

نتایج نقطه ثابت برای نگاشت‌های $\perp_{H\theta}$ - انقباض در فضاهای متریک متعامد

محدثه پاک نظر*

گروه آموزش ریاضی، دانشگاه فرهنگیان، تهران، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۶/۰۸/۱۸ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۹/۰۳/۰۶

چکیده

هدف اصلی در این پژوهش، گسترش بعضی از قضایای نقطه ثابت در فضاهای متریک متعامد است. در این راستا ابتدا نگاشت‌های جدیدی را در این فضاهای مهم و جالب بررسی می‌کنیم. ما مفاهیم جدید توابع H را معرفی می‌کنیم و به کمک آن تعریف نگاشت‌های $\perp_{H\theta}$ -انقباض را ارائه می‌دهیم و سپس بعضی قضایای نقطه ثابت را برای چنین نگاشت‌هایی در فضاهای متریک متعامد پایه‌گذاری و اثبات می‌کنیم. سپس به کمک مثال‌های تابع H نتایج جدیدی را برای این قضایای نقاط ثابت بدست می‌آوریم. هم‌چنین در این مقاله پژوهشی کاربردهایی از نتایج بدست آمده‌مان ارائه خواهیم کرد. به عنوان اولین کاربرد نشان خواهیم داد که می‌توان با استفاده از نتایج نقاط ثابت در فضاهای متریک متعامد، نتایج نقطه ثابت زیادی در فضای متریک مجهز به گراف G بدست آورد. بدین منظور چند تعریف جدید و قضیه ارائه خواهیم کرد. هم‌چنین به عنوان کاربردی دیگر نشان خواهیم داد که می‌توان با استفاده از نتایج نقاط ثابت در فضاهای متریک متعامد، نتایج نقطه ثابت زیادی در فضای متریک مرتب جزئی بدست آورد. در واقع در این مقاله علاوه بر توسیع برخی از قضایای نقطه ثابت در فضاهای متریک متعامد نشان خواهیم داد که نتایجی که بدست آورده‌ایم بسیاری از نتایج نقاط ثابت را متحد می‌کنند.

واژه‌های کلیدی: فضای متریک متعامد، نگاشت‌های $\perp_{H\theta}$ -انقباض، نقطه ثابت.

۱- مقدمه

اخیرا اسحاقی و همکاران [۲۹] مفهوم مجموعه‌های متعامد در یک مجموعه دلخواه را ارائه دادند و سپس مفاهیم فضای متریک متعامد، فضای متریک O -کامل، \perp -پیوسته و نگاشت‌های \perp -حافظ را تعریف کردند و اصل انقباض باناخ را به کمک این مفاهیم تعمیم دادند (برای اطلاع بیشتر به منابع [۳۰، ۳۱] مراجعه فرمایید). از طرف دیگر مفهوم θ -انقباض‌ها توسط جلیلی و صامت [۲۰] ارائه شدند که تعمیم جالبی از اصل انقباض باناخ است.

حال به ارائه تعاریف و ویژگی‌هایی می‌پردازیم که در این مقاله از آنها استفاده خواهیم کرد.

اگر (X, d) یک فضای متریک و (X, \leq) یک مجموعه مرتب جزئی باشد، در آن صورت گوییم X یک فضای متریک مرتب جزئی است. دو عنصر x و y از X را مقایسه‌پذیر گوییم هرگاه $x \leq y$ یا $y \leq x$. نگاشت $T: X \rightarrow X$ را صعودی نامیم هرگاه $x \leq Tx$ نتیجه دهد $Tx \leq Ty$.

تعریف ۱-۱: فرض کنید (X, d, \leq) یک فضای متریک مرتب جزئی و $T: X \rightarrow X$ یک نگاشت باشد. گوییم T یک نگاشت \leq -پیوسته است هرگاه برای هر دنباله صعودی دلخواه مانند $\{x_n\}$ که به x همگرا است داشته باشیم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n = Tx.$$

تعریف ۱-۲: فرض کنید (X, d) یک فضای متریک مرتب جزئی باشد. گوییم X ، \leq -کامل است هرگاه هر دنباله صعودی کوشی دلخواه در آن همگرا باشد.

همانطور که در [۲۷] آورده شده است، فرض کنید (X, d) یک فضای متریک باشد و قطر ضرب دکارتی $X \times X$ را با Δ مشخص شده باشد. گراف جهتدار G را در نظر بگیرید که $V(G)$ مشخص کننده رئوس و $E(G)$ مشخص کننده یال‌ها در مجموعه X است، و همچنین $E(G)$ شامل همه گره‌ها می‌باشد. یعنی $\Delta \subseteq E(G)$. ما فرض می‌کنیم که $E(G)$ یال‌های موازی نداشته باشد. پس گراف G را با

فرض کنید X یک مجموعه ناتهی و $T: X \rightarrow X$ یک خود نگاشت باشد. حال اگر $x \in X$ وجود داشته باشد بطوری که $Tx = x$ ، آنگاه x یک نقطه ثابت T است. مجموعه همه نقاط ثابت T را با $Fix(T)$ مشخص می‌کنیم. در سال ۱۹۲۲، باناخ [۲] با معرفی نگاشت‌های انقباض نشان داد که چنین نگاشت‌های در فضای متریک کامل دارای نقطه ثابت هستند. بعدها این نتیجه باناخ به اصل انقباض باناخ معروف شد و محققین مختلف [۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹] به تعمیم و توسعه اصل انقباض باناخ پرداخته و با ایجاد شرایطی در دامنه تعریف یا شرایط انقباض نگاشت، نتایج مختلفی را در نظریه نقطه ثابت کردند. نظریه نقطه ثابت به ابزار مفید و مهمی برای شاخه‌های متفاوت آنالیز تبدیل شد، بطوری که بررسی وجود و یکتایی نقاط ثابت نگاشت‌هایی که در شرایط انقباض گوناگونی صدق می‌کنند کانون توجه ریاضی‌دانان بی‌شماری بوده است [۱، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵]. همچنین این نظریه به عنوان یک ابزار ضروری در آنالیز غیر خطی مورد استفاده قرار می‌گیرد. از جمله کاربردهای می‌توان به وجود مفاهیم جواب در نظریه بازیو اقتصاد، وجود جواب معادلات انتگرالی غیر خطی، اثبات همگرایی الگوریتم‌ها (پایداری روش نیوتن، روش تکرار پیکارد و...)، وجود جواب معادلات دیفرانسیلی معمولی و جزئی، بهینه‌سازی و سیستم کنترل غیرخطی، حل معادلات دیفرانسیلی غیرخطی در فضاهای باناخ، استفاده در درخت‌های متریک که خود زمینه تحقیقات وسیعی در نظریه گروها، گراف‌ها، علوم کامپیوتر می‌باشد اشاره نمود (برای اطلاع بیشتر در مورد کاربردهای نظریه نقطه ثابت به منابع [۱۶، ۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۰] مراجعه فرمایید).

در سال ۲۰۰۴، رن و ریورینگز در [۲۱] با بررسی انقباض‌ها در فضاهای متریک مرتب جزئی تحقیقات جدیدی را آغاز کردند. یک سال بعد نی‌یتو و رودریگز در [۲۲] قضایای رن و ریورینگز را اصلاح کردند و به نتایج قوی‌تری دست یافتند. سه سال بعد آگاروال و همکارانش در [۲۳] نتایج رن و ریورینگز را برای ϕ -انقباض‌ها توسعه دادند (برای اطلاع بیشتر به منابع [۲۴، ۲۵، ۲۶، ۲۷، ۲۸] مراجعه فرمایید).

O -مجموعه است) هرگاه $x \in X$ ای وجود داشته باشد بطوری که برای هر $x \in X$ داشته باشیم $x \perp x$ یا $x \perp x$. ما O -مجموعه را با (X, \perp) نشان می‌دهیم. همچنین فرض کنید (X, \perp) یک O -مجموعه و $\{x_n\}$ یک دنباله در آن باشد. در اینصورت دنباله $\{x_n\}$ یک O -دنباله است هرگاه برای هر $n \in \mathbb{N}$ داشته باشیم $x_n \perp x_{n+1}$ یا $x_{n+1} \perp x_n$.

مثال ۱-۱: فرض کنید (X, d) یک فضای متریک و $T: X \rightarrow X$ یک عملگر پیکارد باشد (یعنی $x^* \in X$ ای وجود دارد، بطوریکه برای هر $y \in X$ ، $\lim_{n \rightarrow \infty} T^n(y) = x^*$). رابطه باینری \perp را بصورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$x \perp y \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} d(x, T^n(y)) = 0.$$

بنابراین (X, \perp) یک O -مجموعه است.

مثال ۲-۱: فرض کنید $X = [0, \infty)$. رابطه باینری \perp را بصورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$x \perp y \Leftrightarrow xy \in \{x, y\}.$$

سپس با قرار دادن $x = 0$ یا $x = 1$ ، (X, \perp) یک O -مجموعه است.

مثال ۳-۱: فرض کنید $M(n)$ مجموعه همه ماتریس‌ها و Q یک ماتریس معین مثبت در آن باشد. رابطه باینری \perp را بصورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$A \perp B \Leftrightarrow \exists X \in M(n); AX = B.$$

به وضوح برای هر $B \in M(n)$ ، $I \perp B$ ، $B \perp O$ و $Q \perp B$ یعنی (X, \perp) یک O -مجموعه است.

تعریف ۷-۱: [۱۸] فرض کنید (X, d) یک فضای متریک باشد. آنگاه:

$(V(G), E(G))$ مشخص می‌کنیم. بعلاوه ما گراف G را گراف وزن دار در نظر می‌گیریم (صفحه ۳۰۹ از [۳۳] را ببینید) که در آن برای به هر یال فاصله بین رئوس آن را به عنوان وزن اختصاص می‌دهیم. اگر X و Y دو راس در گراف G باشند آنگاه یک گذر از X به Y به طول $N \in \mathbb{N}$ دنباله $\{x_i\}_{i=1}^N$ از $N+1$ راس است که $x = x_1$ ، $x_N = y$ و $(x_{i-1}, x_i) \in E(G)$ ، $(i = 1, 2, \dots, N)$.

تعریف ۳-۱: فرض کنید (X, d) یک فضای متریک باشد که به گراف G مجهز شده است. گوییم نگاشت $T: X \rightarrow X$ یک G -انقباض است هرگاه شرایط زیر برقرار باشند.

الف- T یاله‌های G را حفظ کند. یعنی

$$(x, y) \in E(G) \Rightarrow (Tx, Ty) \in E(G)$$

ب- به ازای هر $x, y \in X$ ، $\alpha \in (0, 1)$ ای وجود داشته باشد بطوریکه

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y)$$

تعریف ۴-۱: فرض کنید $T: X \rightarrow X$ یک نگاشت باشد و $\{x_i\}_{i=1}^N$ یک دنباله دلخواهی باشد که به X همگرا است و برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $(x_n, x_{n+1}) \in E(G)$. گوییم T یک نگاشت G -پیوسته است هرگاه

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n = Tx$$

تعریف ۵-۱: فرض کنید (X, d) یک فضای متریک باشد که به گراف G مجهز شده است. گوییم X ، G -کامل است هرگاه هر دنباله کوشی دلخواه مانند $\{x_n\}$ که برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $(x_n, x_{n+1}) \in E(G)$ همگرا باشد.

تعریف ۶-۱: [۱۸] فرض کنید X یک مجموعه ناتهی و $\perp \subseteq X \times X$ یک رابطه باینری باشد. گوییم X یک مجموعه متعامد است (یا بصورت مختصر،

نگاشت‌های $\perp_{H\theta}$ - انقباض را معرفی می‌کنیم و بعضی قضایای نقطه ثابت را برای چنین نگاشت‌هایی در فضاهای متریک متعامد پایه‌گذاری و اثبات می‌کنیم. سپس نتایجی را برای این قضایای نقاط ثابت بدست می‌آوریم. همچنین، نشان خواهیم داد که می‌توان با استفاده از نتایج نقاط ثابت در فضاهای متریک متعامد، نتایج نقطه ثابت زیادی در فضای متریک مجهز به گراف G بدست آورد. بعلاوه، نشان خواهیم داد که می‌توان با استفاده از نتایج اصلی، نتایج نقطه ثابت زیادی در فضای متریک مرتب جزئی بدست آورد. این نتایج بدست آمده بسیاری از نتایج نقاط ثابت را متحد می‌کنند.

۲- نتایج اصلی

این بخش را با تعاریف زیر شروع می‌کنیم:

تعریف ۱-۲: فرض کنید $H: [1, \infty)^1 \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع باشد که در همه متغیرهایش پیوسته است و در شرایط زیر صدق می‌کند:

(H۱) اگر برای $u > 1$ و $v > 1$ ، $H(u, v, v, u, uv, 1) \leq 0$ وجود دارد بطوری که $u \leq v^k$

(H۲) برای هر $u > 1$ ، $H(u, 1, u, u, u, 1) > 0$

(H۳) تابع H در همه متغیرهایش پیوسته است،

(H۴) تابع H در پنجمین متغیرش نزولی است.

مثال ۱-۲: اگر $H(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6) = t_1 - t_2^k$ که در آن $k \in (0, 1)$ است، آنگاه H در شرایط (H۱) - (H۴) صدق می‌کند.

مثال ۲-۲: اگر

$$H(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6) = t_1 - \left[\max \left\{ t_2, (t_3 t_4)^{\frac{1}{2}}, (t_5 t_6)^{\frac{1}{2}} \right\} \right]^k$$

که در آن $k \in (0, 1)$ است، آنگاه H در شرایط (H۱) - (H۴) صدق می‌کند.

(۱) X یک فضای متریک متعامد است هرگاه مجموعه (X, \perp) یک مجموعه متعامد باشد،

(۲) نگاشت $T: X \rightarrow X$ در نقطه $x \in X$ ، \perp - پیوسته است هرگاه برای هر O -دنباله $\{x_n\}$ که $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ داشته باشیم $\lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n = Tx$ همچنین T, \perp - پیوسته است هرگاه برای هر $x \in X$ ، \perp - پیوسته باشد،

(۳) نگاشت T, \perp - حافظ است هرگاه برای $x, y \in X$ که $x \perp y$ داشته باشیم $Tx \perp Ty$ ،

(۴) فضای متریک X, O - کامل است هرگاه هر O -دنباله کوشی همگرا باشد.

مثال ۱-۴: فرض کنید $X = [0, 1)$ و متریک روی X ، متریک اقلیدسی باشد. رابطه باینری \perp و تابع $f: X \rightarrow X$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$x \perp y \Leftrightarrow xy \in \{x, y\}$$

$$fx = \begin{cases} \frac{x}{2}, & x \in Q \cap X \\ 0, & x \in Q^c \cap X \end{cases}$$

بنابراین f یک تابع \perp - پیوسته روی X می‌باشد.

تعریف ۱-۸: [۲۰] مجموعه همه توابع $\theta: (0, \infty) \rightarrow (1, \infty)$ که در شرایط زیر صدق می‌کنند را با Δ_θ نشان می‌دهیم.

(θ۱) θ صعودی است،

(θ۲) برای هر دنباله $\{a_n\} \subset (0, \infty)$ ، $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ اگر و فقط اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta(a_n) = 1$

(θ۳) اعداد حقیقی $r \in (0, 1)$ و $l \in (0, 1)$ وجود دارند بطوری که $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\theta(t) - 1}{t^r} = l$

در این مقاله، ما با الهام گرفتن از مفاهیم و تعاریف بالا، به بررسی نگاشت‌های جدید در فضاهای متریک متعامد خواهیم پرداخت. در واقع، در بخش بعدی ابتدا مفهوم تابع H را تعریف می‌کنیم و سپس به کمک این تابع مفهوم

دارد. بنابراین برای هر $n \in \mathbb{N}$ فرض می‌کنیم $x_n \neq x_{n+1}$ لذا برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $d(x_n, x_{n+1}) > 0$. حال چون T یک نگاشت انقباضی $\perp_{H\theta}$ - انقباض است، بنابراین از خاصیت نزولی بودن H در متغیر پنجمش، خاصیت $\theta(t+s) \leq \theta(t)\theta(s)$ و نامساوی مثلثی خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} & H(\theta(d(x_n, x_{n+1})), \theta(d(x_{n-1}, x_n))), \\ & \theta(d(x_{n-1}, x_n)), \theta(d(x_n, x_{n+1})), \\ & [\theta(d(x_n, x_{n+1}))][\theta(d(x_{n-1}, x_n))], 1) \\ & \leq H(\theta(d(x_n, x_{n+1})), \theta(d(x_{n-1}, x_n))), \\ & \theta(d(x_{n-1}, x_n)), \theta(d(x_n, x_{n+1})), \\ & \theta(d(x_{n-1}, x_n)) + \theta(d(x_n, x_{n+1})), 1) \\ & \leq H(\theta(d(x_n, x_{n+1})), \theta(d(x_{n-1}, x_n))), \\ & \theta(d(x_{n-1}, x_n)), \theta(d(x_n, x_{n+1})), \\ & \theta(d(x_{n-1}, x_{n+1})), 1) \\ & \leq H(\theta(d(x_n, x_{n+1})), \theta(d(x_{n-1}, x_n))), \\ & \theta(d(x_{n-1}, x_n)), \theta(d(x_n, x_{n+1})), \\ & \theta(d(x_{n-1}, x_{n+1})), \theta(d(x_n, x_{n+1}))) \\ & = H(\theta(d(Tx_{n-1}, Tx_n)), \theta(d(x_{n-1}, x_n))), \\ & \theta(d(x_{n-1}, Tx_{n-1})), \theta(d(x_n, Tx_n)), \\ & \theta(d(x_{n-1}, Tx_n)), \theta(d(x_n, Tx_{n-1}))) \\ & \leq 1. \end{aligned}$$

لذا بنا بر (H_1) ، $k \in (0, 1)$ ای وجود دارد بطوری که $\theta(d(x_n, x_{n+1})) \leq [\theta(d(x_{n-1}, x_n))]^k$

ازاینرو

$$\begin{aligned} 1 < \theta(d(x_n, x_{n+1})) & \leq [\theta(d(x_{n-1}, x_n))]^k \\ & \leq [\theta(d(x_{n-1}, x_n))]^{k^2} \\ & \leq \dots \leq [\theta(d(x, x))]^{k^n} \end{aligned} \quad (۱.۲)$$

بنابراین با قرار دادن $n \rightarrow \infty$ در (۱.۲) خواهیم داشت $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta(d(x_n, x_{n+1})) = 1$.

از طرف دیگر $\theta \in \Delta_\theta$ ، پس

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0$$

حال آماده‌ایم نگاشت $\perp_{H\theta}$ - انقباض را بصورت زیر تعریف کنیم.

تعریف ۲-۲: فرض کنید (X, d, \perp) فضای متریک متعامد و T یک خود نگاشت روی X باشد.

همچنین فرض کنید $\mathbb{R} \rightarrow [1, \infty)^1 : H$ یک تابع باشد. گوییم T یک نگاشت $\perp_{H\theta}$ - انقباض است هرگاه برای هر $x, y \in X$ ای که $x \perp y$ و $d(Tx, Ty) > 0$ ، $\theta \in \Delta_\theta$ وجود داشته باشد بطوریکه $H(\theta(d(Tx, Ty)), \theta(d(x, y))), \theta(d(x, Tx)), \theta(d(y, Ty)), \theta(d(x, Ty)), \theta(d(y, Tx))) \leq 1$

قضیه ۲-۱: فرض کنید (X, d, \perp) یک فضای متریک O - کامل باشد. همچنین فرض کنید T یک خود نگاشت روی X باشد بطوری که در شرایط زیر صدق کند.

- (i) یک نگاشت \perp - حافظ است،
 - (ii) یک نگاشت $\perp_{H\theta}$ - انقباض است بطوری که برای هر $s > 0$ و $t > 0$ ، $\theta(t+s) \leq \theta(t)\theta(s)$ و همچنین H در شرایط (H_1) و (H_2) صدق می‌کند،
 - (iii) یک نگاشت \perp - پیوسته است.
- در اینصورت T یک نقطه ثابت دارد. بعلاوه اگر برای هر $x, y \in \text{Fix}(T)$ ، $x \perp y$ و برای هر $u > 1$ ، $H(u, u, 1, u, u) > 1$ ، آنگاه نقطه ثابت T منحصر بفرد است.

اثبات: از آنجا که یک مجموعه متعامد است، بنابراین $x \in X$ ای وجود داشته دارد بطوری که برای هر $x \in X$ ، $x \perp x$ یا $x \perp Tx$ برقرار است. پس $x \perp Tx$ یا $Tx \perp x$. دنباله $\{x_n\}$ را بصورت $x_n = T^n x_1 = Tx_{n-1}$ تعریف می‌کنیم. چون T یک نگاشت \perp - حافظ است بنابراین $x_n \perp Tx_n = x_{n+1}$ یا $x_n \perp Tx_n = x_{n+1}$ با ادامه دادن این فرایند در می‌یابیم که برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $x_n \perp x_{n+1}$ یا $x_n \perp x_{n+1}$ اگر $n \in \mathbb{N}$ ای وجود داشته باشد بطوری که $x_n = x_{n+1}$ ، آنگاه به وضوح T یک نقطه ثابت

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x^*) = 0.$$

از \perp پیوستگی T داریم

$$d(x^*, Tx^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_{n+1}, Tx^*)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} d(Tx_n, Tx^*) = 0.$$

یعنی $x^* = Tx^*$ پس T دارای یک نقطه ثابت است. حال می‌خواهیم ثابت کنیم نقطه ثابت T منحصر به فرد است. برای این کار فرض کنید x^* و y^* دو نقطه ثابت T باشند بطوری که $x^* \neq y^*$. چون $x^*, y^* \in \text{Fix}(T)$ لذا نتیجه می‌گیریم که $x^* \perp y^*$ بنا بر این از (ii) داریم

$$H(\theta(d(x^*, y^*)), \theta(d(x^*, y^*)), 1, \\ 1, \theta(d(x^*, y^*)), \theta(d(x^*, y^*))) \\ \leq H(\theta(d(x^*, y^*)), \theta(d(x^*, y^*)), 1, \\ 1, \theta(d(x^*, y^*)), \theta(d(x^*, y^*))) \\ = H(\theta(d(x^*, y^*)), \theta(d(x^*, y^*)), \\ \theta(d(x^*, x^*)), \theta(d(y^*, y^*)), \\ \theta(d(x^*, y^*)), \theta(d(y^*, x^*))) \\ = H(\theta(d(Tx^*, Ty^*)), \theta(d(x^*, y^*)), \\ \theta(d(x^*, Tx^*)), \theta(d(y^*, Ty^*)), \\ \theta(d(x^*, Ty^*)), \theta(d(y^*, Tx^*))) \\ \leq 1.$$

از آنجا که $\theta(d(x^*, y^*)) > 1$ ، لذا از فرض قضیه و عبارت بالا خواهیم داشت

$$1 < F(\theta(d(x^*, y^*)), \theta(d(x^*, y^*)), 1, \\ 1, \theta(d(x^*, y^*)), \theta(d(x^*, y^*))) \leq 1,$$

که این یک تناقض است. پس $x^* = y^*$ یعنی نقطه ثابت T منحصر بفرده است. ابتدا نگاهت انقباض زیر را تعریف می‌کنیم و سپس با بکار بردن مثال ۱-۲ و قضیه ۱-۲ یک نتیجه برای چنین نگاهت‌ها بدست می‌آوریم.

در نتیجه اعداد $r \in (0, 1)$ و $l \in (0, \infty]$ وجود دارند بطوری که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\theta(d(x_n, x_{n+1})) - 1}{[d(x_n, x_{n+1})]^r} = l.$$

فرض کنید $B^{-1} \in (0, l)$. بنا بر تعریف حد $n, n \in \mathbb{N}$ وجود دارد بطوری که برای هر $n \geq n$ ،

$$\frac{\theta(d(x_n, x_{n+1})) - 1}{[d(x_n, x_{n+1})]^r} \geq B^{-1},$$

ولذا

$$n[d(x_n, x_{n+1})]^r \leq nB[\theta(d(x_n, x_{n+1})) - 1].$$

سپس از (۱.۲) که برای هر $n \geq n$ ، خواهیم داشت

$$n[d(x_n, x_{n+1})]^r \leq nB[(\theta(d(x_n, x_{n+1})))^{k^n} - 1].$$

بنابراین با حدگیری از عبارت بالا خواهیم داشت

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n[d(x_n, x_{n+1})]^r = 0.$$

در نتیجه $N \in \mathbb{N}$ وجود دارد بطوری که برای هر $n \geq N$ ،

$$n[d(x_n, x_{n+1})]^r \leq 1.$$

آنگاه برای هر $n \geq N$ و هر $\lambda > 0$ خواهیم داشت

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{1}{n^\lambda}.$$

هم اکنون برای $m > n \geq N$ می‌توان نوشت

$$d(x_n, x_m) \leq \sum_{i=n}^{m-1} d(x_i, x_{i+1}) \leq \sum_{i=n}^{m-1} \frac{1}{i^\lambda}.$$

از آنجا که $r \in (0, 1)$ ، لذا سری $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^r}$ همگرا است که

این یعنی دنباله $\{x_n\}$ کوشی است. چون X کامل است بنا بر این $x^* \in X_\omega$ وجود دارد که

(iii) اگر $\{x_n\}$ یک O -دنباله در X باشد بطوری که $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in X$ ، آنگاه برای هر $x_n \perp x, n \in \mathbb{N}$ در اینصورت T یک نقطه ثابت دارد. بعلاوه اگر برای هر $x, y \in \text{Fix}(T)$ داشته باشیم $x \perp y$ و برای هر $u > 1, H(u, u, 1, u, u) > 1$ ، آنگاه نقطه ثابت T منحصر بفرد است.

اثبات: از آنجا که (X, \perp) یک مجموعه متعامد است، بنابراین $x \in X$ ای وجود داشته دارد بطوری که برای هر $x \in X$ یا $x \perp Tx$ یا $x \perp x$ برقرار است. پس $Tx \perp x$ یا $x \perp Tx$. همانند اثبات قضیه ۱، ۲ - O دنباله $\{x_n\}$ را در نقطه آغازین x_0 طوری بدست می‌آوریم که کوشی باشد و به نقطه x^* ، همگرا باشد. از (iii) برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم، $x_n \perp x^*$.

ابتدا فرض کنید برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، k_n هایی وجود دارد بطوری که $d(x_{k_n+1}, Tx^*) = 0$ و $k_n > k_{n-1}$ که در آن $k_0 = 1$ توجه داشته باشید که

$$d(x^*, Tx^*) \leq d(x^*, x_{k_n+1}) + d(x_{k_n+1}, Tx^*),$$

لذا بدست می‌آوریم $d(x^*, Tx^*) = 0$. یعنی x^* نقطه ثابت T است. پس برای هر $n \in \mathbb{N}$ فرض می‌کنیم $d(x_{n+1}, Tx^*) > 0$.

پس از (ii) بدست می‌آید

$$\begin{aligned} & H(\theta(d(x_{n+1}, Tx^*)), \theta(d(x_n, x^*))), \\ & \theta(d(x_n, Tx^*)), \theta(d(x^*, Tx^*)), \\ & \theta(d(x_n, Tx^*)), \theta(d(x^*, x_{n+1}))) \\ & = H(\theta(d(Tx_n, Tx^*)), \theta(d(x_n, x^*))), \\ & \theta(d(x_n, Tx^*)), \theta(d(x^*, Tx^*)), \\ & \theta(d(x_n, Tx^*)), \theta(d(x^*, Tx_n))) \\ & \leq 1. \end{aligned}$$

با حدگیری از عبارت بالا و بکار بردن پیوستگی H و θ بدست می‌آید

$$\begin{aligned} & H(\theta(d(x^*, Tx^*)), 1, \theta(d(x^*, Tx^*))), \\ & \theta(d(x^*, Tx^*)), \theta(d(x^*, Tx^*)), 1) \leq 1. \end{aligned}$$

تعریف ۲-۳: فرض کنید (X, d, \perp) فضای متریک متعامد و T یک خود نگاشت روی X باشد. همچنین فرض کنید $\mathbb{R} \rightarrow [1, \infty)^1$ یک تابع باشد. گوییم T یک نگاشت $\perp_{H\theta}$ -انقباض است هرگاه برای هر $x, y \in X$ که $x \perp y$ و $d(Tx, Ty) > 0$ ، $k \in (0, 1)$ ای وجود داشته باشد بطوریکه

$$\begin{aligned} & \theta(d(Tx, Ty)) \\ & \leq [\max\{\theta(d(x, y)), \\ & [\theta(d(x, Tx))\theta(d(y, Ty))]\frac{1}{k}, \\ & [\theta(d(x, Ty))\theta(d(y, Tx))]\frac{1}{k}\}^k \end{aligned}$$

نتیجه ۲-۱: فرض کنید (X, d, \perp) یک فضای متریک O -کامل باشد. همچنین فرض کنید T یک خود نگاشت روی X باشد بطوری که در شرایط زیر صدق کند.

- (i) T یک نگاشت \perp - حافظ است،
- (ii) T یک نگاشت $\perp_{H\theta}$ -انقباض است بطوری که برای هر $s > 0$ و $t > 0$ ، $\theta(t+s) \leq \theta(t)\theta(s)$.
- (iii) T یک نگاشت \perp - پیوسته است.

در اینصورت T یک نقطه ثابت دارد. بعلاوه اگر برای هر $x, y \in \text{Fix}(T)$ ، آنگاه نقطه ثابت T منحصر بفرد است. قضیه زیر را برای حالتی از $\perp_{H\theta}$ -انقباضها بدست می‌آوریم که \perp - پیوسته نستند. اگر $\perp_{H\theta}$ -انقباضها \perp - پیوسته نباشند می‌توان قضیه زیر را برای آنها بدست آورد.

قضیه ۲-۲: فرض کنید (X, d, \perp) یک فضای متریک O -کامل باشد. همچنین فرض کنید T یک خود نگاشت روی X باشد بطوری که در شرایط زیر صدق کند.

- (i) T یک نگاشت \perp - حافظ است،
- (ii) T یک نگاشت $\perp_{H\theta}$ -انقباض باشد که پیوسته است، برای هر $s > 0$ و $t > 0$ ، $\theta(t+s) \leq \theta(t)\theta(s)$ و شرایط $(H\epsilon)$ - $(H1)$ برقرارند،

$$\begin{aligned} & \theta(d(Tx, Ty)) \\ & \leq [\max\{\theta(d(x, y)), \\ & [\theta(d(x, Tx))\theta(d(y, Ty))]\}^{\frac{1}{2}}, \\ & [\theta(d(x, Ty))\theta(d(y, Tx))]\}^{\frac{1}{2}}]^k. \end{aligned}$$

قضیه ۳-۱: فرض کنید (X, d) یک فضای متریک باشد که به گراف G مجهز است و G -کامل نیز می‌باشد. همچنین فرض کنید T یک خود نگاشت روی X باشد و شرایط زیر نیز برقرارند.

- (i) $x \in X$ ای وجود دارد بطوری که برای هر $(x, x) \in E(G)$, $x \in X$
- (ii) یک نگاشت G -پیوسته است،
- (iii) $(x, y) \in E(G) \Rightarrow (Tx, Ty) \in E(G)$
- (v) یک نگاشت G_θ -انقباض است که برای هر $\theta(t+s) \leq \theta(t)\theta(s)$, $t, s \geq 0$.

در اینصورت T یک نقطه ثابت دارد. بعلاوه اگر برای هر $x, y \in \text{Fix}(T)$ داشته باشیم $(x, y) \in E(G)$ ، آنگاه نقطه ثابت منحصر بفرد است.

اثبات: رابطه باینری $\perp \in X \times X$ را به اینصورت تعریف می‌کنیم که، $x \perp y$ اگر $(x, y) \in E(G)$. پس بنابر (i)، $x \in X$ وجود دارد بطوری که برای هر $x \in X$ ، $(x, x) \in E(G)$. یعنی برای هر $x \in X$ ، $x \perp x$. بنابراین (X, d, \perp) یک فضای متریک متعامد است. همچنین به راحتی می‌توان بررسی کرد که (X, d, \perp) یک فضای متریک O -کامل است (چون فضای متریک (X, d) ، G -کامل است). بعلاوه از G -پیوستگی T می‌توان نتیجه گرفت که T یک نگاشت \perp -پیوسته است.

اگر $x \perp y$ آنگاه $(x, y) \in E(G)$. از طرف دیگر از (iii) داریم $(Tx, Ty) \in E(G)$. یعنی $Tx \perp Ty$. در نتیجه T یک نگاشت \perp -حافظ است.

چون T یک نگاشت G_θ -انقباض است بنابراین برای هر $x, y \in X$ ای که $(x, y) \in E(G)$ و $k \in (0, 1)$ ، $d(Tx, Ty) > 0$ وجود دارد که

$$\begin{aligned} & \text{حال اگر } \theta(d(x^*, Tx^*)) > 1 \text{ آنگاه بنابر (H۲)،} \\ & H(\theta(d(x^*, Tx^*)), 1, \theta(d(x^*, Tx^*)), \\ & \theta(d(x^*, Tx^*)), \theta(d(x^*, Tx^*)), 1) > 1, \end{aligned}$$

که این یک تناقض است. پس $\theta(d(x^*, Tx^*)) = 1$. یعنی $d(x^*, Tx^*) = 0$. بنابراین T دارای یک نقطه ثابت است. برای اثبات منحصر به فردی نقطه ثابت T همانند قضیه ۲-۱ عمل می‌کنیم.

نتیجه ۲-۲: فرض کنید (X, d, \perp) یک فضای متریک O -کامل باشد. همچنین فرض کنید T یک خود نگاشت روی X باشد بطوری که در شرایط زیر صدق کند:

- (i) T یک نگاشت \perp -حافظ است،
- (ii) T یک نگاشت \perp_θ -انقباض باشد که θ پیوسته است و برای هر $t > 0$ و $s > 0$ ، $\theta(t+s) \leq \theta(t)\theta(s)$
- (iii) اگر $\{x_n\}$ یک O -دنباله در X باشد بطوری که $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in X$ ، آنگاه برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $x_n \perp x$.

در اینصورت T یک نقطه ثابت دارد. بعلاوه اگر برای هر $x, y \in \text{Fix}(T)$ داشته باشیم $x \perp y$ ، آنگاه نقطه ثابت T منحصر بفرد است.

۳- نتایج نقاط ثابت در فضاهای متریک که به یک گراف مجهز شده است

در این بخش نشان خواهیم داد که با استفاده از نتایج ما، نتایج نقطه ثابت زیادی در فضای متریک مجهز به گراف G بدست می‌آیند.

تعریف ۳-۱: فرض کنید (X, d) یک فضای متریک باشد که به گراف G مجهز است و T نیز یک خود نگاشت روی X باشد. گوئیم T یک نگاشت G_θ -انقباض است هرگاه برای هر $x, y \in X$ ای که $(x, y) \in E(G)$ و $k \in (0, 1)$ ، $d(Tx, Ty) > 0$ وجود داشته باشد بطوری که

آنگاه نقطه ثابت منحصر بفرد است.

اثبات: فرض کنید رابطه باینری $\perp \in X \times X$ همان رابطه باینری در اثبات قضیه قبل باشد. همانند اثبات قضیه قبل می‌توانیم بررسی کنیم که شرایط (i) تا (iii) از نتیجه ۲-۲ برقرارند. اگر $(x_n)_{n \geq 1}$ یک دنباله در X باشد بطوری که $x_n \perp x_{n+1}$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in X$ آنگاه برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم $(x_n, x_{n+1}) \in E(G)$ که از نتیجه می‌گیریم $(x_n, x) \in E(G)$. پس برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $x_n \perp x$. بنابراین همه شرایط نتیجه ۲-۲ برقرارند. پس T یک نقطه ثابت دارد. همچنین اگر برای هر $x, y \in \text{Fix}(T)$ داشته باشیم $(x, y) \in E(G)$ ، آنگاه برای هر $x, y \in \text{Fix}(T)$ خواهیم داشت $x \perp y$ ، که در این مورد نقطه ثابت T منحصر به فرد است.

۴- نتایج نقطه ثابت در فضاهای متریک مرتب جزئی

در این بخش نشان خواهیم داد که با استفاده از نتایج ما، نتایج نقطه ثابت زیادی در فضای متریک مرتب جزئی بدست می‌آیند.

تعریف ۴-۱: فرض کنید (X, d, \leq) یک فضای متریک و T نیز یک خود نگاشت روی X باشد. گوئیم T یک نگاشت \leq_{θ} -انقباض است هرگاه برای هر $x, y \in X$ ای که $x \leq y$ و $d(Tx, Ty) > 0$ ، $k \in (0, 1)$ وجود داشته باشد بطوریکه

$$\begin{aligned} & \theta(d(Tx, Ty)) \\ & \leq [\max\{\theta(d(x, y)), \\ & [\theta(d(x, Tx))\theta(d(y, Ty))]^{\frac{1}{r}}, \\ & [\theta(d(x, Ty))\theta(d(y, Tx))]^{\frac{1}{r}}\}^k \end{aligned}$$

قضیه ۴-۱: فرض کنید (X, d, \leq) یک فضای متریک مرتب جزئی باشد که \leq - کامل نیز است. همچنین فرض کنید T یک خود نگاشت روی X باشد و شرایط زیر نیز برقرارند.

$$\begin{aligned} & \theta(d(Tx, Ty)) \\ & \leq [\max\{\theta(d(x, y)), \\ & [\theta(d(x, Tx))\theta(d(y, Ty))]^{\frac{1}{r}}, \\ & [\theta(d(x, Ty))\theta(d(y, Tx))]^{\frac{1}{r}}\}^k. \end{aligned}$$

یعنی برای هر $x, y \in X$ ای که $x \perp y$ و $k \in (0, 1)$ ، $d(Tx, Ty) > 0$

$$\begin{aligned} & \theta(d(Tx, Ty)) \\ & \leq [\max\{\theta(d(x, y)), \\ & [\theta(d(x, Tx))\theta(d(y, Ty))]^{\frac{1}{r}}, \\ & [\theta(d(x, Ty))\theta(d(y, Tx))]^{\frac{1}{r}}\}^k. \end{aligned}$$

یعنی ثابت کردیم T یک \perp_{θ} -انقباض است.

پس همه شرایط نتیجه ۲-۲ برقرار است و T یک نقطه ثابت دارد. همچنین اگر برای هر $x, y \in \text{Fix}(T)$ داشته باشیم $(x, y) \in E(G)$ ، آنگاه برای هر $x, y \in \text{Fix}(T)$ خواهیم داشت $x \perp y$ ، که در این مورد نقطه ثابت T منحصر به فرد است.

قضیه ۳-۲: فرض کنید (X, d) یک فضای متریک باشد که به گراف G مجهز است و G -کامل نیز می‌باشد. همچنین فرض کنید T یک خود نگاشت روی X باشد و شرایط زیر نیز برقرارند.

- (i) $x \in X$ ای وجود دارد بطوری که برای هر $x \in X$ ، $(x, x) \in E(G)$ ،
- (ii) $(x, y) \in E(G) \Rightarrow (Tx, Ty) \in E(G)$ ،
- (iii) یک نگاشت G_{θ} -انقباض است که در آن θ پیوسته است و برای هر $t, s \geq 0$ ، $\theta(t+s) \leq \theta(t)\theta(s)$.

(iv) اگر $(x_n)_{n \geq 1}$ یک دنباله در X باشد بطوریکه $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in X_{\omega}$ و $(x_n, x_{n+1}) \in E(G)$

برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم $(x_n, x) \in E(G)$.

در اینصورت T یک نقطه ثابت دارد. بعلاوه اگر برای هر $x, y \in \text{Fix}(T)$ داشته باشیم $(x, y) \in E(G)$ ،

یعنی ثابت کردیم T یک \perp_θ -انقباض است. پس همه شرایط نتیجه ۱-۲ برقرار است و T یک نقطه ثابت دارد. همچنین اگر برای هر $x, y \in \text{Fix}(T)$ داشته باشیم $x \leq y$ ، آنگاه برای هر $x, y \in \text{Fix}(T)$ خواهیم داشت $x \perp y$ ، که در این مورد نقطه ثابت T منحصر به فرد است.

قضیه ۴-۲: فرض کنید (X, d, \leq) یک فضای متریک مرتب جزئی باشد که \leq - کامل نیز است. همچنین فرض کنید T یک خود نگاشت روی X باشد و شرایط زیر نیز برقرارند.

(i) $x \in X$ ای وجود دارد بطوری که برای هر $x, x \leq x$ ، $x \in X$

(iii) نگاشت T نگاشتی صعودی است،

(v) T یک نگاشت \leq_θ -انقباض است که θ پیوسته

است و برای هر $t, s \geq 0$ ، $\theta(t+s) \leq \theta(t)\theta(s)$.

(iv) اگر $(x_n)_{n \geq 1}$ یک دنباله صعودی در X باشد داریم $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in X_\theta$ آنگاه برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم $x_n \leq x$.

در اینصورت T یک نقطه ثابت دارد. بعلاوه اگر برای هر $x, y \in \text{Fix}(T)$ داشته باشیم $x \leq y$ ، آنگاه نقطه ثابت منحصر بفرد است.

اثبات: فرض کنید رابطه باینری $\perp \in X \times X$ همان

رابطه باینری در اثبات قضیه قبل باشد. همانند اثبات

قضیه قبل می‌توانیم بررسی کنیم که شرایط (i) تا

(iii) از نتیجه ۲-۲ برقرارند. اگر $(x_n)_{n \geq 1}$ یک دنباله

صعودی در X باشد بطوری که $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in X$.

آنگاه از (iv) نتیجه می‌گیریم $x_n \leq x$. پس برای هر

$x_n \perp x$ ، $n \in \mathbb{N}$. بنابراین همه شرایط نتیجه ۲-۲

برقرارند. پس T یک نقطه ثابت دارد. همچنین اگر برای

هر $x, y \in \text{Fix}(T)$ داشته باشیم $x \leq y$ آنگاه برای هر

$x, y \in \text{Fix}(T)$ خواهیم داشت $x \perp y$ ، که در این

مورد نقطه ثابت T منحصر به فرد است.

(i) $x \in X$ ای وجود دارد بطوری که برای هر

$$x, x \leq x, x \in X$$

(ii) یک نگاشت \leq - پیوسته است،

(iii) T یک نگاشت صعودی است،

(v) T یک نگاشت \leq_θ -انقباض است که برای هر

$$\theta(t+s) \leq \theta(t)\theta(s), t, s \geq 0.$$

در اینصورت T یک نقطه ثابت دارد. بعلاوه اگر برای هر

$x, y \in \text{Fix}(T)$ داشته باشیم $(x, y) \in E(G)$ ،

آنگاه نقطه ثابت منحصر بفرد است.

اثبات: رابطه باینری $\perp \in X \times X$ را به اینصورت

تعریف می‌کنیم که، $x \perp y$ اگر $x \leq y$. پس بنابر

(i)، $x \in X$ ، وجود دارد بطوری که برای هر

$x, x \leq x$ ، $x \in X$. یعنی برای هر $x \in X$

$x \perp x$. بنابراین (X, d, \perp) یک فضای متریک

متعامد است. همچنین به راحتی می‌توان بررسی کرد که

(X, d, \perp) یک فضای متریک O -کامل است.

بعلاوه از G -پیوستگی T می‌توان نتیجه گرفت که

T یک نگاشت \perp - پیوسته است.

اگر $x \perp y$ آنگاه $x \leq y$. از صعودی بودن T داریم

$Tx \leq Ty$. یعنی $Tx \perp Ty$. در نتیجه T یک نگاشت

\perp - حافظ است.

چون T یک نگاشت \leq_θ -انقباض است بنابراین برای

هر $x, y \in X$ ای که $x \leq y$ و $d(Tx, Ty) > 0$

$k \in (0, 1)$ ای وجود دارد بطوری که

$$\theta(d(Tx, Ty))$$

$$\leq [\max\{\theta(d(x, y)),$$

$$[\theta(d(x, Tx))\theta(d(y, Ty))]\frac{1}{k},$$

$$[\theta(d(x, Ty))\theta(d(y, Tx))]\frac{1}{k}\}^k.$$

یعنی برای هر $x, y \in X$ ای که $x \perp y$ و

$d(Tx, Ty) > 0$ ، $k \in (0, 1)$ ای وجود دارد بطوری که

$$\theta(d(Tx, Ty))$$

$$\leq [\max\{\theta(d(x, y)),$$

$$[\theta(d(x, Tx))\theta(d(y, Ty))]\frac{1}{k},$$

$$[\theta(d(x, Ty))\theta(d(y, Tx))]\frac{1}{k}\}^k.$$

فهرست منابع

- [10] S.K. Chatterjea, Fixed point theorems, Computers Rendus De L Academia Bulgare Des Sciences, 25 (1972) 727- 730.
- [11] L. Ciric, A generalization of Banach's contraction principle, Proceedings of the American Mathematical Society, 45 (1974) 267-273.
- [12] M. Edelstein, on fixed and periodic points under contractive mappings, J. London Math. Soc. 37 (1962) 74-79.
- [13] B. Fisher, Four mappings with a common fixed point, Journal of University of Kuwait Science, 8 (1981) 131-139.
- [14] G.E. Hardy, T.D. Rogers, A generalization of a fixed point theorem of Reich, Canadian Mathematical Bulletin, 1 (6) (1973) 201-206.
- [15] N. Hussain, M. A. Kutbi, S. Khaleghizadeh, P. Salimi, Discussions on Recent Results for α - ψ -Contractive Mappings, Abstract and Applied Analysis, Volume 2014, Article ID 456482, 13 pages.
- [16] T. Bhaskar, V. Lakshmikantham, Fixed point theorems in partially ordered metric spaces and applications, Nonlinear Analysis. 65 (2006) 1379-1393.
- [17] Y.J. Cho, B.E. Rhoades, R. Saadati, B. Samet, W. Shatanawi, Nonlinear coupled fixed point theorems in ordered generalized metric spaces with integral type, Fixed Point Theory and Applications, Volume 2012, 2012:8.
- [18] I.L. Glicksberg, A further generalization of the Kakutani fixed theorem with application to Nash equilibrium points, Proceedings of the
- [1] پاک‌نظر، محدثه (۱۳۹۶). درباره نگاشت‌های $\alpha - \psi$ میسر-کیبلر. سیستم‌های مختلط و غیرخطی، دوره ۱، شماره ۱، صص ۲۹ تا ۴۶.
- [2] S. Banach, Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrals, Fundamenta Mathematicae, 3 (1922) 133-181.
- [3] F.E. Browder, A new generalization of the Shauder fixed point theorem, Mathematische Annalen, 174 (1967) 285-390.
- [4] F.E. Browder, The fixed point theory on multivalued mappings in topological vector spaces, Mathematische Annalen, 177 (1968) 283-301.
- [5] P. Chaipunya, C. Mongkolkeha, W. Sintunavarat, P. Kumam, Fixed-Point Theorems for Multivalued Mappings in Modular Metric Spaces, Abstract and Applied Analysis, vol. 2012, Article ID 503504, 14 pages.
- [6] E.H. Connell, Properties of fixed point spaces, Proceedings of the American Mathematical Society, 10 (6) (1959) 974-979.
- [7] B.C. Dhage, Generalized metric space and mapping with fixed point, Bulletin of Calcutta Mathematical Society, 84 (1992) 329-336.
- [8] K. Fan, Fixed point and minimax theorems in locally convex topological linear spaces, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 38 (1952) 121-126.
- [9] C.J. Himmelberg, Fixed points of compact multifunctions, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 38 (1972) 205-207.

- [27] Z. Golubovic, Z. Kadelburg and S. Radenović, Common fixed points of ordered g -quasicontractions and weak contractions in ordered metric spaces, *Fixed Point Theory and Applications*, 2012:20 (2012).
- [28] B. Samet, Coupled fixed point theorems for a generalized Meir-Keeler contraction in partially ordered metric spaces, *Nonlinear Analysis*, 72 (2010), 4508-4517.
- [29] M. Eshaghi, M. Ramezani, M.D.L. Sen, Y.J. Cho, On orthogonal sets and Banach's fixed point theorem, *Fixed point Theory*, 18(2017), No. 2, 569-578, DOI 10.24193/FPT-RO.2017.2.45.
- [30] H. Baghani, M. Eshaghi Gordji, M. Ramezani, Orthogonal sets: Their relation to the axiom choice and a generalized fixed point theorem, *Journal of Fixed Point Theory and Applications*, (2016), DOI 10.1007/s11784-016-0297-9.
- [31] M. Ramezani, Orthogonal metric space and convex contractions, *International Journal of Nonlinear Analysis and Applications*, 6 (2015) No. 2, 127-132.
- [32] J. Jachymski, *The contraction principle for mappings on a metric space with a graph*, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 136 (2008) 1359-1373.
- [33] R. Johnsonbaugh, *Discrete Mathematics (Fourth Edition)*, Upper Saddle River. NJ: Prentics Hall. international, (1997) 257-280.
- American Mathematical Society, 3 (1952) 170-174.
- [19] K.S. Ha, Y.J. Cho, A. White, Strictly convex and strictly 2-convex 2-normed spaces, *Mathematica Japonica*, 33 (3) (1988) 375-384.
- [20] M. Jleli and B. Samet, A new generalization of the Banach contraction principle, *Journal of Inequalities and Applications*, 2014, 2014:38.
- [21] A.C.M. Ran and M.C. Reurings, A fixed point theorem in partially ordered sets and some applications to matrix equations, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 132 (2004), 1435-1443.
- [22] J.J. Nieto, R. Rodriguez-Lopez, Contractive mapping theorems in partially ordered sets and applications to ordinary differential equations, *Order*, 22 (2005), 223-239.
- [23] R.P. Agarwal, M.A. El-Gebeily, D. O'Regan, Generalized contractions in partially ordered metric spaces, *Applicable Analysis*, 87 (2008) 109-116.
- [24] V. Berinde and F. Vetro, Common fixed points of mappings satisfying implicit contractive conditions, *Fixed Point Theory and Application*, 2012:105 (2012), doi: 10.1186 /1687-1812-2012-105.
- [25] M. Cherichi, B. Samet, fixed point theorems on ordered gauge spaces with applications to nonlinear integral equations, *Fixed Point Theory and Applications*, 2012:13 (2012).
- [26] L.Ciric, R.P. Agarwal and B. Samet, Mixed monotone-generalized contractions in partially ordered probabilistic metric spaces, *Fixed Point Theory and Applications*, 2011:56 (2011).