left\{ \sup_{u_i \in W^{1,p_i}(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\max_{x \in \Omega} |u_i(x)|^{p_i}}{u_i^{p_i}}; 1 \leq i \leq n \right\}.$$

از آن‌جا که  $p_i > N$  به ازای  $1 \leq i \leq n$ ،  $c < \infty$  است. از گزاره ۱.۴ در مقاله [۵]، خواهیم داشت:

$$\sup_{u_i \in W^{1,p_i}(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\max_{x \in \Omega} |u_i(x)|^{p_i}}{u_i^{p_i}} > \frac{1}{\|a_i\|_1}$$

به ازای  $1 \leq i \leq n$  که  $\|a_i\|_1 = \int_{\Omega} |a_i(x)| dx$  و

$$\text{بنابراین } c \leq \frac{1}{\|a_i\|_1} \text{ به ازای } 1 \leq i \leq n.$$

$$\sup_{u_i \in W^{1,p_i}(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\max_{x \in \Omega} |u_i(x)|}{u_i} \leq 2^{\frac{p_i-1}{p_i}} \max \left\{ \left( \frac{1}{\|a_i\|_1} \right)^{\frac{1}{p_i}}; \right.$$

$$\left. \frac{\text{diam}(\Omega)}{N^{\frac{1}{p_i}}} \left( \frac{p_i-1}{p_i-N} \text{diam}(\Omega) \right)^{\frac{p_i-1}{p_i}} \frac{a_{i\infty}}{a_{i1}} \right\}$$

## قضیه ۳-۱

فرض کنیم تابع  $F: \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  به گونه‌ای است که به ازای  $(t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ ،  $F(\cdot, t_1, t_2, \dots, t_n)$  در  $\Omega$  پیوسته و به ازای  $x \in \Omega$ ،  $F(x, \cdot, \dots, \cdot)$  در  $\mathbb{R}^n$ ،  $C^1$  است. همچنین فرض کنیم عدد مثبت  $r$  و تابع  $u^* = (u_1^*, \dots, u_n^*) \in X$  موجود است به طوری که

$$\Phi(u^*) > r$$

ب) همچنین عدد مثبت  $\eta > 0$  موجود باشد به طوری که

$$\limsup_{(|t_1|, \dots, |t_n|) \rightarrow (+\infty, \dots, +\infty)} \frac{F(x, t_1, t_2, \dots, t_n)}{\frac{1}{p_1}|t_1|^{p_1} + \dots + \frac{1}{p_n}|t_n|^{p_n}} < \frac{1}{r\eta} \frac{1}{c \operatorname{diam}(\Omega)}$$

9

$$\frac{\int_{\Omega} F(x, u_1^*(x), \dots, u_n^*(x)) dx}{\Phi(u^*)}$$

$$\int_{\Omega} \max_{(x, t_1, t_2, \dots, t_n) \in K_1} F(x, t_1, t_2, \dots, t_n) dx > \frac{1}{\eta},$$

که

$$K_1 = \left\{ (t_1, t_2, \dots, t_n); \sum_{i=1}^n \frac{|t_i|^{p_i}}{p_i} \leq cr \right\}.$$

پ) به ازای  $x \in \Omega$ ، تقریباً همه جا،  $F(x, 0, \dots, 0) = 0$  آنگاه بازه باز ناتمامی  $A \subseteq (0, r\eta]$  و عدد مثبت  $q$  موجود است با خاصیت زیر:

به ازای  $\lambda \in A$  و تابع  $G: \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  که به ازای  $(t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$

$G(\cdot, t_1, t_2, \dots, t_n)$  در  $\Omega$  اندازه پذیر و به ازای  $x \in \Omega$ ،  $G(x, \cdot, \dots, \cdot)$  در  $\mathbb{R}^n$ ،  $C^1$  است،

$\delta > 0$  موجود است به طوری که به ازای  $\mu \in [0, \delta]$

مساله  $(N_{\lambda, \mu})$  دارای سه جواب ضعیف در  $X$  است که نرم آن‌ها از  $q$  کمتر است.

برهان: می‌خواهیم با استفاده از قضیه ۲-۱ موضوع را ثابت نماییم. تابع  $\Phi: X \rightarrow \mathbb{R}$  و فضای  $X$  را مانند قبل

در نظر می‌گیریم. تابع  $J: X \rightarrow \mathbb{R}$  را به ازای

$u \in X$  به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$J(u) := - \int_{\Omega} F(x, u_1(x), \dots, u_n(x)) dx.$$

تابع  $\Phi$  روی هر مجموعه کراندار از  $X$  کراندار، به طور پیوسته مشتق پذیر و نیم پیوسته ضعیف پایینی است که مشتق آن روی  $X^*$  وارون پیوسته دارد. چون به ازای

$1 \leq i \leq n$ ،  $p_i > N$  است، پس تابع

$J: X \rightarrow \mathbb{R}$ ، به طور پیوسته مشتق پذیر با مشتق

فشرده است. به ازای  $v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in X$  و

$u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in X$  داریم:

$$\Phi'(u)(v) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \left( |\nabla u_i|^{p_i-2} \nabla u_i \right) \nabla v_i dx$$

$$+ \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \left( \frac{|\nabla u_i|^{2p_i-2} \nabla u_i}{\sqrt{1+|\nabla u_i|^{2p_i}}} \right) \nabla v_i dx$$

$$+ \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n a_i(x) |u_i|^{p_i-2} u_i v_i dx$$

9

$$J'(u)(v) = - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n F_{u_i}(x, u_1, \dots, u_n) v_i dx.$$

با توجه به فرض (ب) دو ثابت  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  با شرط

$$0 < \alpha < \frac{1}{\beta}$$

$$c \operatorname{diam}(\Omega) F(x, t_1, t_2, \dots, t_n) \leq$$

$$\alpha \left( \frac{1}{p_1} |t_1|^{p_1} + \dots + \frac{1}{p_n} |t_n|^{p_n} \right) + \beta$$

به ازای  $x \in \Omega$  و  $t \in \mathbb{R}^n$ . در نظر بگیریم

$u = (u_1, \dots, u_n) \in X$ ، آن‌گاه

$$F(x, u_1(x), \dots, u_n(x)) \leq \frac{\beta}{c \operatorname{diam}(\Omega)}$$

$$+ \frac{\alpha}{c \operatorname{diam}(\Omega)} \left( \frac{1}{p_1} |u_1|^{p_1} + \dots + \frac{1}{p_n} |u_n|^{p_n} \right)$$

$$\int_{\Omega} F(x, u_1^*(x), \dots, u_n^*(x)) dx$$

$$r \frac{\int_{\Omega} F(x, u_1^*(x), \dots, u_n^*(x)) dx}{\Phi(u^*)} > \frac{1}{\eta} > 0,$$

خواهیم داشت:

$$\int_{\Omega} F(x, u_1^*(x), \dots, u_n^*(x)) dx > r \frac{\int_{\Omega} F(x, u_1^*(x), \dots, u_n^*(x)) dx}{\Phi(u^*)}$$

$$\int_{\Omega} \max_{(x, t_1, \dots, t_n) \in K_1} F(x, t_1, \dots, t_n) dx,$$

بنابراین

$$\sup_{u \in \Phi^{-1}((-\infty, r))} (-J(u)) < r \frac{\int_{\Omega} F(x, u_1^*(x), \dots, u_n^*(x)) dx}{\Phi(u^*)}$$

و در نتیجه

$$\sup_{u \in \Phi^{-1}((-\infty, r))} (-J(u)) < r \frac{-J(u^*)}{\Phi(u^*)}.$$

فرض (ب) را به یاد داریم که

$$\eta > \frac{1}{r \frac{-J(u^*)}{\Phi(u^*)} - \sup_{u \in \Phi^{-1}((-\infty, r))} (-J(u))}.$$

قرار می‌دهیم

$$v = \eta \left( r \frac{-J(u^*)}{\Phi(u^*)} - \sup_{u \in \Phi^{-1}((-\infty, r))} (-J(u)) \right),$$

که  $v > 1$  است. چون

$$\eta > \frac{1}{r \frac{-J(u^*)}{\Phi(u^*)} - \sup_{u \in \Phi^{-1}((-\infty, r))} (-J(u))}$$

خواهیم داشت:

برای هر  $x \in \Omega$  به ازای  $\lambda \in (0, r\eta]$  از آن‌جا که

$$\sup_{x \in \Omega} |u_i(x)|^{p_i} \leq c \|u_i\|^{p_i}$$

به ازای  $1 \leq i \leq n$  با توجه به روابط بالا خواهیم داشت:

$$\Phi(u) + \lambda J(u) \geq \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} |\nabla u_i|^{p_i} dx$$

$$+ \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} (\sqrt{1 + |\nabla u_i|^{2p_i}} + a_i |u_i|^{p_i}) dx$$

$$- \lambda \int_{\Omega} F(x, u_1(x), \dots, u_n(x)) dx.$$

$$\geq \sum_{i=1}^n \frac{\|u_i\|^{p_i}}{p_i} - \frac{\lambda \beta}{c}$$

$$- \frac{\alpha \lambda}{c \text{diam}(\Omega)} \int_{\Omega} \left( \frac{1}{p_1} |u_1|^{p_1} + \dots + \frac{1}{p_n} |u_n|^{p_n} \right) dx$$

$$= (1 - \alpha r \eta) \sum_{i=1}^n \frac{\|u_i\|^{p_i}}{p_i} - \frac{\lambda \eta \beta}{c},$$

به ازای  $u \in X$  و بنابراین

$$\lim_{\|u\| \rightarrow +\infty} (\Phi(u) + \lambda J(u)) = +\infty.$$

برای بررسی سایر فرض‌های قضیه ۱-۲ از گزاره ۱-۲ استفاده می‌کنیم. با توجه به فرض (الف) از این قضیه و با توجه به تعریف  $\Phi$ ، فرض (الف) از گزاره ۱-۲ را خواهیم داشت. به‌علاوه

$$\sup_{x \in \Omega} \sum_{i=1}^n \frac{|u_i(x)|^{p_i}}{p_i} \leq c \sum_{i=1}^n \frac{\|u_i\|^{p_i}}{p_i}$$

از طرفی روابط زیر را داریم:

$$\Phi^{-1}((-\infty, r)) = \{u = (u_1, \dots, u_n) \in X : \Phi(u) < r\}$$

$$\subseteq \left\{ (u_1, \dots, u_n) \in X : \sum_{i=1}^n \frac{\|u_i\|^{p_i}}{p_i} < r \right\}$$

$$\subseteq \left\{ (u_1, \dots, u_n) \in X : \sum_{i=1}^n \frac{|u_i|^{p_i}}{p_i} < cr, \forall x \in \Omega \right\},$$

حال چون

تابع  $\Phi(u) + \lambda J + \mu \Psi$  دقیقاً جواب‌های ضعیف مساله  $(N_{\lambda, \mu})$  است (با توجه به تعریف ۲-۱)، بنابراین مساله  $(N_{\lambda, \mu})$  حداقل سه جواب ضعیف در  $X$  است که نرم آن‌ها کمتر از  $q$  است. بنابراین حکم برقرار است. وقتی  $\mu = 0$  است، قضیه ۳-۱ را می‌توان به صورت زیر نوشت.

### قضیه ۳-۲

فرض کنیم تابع  $F: \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  به گونه‌ای است که به ازای  $(t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ ،  $F(\cdot, t_1, t_2, \dots, t_n)$  در  $\Omega$  پیوسته و به ازای  $x \in \Omega$ ،  $F(x, \cdot, \dots, \cdot)$  در  $\mathbb{R}^n$ ،  $C^1$  است. همچنین فرض کنیم عدد مثبت  $r$  و تابع  $u^* = (u_1^*, \dots, u_n^*) \in X$  موجود باشد به طوری که:

$$\Phi(u^*) > r \quad (\text{الف})$$

(ب) همچنین عدد مثبت  $\eta > 0$  موجود است به طوری که

$$\limsup_{(t_1, \dots, t_n) \rightarrow (+\infty, \dots, +\infty)} \frac{F(x, t_1, \dots, t_n)}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} |t_i|^{p_i}} < \frac{1}{r\eta c \text{diam}(\Omega)}$$

$$\int_{\Omega} F(x, u_1^*, \dots, u_n^*) dx > \frac{1}{\eta} - \int_{\Omega} \max_{(x, t_1, \dots, t_n) \in K_1} F(x, t_1, \dots, t_n) dx$$

$$K_1 = \left\{ (t_1, \dots, t_n); \sum_{i=1}^n \frac{|t_i|^{p_i}}{p_i} \leq cr \right\}.$$

(پ) به ازای  $x \in \Omega$ ، تقریباً همه جا،  $F(x, 0, \dots, 0) = 0$ . آن‌گاه بازه باز ناتمامی  $A \subseteq (0, r\eta]$  و عدد مثبت  $q$  موجود است که به ازای  $\lambda \in A$  مساله

$$\sup_{u \in \Phi^{-1}((-\infty, r))} (-J(u)) + \frac{1}{\eta} < r \frac{-J(u^*)}{\Phi(u^*)},$$

و در نتیجه با انتخاب  $v$  داریم:

$$\sup_{u \in \Phi^{-1}((-\infty, r))} (-J(u)) + \frac{r \frac{-J(u^*)}{\Phi(u^*)} - \sup_{\Phi(u) < r} (-J(u))}{v} < r \frac{-J(u^*)}{\Phi(u^*)}.$$

حال با توجه به گزاره ۲-۱ (با  $u_0 = 0$  و  $u_1 = u^*$ ) به ازای هر  $\rho \in \mathbb{R}$ ، صادق در

$$\sup_{u \in \Phi^{-1}((-\infty, r))} (-J(u)) + \frac{r \frac{-J(u^*)}{\Phi(u^*)} - \sup_{\Phi(u) < r} (-J(u))}{v} < \rho < r \frac{-J(u^*)}{\Phi(u^*)},$$

نتیجه می‌گیریم:

$$\sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \inf_{u \in X} (\Phi(u) + \lambda J(u) + \rho \lambda) < \inf_{u \in X} \sup_{[0, r\eta]} (\Phi(u) + \lambda J(u) + \rho \lambda).$$

به ازای هر تابع کاراتودری ثابت  $\rho: \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  قرار می‌دهیم:

$$\Psi(u) = - \int_{\Omega} G(x, u_1(x), \dots, u_n(x)) dx.$$

تابع  $\Psi$  به طور پیوسته مشتق پذیر است که مشتق آن در نقطه  $u \in X$  تابع  $\Psi'(u) \in X^*$  است و برابر با

$$\Psi'(u)(v) = - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n G_{u_i}(x, u_1, \dots, u_n) v_i dx$$

به ازای  $v = (v_1, \dots, v_n) \in X$  می‌باشد. همچنین تابع  $\Psi': X \rightarrow X^*$  عملگر فشرده است. پس همه شرط‌های قضیه ۲-۱ برقرار است و با توجه به اینکه نقاط بحرانی

$$\left\{ \begin{array}{l} -\operatorname{div} \left( \left( 1 + \frac{|\nabla u|^{p_1}}{\sqrt{1+|\nabla u|^{2p_1}}} \right) |\nabla u|^{p_1-2} \nabla u \right) \\ + a_1 |u|^{p_1-2} u = \lambda F_{u_1}(x, u_1, \dots, u_n), \text{ in } \Omega, \\ -\operatorname{div} \left( \left( 1 + \frac{|\nabla u|^{p_2}}{\sqrt{1+|\nabla u|^{2p_2}}} \right) |\nabla u|^{p_2-2} \nabla u \right) \\ + a_2 |u|^{p_2-2} u = \lambda F_{u_2}(x, u_1, \dots, u_n), \text{ in } \Omega, \\ \vdots \\ -\operatorname{div} \left( \left( 1 + \frac{|\nabla u|^{p_n}}{\sqrt{1+|\nabla u|^{2p_n}}} \right) |\nabla u|^{p_n-2} \nabla u \right) \\ + a_n |u|^{p_n-2} u = \lambda F_{u_n}(x, u_1, \dots, u_n), \text{ in } \Omega, \\ \frac{\partial u_i}{\partial \nu} = 0, \text{ for } 1 \leq i \leq n, \text{ on } \partial \Omega \end{array} \right.$$

دارای سه جواب ضعیف در  $X$  است که نرم آن‌ها از  $q$  کمتر است.

### سپاس‌گذاری:

این مقاله مستخرج از طرح به شماره ۶/۵۱۷ می‌باشد. نویسنده از دانشگاه گنبدکاووس جهت حمایت کمال قدردانی و تشکر را دارد.

### نتیجه‌گیری

در این مقاله وجود سه جواب برای یک دستگاه از معادلات دیفرانسیل ثابت شد. خواننده‌های محترم می‌توانند از ابزار مطرح در این پژوهش استفاده کرده و در خصوص وجود جواب برای مسائل مختلف مطالعه نمایند.



## فهرست منابع

- [9] M. Manuela Rodrigues, Multiplicity of solutions on a nonlinear eigenvalue problem for  $p(x)$ -Laplacian-like operators, *Mediterr. J. Math.*, 9, 211-223 (2012).
- [1] G. A. Afrouzi, A. Hadjian, Infinitely many solutions for a class of Dirichlet quasilinear elliptic systems, *J. Math. Anal. Appl.* 393, 265–272 (2012).
- [2] G. A. Afrouzi, A. Hadjian, N. B. Zographopoulos, Multiple nonsemitrivial solutions for a class of degenerate quasilinear elliptic systems, *Topological Methods in Nonlinear Analysis*, 45, 385–397 (2015).
- [3] G. A. Afrouzi, S. Heidarkhani, Existence of three solutions for a class of Dirichlet quasilinear elliptic systems involving the  $(p_1, \dots, p_n)$ -Laplacian, *Nonlinear Anal.* 70, No. 1, 135-143 (2009).
- [4] G. A. Afrouzi, S. Heidarkhani, D. O'Regan, Three solutions to class of Neumann doubly eigenvalue elliptic systems driven by a  $(p_1, \dots, p_n)$ -Laplacian, *Bull. Korean Math. Soc.* 47, No. 6, 1235-1250 (2010).
- [5] G. Anello, G. Cordaro, An existence theorem for the Neumann problem involving the  $p$ -Laplacian, *J. Convex Anal.* 10, 185-198 (2003).
- [6] G. Bonanno, Some remarks on a three critical points theorem, *Nonlinear Anal.*, 54, 651-665 (2003).
- [7] A. Kristaly, Existence of two non-trivial solutions a class of quasilinear elliptic variational systems on strip-like domains, *Proc. Edinb. Math. Soc.* 48, 465-477 (2005).
- [8] B. Ricceri, A three critical points theorem revisited, *Nonlinear Anal.*, 70, 3084-3089 (2009).

