دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال ششم، شماره بیست و پنجم، مرداد و شهریور ۱۳۹۹
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

حل عددی و آنالیز خطای معادله‌ی دیفرانسیل تاخیری خطی و غیرخطی

ابراهیم امینی *، علی عبادیان

[۱] گروه ریاضی دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۴۶۹۷-۱۹۳۹۵، تهران، ایران
[۲] دانشکده علوم پایه، گروه ریاضی، دانشگاه ارومیه، ارومیه، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۷/۰۶/۱۰ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۸/۱۱/۲۱

چکیده

در این مقاله، معادلات دیفرانسیل تاخیری خطی و غیر خطی را حل می‌کنیم. بدین منظور با توجه به معادلات و شرایط حاکم بر آن، یک عملگر خطی تعریف می‌کنیم و با استفاده از توابع هسته بازتولید، پایه‌ی متعامد کامل برای فضای هسته‌ی بازتولید به‌دست می‌آوریم و جواب معادلات مذکور را بر حسب این توابع پایه‌ای به‌دست می‌آوریم. در واقع جواب تحلیلی به صورت یک سری نامتناهی نمایش داده می‌شود و با استفاده از یک روش تکراری، جواب تقریبی نظیر سری مذکور بدست آورده می‌شود. همچنین آنالیز همگرایی و خطا را برای روش مورد نظر در حل معادلات دیفرانسیل تاخیری بررسی می‌کنیم. در پایان برخی از مثال‌های عددی برای نشان دادن درستی و کاربرد روش پیشنهادی مورد بررسی قرار گرفته است و نتایج حاصل از این روش با جواب دقیق کارهای قبلی مقایسه می‌شوند. نتایج به‌دست آمده از مثال‌های عددی نشان می‌دهد که روش پیشنهادی مفید و مناسب است.

واژه‌های کلیدی: هسته‌ی بازتولید، معادله‌ی دیفرانسیل تاخیری، آنالیز خطا، آنالیز همگرایی.

*. عهده‌دار مکاتبات: Email: eb.amini.s@pnu.ac.ir

۱- مقدمه

هسته‌ی بازتولید برای اولین بار در اوایل قرن بیستم در تحقیقات روی مسائل مقدار مرزی مورد استفاده قرار گرفت. در سال ۱۹۰۷، زارمبا اولین کسی بود که هسته‌ی متناظر با برخی از توابع خاص را معرفی و خاصیت بازتولید آنها را بیان نمود. اولین مرحله‌ی پیشرفت نظریه‌ی هسته‌ی بازتولید توسط مرسر انجام گرفت. او در سال‌های بین ۱۹۰۹ و ۱۹۱۱، در نظریه‌ی معادلات انتگرال، هسته‌های معین مثبتی را ارائه نمود که در خاصیت بازتولید صدق می‌کردند. پس از وقفه‌ای طولانی، ایده‌ی هسته‌ی بازتولید در تحقیقات سه ریاضیدان آلمانی به نام‌های زیگو (۱۹۲۱)، برگمن (۱۹۲۲) و باخنر (۱۹۲۲) احیا شد. دومین مرحله‌ی پیشرفت نظریه‌ی هسته‌ی بازتولید توسط برگمن انجام شد. او هسته‌های بازتولید تک متغیره و چند متغیره برای برخی از توابع را معرفی کرد، که بعد از سی سال کار بر روی آنها به هسته‌های برگمن معروف شدند. مور در سال ۱۹۳۵، ارتباط بین هسته‌ها و ماتریس‌های هرمیتی معین مثبت را معرفی و کاربرد آنها در معادلات انتگرال را بررسی نمود. در سال‌های بین ۱۹۴۴ و ۱۹۵۰، نظریه هسته‌های بازتولید توسط آرونزان توسعه داده شد، به این ترتیب که روی هسته‌های بازتولید و کاربردشان روی معادلات دیفرانسیل جزئی مطالعاتی انجام داد. آرونزان در نظریه کلی هسته‌های بازتولید را ارائه نمود [۱]. برگمن و شیفربا توسعه ایده اولیه زارمبا در حل مسائل مقدار مرزی، هسته‌های بازتولید را به عنوان ابزاری قدرتمند در حل مسائل مقدار مرزی بیضوی معرفی کردند.

از سال ۱۹۸۰ به واسطه تلاش‌های کوی و همکاران توابع هسته‌ی بازتولید به شکل بسیار ساده‌ی چندجمله‌ای معرفی شدند. آنها توانستند روی روش‌هایی مبتنی بر فضای هسته‌ی بازتولید کار کنند. در سال‌های اخیر، محققان روش‌های مذکور را برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی، معادلات دیفرانسیل جزئی و معادلات انتگرالی بکار برده‌اند[۲-۱۳].

روش‌های مبتنی بر هسته‌ی بازتولید بر پایه نظریه بهترین تقریب در فضای هیلبرت و استفاده از بسط فوریه می‌باشد. در روش‌های مذکور، ابتدا فضای هسته‌ی بازتولید با توجه به صورت کلی مسئله و شرایط حاکم بر آن تعریف می‌شود. سپس هسته‌ی بازتولید به صورت تابعی چند ضابطه‌ای به‌دست می‌آید. اکنون توابع پایه متعامد یکه با استفاده از فرآیند متعامدسازی گرام–اشمیت تولید می‌شود و به‌عنوان توابع پایه در تقریب جواب مورد استفاده قرار می‌گیرد.

در این مقاله، رده‌ای از معادلات دیفرانسیل تاخیری را در نظر گرفته و نحوه‌ی یافتن جواب تقریبی را در فضای هسته‌ی بازتولید برای معادلات مذکور مورد بحث قرار می‌دهیم.

معادله‌ی دیفرانسیل تاخیری معادله‌ای است که در آن مشتق مرتبه $(r+1)$-ام تابع مجهول در یک زمان معین، بر حسب مقادیر تابع مجهول در زمان‌های قبل بیان می‌شود. در این مقاله معادلات دیفرانسیل تاخیری زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} y^{(r+1)}(t)+\sum_{k=0}^{l}\sum_{i=0}^{r} w_{k,i}(t)y^{(i)}(p_k t+q_k) \\ \quad = G(t, y(p_1 t+q_1),\dots,y(p_l t+q_l)), \\ y^{(i)}(0)=0,\ i=0,1,2,\dots,r, \end{cases} \qquad (۱)$$

که در آن توابع

$$w_{k,i}:[0,T]\to\mathbb{R},\ k=0,\cdots,l, i=0,\cdots,r$$

پیوسته هستند، تابع $y:[\cdot,T]\to\mathbb{R}$ متعلق به فضای ${}_c\mathcal{H}_2^m[0,T],(m>r+2)$ و عبارت غیرخطی

$$G(t,v_1,\dots,v_l):[0,T]\times\mathbb{R}^l\to\mathbb{R}$$

با شرط $v_1,\dots,v_l\in_c\mathcal{H}_2^m[0,T]$ متعلق به فضای هسته‌ی بازتولید $\mathcal{H}_2^1[0,T]$ است.

برای حل معادله‌ی دیفرانسیل تاخیری، ابتدا فضای هسته‌ی بازتولید ${}_c\mathcal{H}_2^m[0,T]$ را تعریف کرده، سپس وجود جواب تقریبی معادله‌ی مذکور را در فضای هسته‌ی بازتولید هیلبرت ${}_c\mathcal{H}_2^m[0,T]$ را بررسی می‌کنیم. در پایان، آنالیز خطای روش هسته‌ی بازتولید ارائه می‌گردد.

۲- فضای هسته‌ی بازتولید

تعریف ۱: [۳] فضای $\mathcal{H}_2^1[0,T]$ را فضای متشکل از توابعی به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{H}_2^1[0,T]=\{y:[0,T]\to\mathbb{R}\mid y\in\mathcal{AC}[0,T],\ y'\in L^2[0,T]\}.\neq$$

ضرب داخلی و نرم فضای $\mathcal{H}_2^1[0,T]$ را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\langle y,z\rangle_{\mathcal{H}_2^1}=y(0)z(0)+\int_0^T y'(t)z'(t)dt,\quad \forall y,z\in\mathcal{H}_2^1,$$

$$\|y\|_{\mathcal{H}_2^1}=\sqrt{\langle y,y\rangle_{\mathcal{H}_2^1}},\ \forall y\in\mathcal{H}_2^1.$$

قضیه ۱: [۳] فضای $\mathcal{H}_2^1[0,T]$، یک فضای هسته‌ی بازتولید هیلبرت و هسته‌ی بازتولید آن به‌صورت زیر است:

$$R_s(t)=\begin{cases}1+s, s\le t,\\ 1+t, s>t.\end{cases}$$

تعریف ۲: [۳] فضای $_c\mathcal{H}_2^m[0,T]$ را فضای متشکل از توابعی به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$_c\mathcal{H}_2^m[0,T]=\{y\in\mathcal{H}_2^m[0,T]\mid y^{(j)}(0)=0,\ j=0,1,\dots,r\}$$

که در آن

$$\mathcal{H}_2^m[0,T]=\{y:[0,T]\to\mathbb{R}\mid y^{(m-1)}\in\mathcal{AC}[0,T],\ y^{(m)}\in L^2[0,T]\}.$$

ضرب داخلی و نرم فضای $_c\mathcal{H}_2^m[0,T]$ را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\langle y,z\rangle_{_c\mathcal{H}_2^m}=\sum_{j=0}^{m-1}y^{(j)}(0)z^{(j)}(0)+\int_0^T y(t)z^{(m)}(t)dt,\ y,z\in{}_c\mathcal{H}_2^m[0,T],\tag{۲}$$

و

$$\|y\|_{_cH_2^m}=\sqrt{\langle y,y\rangle_{_cH_2^m}},\ y\in{}_cH_2^m[0,T].$$

قضیه ۲: [۳] فضای $_c\mathcal{H}_2^m[0,T]$، یک فضای هسته‌ی بازتولید هیلبرت و هسته‌ی بازتولید آن به‌صورت زیر است:

$$K_s^m(t)=\begin{cases}\sum_{i=1}^{2m}(c_i\, s)t^{i-1}, & t\le s,\\ \sum_{i=1}^{2m}(d_i\, s)t^{i-1}, & t>s,\end{cases}$$

که دارای $4m$ مجهول است که با حل $4m$ معادله‌ی زیر به‌دست می‌آیند:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^i K_s^m(0)}{\partial t^i}-(-1)^{m-i-1}\dfrac{\partial^{2m-i-1}K_s^m(0)}{\partial t^{2m-i-1}}=0,\\ \qquad i=r+1,\cdots,m-1\\ \dfrac{\partial^{2m-i-1}K_s^m(T)}{\partial t^{2m-i-1}}=0,\ i=r+1,\cdots,m-1\\ \dfrac{\partial^{(i)}K_s^m(0)}{\partial t^{(i)}}=0,\ i=0,1,\dots,r\\ \left.\dfrac{\partial^i K_s^m(t)}{\partial t^i}\right|_{t=s^+}=\left.\dfrac{\partial^i K_s^m(t)}{\partial t^i}\right|_{t=s^-},\ i=0,1,\cdots,2m-2,\\ (-1)^m\left(\left.\dfrac{\partial^{2m-1}K_s^m(t)}{\partial t^{2m-1}}\right|_{t=s^+}-\left.\dfrac{\partial^{2m-1}K_s^m(t)}{\partial t^{2m-1}}\right|_{t=s^-}\right)=1.\end{cases}$$

۳-جواب در فضای هسته‌ی بازتولید

فرض کنید جواب مسئله‌ی (۱) موجود و یکتا باشد. برای یافتن جواب در فضای هسته‌ی بازتولید $_c\mathcal{H}_2^m[0,T],(m>r+2)$، ابتدا عملگر خطی $\mathfrak{L}$ روی فضای $_c\mathcal{H}_2^m[0,T]$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathfrak{L}y(t)=y^{(r+1)}(t)+\sum_{k=1}^{l}\sum_{i=0}^{r}w_{k,i}(t)y^{(i)}(p_k t+q_k))\tag{۳}$$

بنابراین معادله‌ی دیفرانسیل تاخیری (۱) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\begin{cases}\mathfrak{L}:{}_c\mathcal{H}_2^m[0,T]\to\mathcal{H}_2^1[0,T],\\ \mathfrak{L}y(t)=G(t,y(p_1t+q_1),\dots,y(p_lt+q_l)),\\ y^{(i)}(0)=0,\ i=0,1,2,\dots,r,\end{cases}\tag{۴}$$

که در آن y متعلق به فضای هسته‌ی بازتولید ${}_c\mathcal{H}_2^m[0,T]$ و G متعلق به فضای هسته‌ی بازتولید $\mathcal{H}_2^1[0,T]$ است.

قضیه۳: عملگر

$$\mathfrak{L}:{}_c\,\mathcal{H}_2^m[0,T]\rightarrow\mathcal{H}_2^1[0,T]$$

یک عملگر خطی کران‌دار است.

برهان: کافی است ثابت کنیم که

$$\|\mathfrak{L}y\|_{\mathcal{H}_2^1}\le C\|y\|_{{}_c\mathcal{H}_2^m}.$$

با استفاده از نرم فضای $\mathcal{H}_2^1$ داریم:

$$\|\mathfrak{L}y\|_{\mathcal{H}_2^1}^2=\langle\mathfrak{L}y,\mathfrak{L}y\rangle_{\mathcal{H}_2^1}$$
$$=(\mathfrak{L}y(0))^2+\int_0^T((\mathfrak{L}y)'(t))^2dt,$$

می‌دانیم:

$$\langle y,\mathfrak{L}_sK_s^m\rangle_{{}_c\mathcal{H}_2^m}=\mathfrak{L}y(s),$$
$$\langle y,\frac{d}{ds}\mathfrak{L}_sK_s^m\rangle_{{}_c\mathcal{H}_2^m}=\frac{d}{ds}\mathfrak{L}y(s),$$

با استفاده از نامساوی کشی-شوارتز داریم:

$$|\mathfrak{L}y(0)|^2\le c_1\|y\|_{{}_c\mathcal{H}_2^m}^2,$$
$$\int_0^T(\frac{d}{ds}\mathfrak{L}y(s))^2ds\le c_2\|y\|_{{}_c\mathcal{H}_2^m}^2,$$

که در آن c_iها برای $i=1,2$ اعداد حقیقی مثبت هستند.

با ترکیب نامساوی‌های مذکور، برهان تمام است.

فرض کنید $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک مجموعه چگال در بازه $[0,T]$ باشد، در این‌صورت قرار می‌دهیم:

$$\rho_i(t)=R_t(t_i),$$

که در آن $R_s(t)$ هسته‌ی فضای بازتولید $\mathcal{H}_2^1[0,T]$ است.

از آنجایی‌که عملگر خطی تعریف شده کران‌دار است، لذا عملگر الحاقی $\mathfrak{L}^*$ از فضای هسته‌ی باز تولید $\mathcal{H}_2^1[0,T]$ به فضای ${}_c\mathcal{H}_2^m[0,T]$ به‌صورت یکتا تعیین می‌شود.

اکنون قرار می‌دهیم $\theta_i(t)=\mathfrak{L}^*\rho_i(t)$. در قضیه‌ی زیر نشان می‌دهیم که دنباله‌ی $\{\theta_i(\tau)\}_{i=1}^{\infty}$ یک دستگاه متعامد کامل تشکیل می‌دهد.

قضیه۴: فرض کنید $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ زیرمجموعه چگال در دامنه $[0,T]$ باشد، دراین‌صورت $\{\theta_i(\tau)\}_{i=1}^{\infty}$ یک دستگاه متعامد کامل از فضای ${}_c\mathcal{H}_2^m[0,T]$ است و داریم:

$$\theta_i(t)=\mathfrak{L}_sK_s^m(t)|_{s=t_i},$$

که در آن زیرنویس s در عملگر خطی $\mathfrak{L}$ بیانگر این است که عملگر $\mathfrak{L}$ به عنوان تابعی از s به‌کاربرده می‌شود.

برهان: با توجه به خاصیت‌های هسته‌ی بازتولید $K_s^m(t)$ داریم:

$$\theta_i(t)=\mathfrak{L}^*\rho_i(t)=\langle\mathfrak{L}^*\rho_i(s),K_s^m(t)\rangle_{{}_c\mathcal{H}_2^m}$$
$$=\langle\rho_i(s),\mathfrak{L}_sK_s^m(t)\rangle_{\mathcal{H}_2^1}=\mathfrak{L}_sK_s^m(t)|_{s=t_i},$$

که در آن زیرنویس s در عملگر خطی $\mathfrak{L}$ بیانگر این است که عملگر $\mathfrak{L}$ به عنوان تابعی از s به‌کاربرده می‌شود. می‌دانیم:

$$\langle y,\theta_i\rangle_{{}_c\mathcal{H}_2^m}=\langle y,\mathfrak{L}^*\rho_i\rangle_{{}_c\mathcal{H}_2^m}$$
$$=\langle\mathfrak{L}y,\rho_i\rangle_{\mathcal{H}_2^1}=\mathfrak{L}y(t_i)=0,\ i\in N.$$

با توجه به چگال بودن $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ در دامنه $[0,T]$ و پیوستگی عملگر خطی داریم:

$$\mathfrak{L}y(t)=0,\forall t\in[0,T].$$

با توجه به یکتایی جواب نتیجه می‌شود:

$$y(t)=0,\forall t\in[0,T].$$

و این نشان می‌دهد که $\{\theta_i(t)\}_{i=1}^{\infty}$ یک دستگاه متعامد کامل از فضای $_c\mathcal{H}_2^m[0,T]$ است و بنابراین برهان تمام است.

به منظور به‌دست‌آوردن دنباله‌ی متعامد یکه $\{\overline{\theta}_i(t)\}_{i=1}^{\infty}$ متعلق به فضای هسته‌ی بازتولید $_c\mathcal{H}_2^m[0,T]$، می‌توانیم از فرایند متعامدسازی گرام–اشمیت استفاده کنیم:

$$\overline{\theta}_i(t)=\sum_{k=1}^{i}\beta_{ik}\theta_k(t),\ i=1,2,3,...$$

که در آن ضرایب β_{ik} به‌صورت زیر است:

$$\beta_{11}=\frac{1}{\|\theta_1\|_{_c\mathcal{H}_2^m}},$$

$$\beta_{ii}=\frac{1}{\sqrt{\|\theta_i\|^2_{_c\mathcal{H}_2^m}-\sum_{k=1}^{i-1}\langle\theta_i\ \overline{\theta}_k\rangle^2_{_c\mathcal{H}_2^m}}\ \|},\ i\neq 1,$$

$$\beta_{ij}=\frac{-\sum_{k=1}^{i-1}\langle\theta_i\ \overline{\theta}_k\rangle^2_{_c\mathcal{H}_2^m}\beta_{kj}}{\sqrt{\|\theta_i\|^2_{_c\mathcal{H}_2^m}-\sum_{k=1}^{i-1}\langle\theta_i\ \overline{\theta}_k\rangle^2_{_c\mathcal{H}_2^m}}\ \|},\ i>j.$$

قضیه ۵: فرض کنید $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ زیرمجموعه چگال در دامنه‌ی $[0,T]$ و جواب مسئله‌ی (۱) یکتا باشد، در این‌صورت جواب مسئله (۱) به‌صورت زیر است:

$$y(t)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{i}\beta_{ik}a_k\theta_i(t),\ a_k=G(t,y(p_1t+q_1),\dots,y(p_lt+q_l))|_{t=t_k}. \qquad (۵)$$

برهان: از آنجایی‌که $\{\overline{\theta}_i(t)\}_{i=1}^{\infty}$ دستگاه متعامد یکه کامل متعلق به فضای هسته‌ی بازتولید $_c\mathcal{H}_2^m[0,T]$ است، لذا داریم:

$$y(t)=\sum_{i=1}^{\infty}\langle y(t),\overline{\theta}_i(t)\rangle_{_c\mathcal{H}_2^m}\overline{\theta}_i(t),$$

و نتیجه می‌شود:

$$y(t)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{i}\beta_{ik}\left\langle y(t),\ell^*(t)\right\rangle_{_cH_2^m}\overline{\theta}_i(t)$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{i}\beta_{ik}\left\langle \ell_y(t),\rho_k(t)\right\rangle_{H_2^1}\overline{\theta}_i(t)$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{i}\beta_{ik}\langle G(t,y(p_1t+q_1),\dots,y(p_1t+q_1)),\rho_k(t)\rangle_{H_2^1}\overline{\theta}_i(t)$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{i}\beta_{ik}a_k\overline{\theta}_i(t),$$

و بنابراین برهان تمام است.

در نتیجه جواب تقریبی مرتبه n-ام را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$y_n(t)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i}\beta_{ik}a_k\overline{\theta}_i(t)\in_c\mathcal{H}_2^m[0,T].$$

قضیه ۶: فرض کنید:

$$G(t,y(p_1t+q_1),\dots,y(p_lt+q_l))=G(t)$$

در این‌صورت داریم:

$$\mathfrak{L}y_n(t_j)=G(t_j),\ j\le n.$$

برهان: با توجه به رابطه (۵) داریم:

$$\mathfrak{L}y_n(t_j)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i}\beta_{ik}a_k\mathfrak{L}\overline{\theta}_i(t_j)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i}\beta_{ik}a_k\langle\mathfrak{L}\overline{\theta}_i(t),K_s^m(t)|_{s=t_j}\rangle_{\mathcal{H}_2^1}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i}\beta_{ik}a_k\langle\mathfrak{L}\overline{\theta}_i(t),\rho_j(t)\rangle_{\mathcal{H}_2^1}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i}\beta_{ik}a_k\langle\overline{\theta}_i(t),\mathfrak{L}_sK_s^m(t)|_{s=t_j}\rangle_{_c\mathcal{H}_2^m}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i}\beta_{ik}a_k\langle\overline{\theta}_i(t),\theta_j(t)\rangle_{_c\mathcal{H}_2^m}$$

هرگاه $j=1$، در این‌صورت داریم:

$$\beta_{11}\mathfrak{L}y_n(t_1)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i}\beta_{ik}a_k\langle\overline{\theta}_i(t),\overline{\theta}_1(t)\rangle_{_c\mathcal{H}_2^m}=\beta_{11}a_1.$$

از آنجایی‌که $\beta_{11} \neq 0$، لذا داریم:

$$\mathfrak{L}y_n(t_1) = a_1 = G(t_1).$$

هرگاه $j = 2$، آن‌گاه داریم:

$$\begin{aligned}&\beta_{22}\mathfrak{L}y_n(t_2)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i}\beta_{ik}a_k\langle\bar{\theta}_i(t), \beta_{22}\theta_2(t)\rangle_{\mathcal{H}_2^m}\\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i}\beta_{ik}a_k\langle\bar{\theta}_i(t), (\bar{\theta}_2(t)-\beta_{21}\theta_1(t))\rangle_{{}_c\mathcal{H}_2^m}\\ &= \beta_{22}a_2,\end{aligned}$$

و بنابراین نتیجه می‌شود:

$$\mathfrak{L}y_n(t_2) = a_2 = G(t_2).$$

علاوه‌براین با استقرای ریاضی اثبات می‌شود که $\mathfrak{L}y_n(t_j) = G(t_j)$ و برهان تمام است.

تقریب مرتبه‌ی $n-$ام برای جواب $y(t)$ به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned}&y_n(t;\bar{\mathbf{a}}_n) = P_n y(t)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i}\beta_{ik}a_k\bar{\theta}_i(t),\ \ \bar{\mathbf{a}}_n = (a_1, a_2, ..., a_n).\end{aligned} \qquad (۶)$$

قضیه۷: اگر دنباله‌ی $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ زیرمجموعه چگال در دامنه‌ی $[0,T]$ باشد، آن‌گاه جواب تقریبی و مشتقات آن $y_n^{(i)}$ برای $i = 0,1,2,...,m-1$ به‌طوریکنواخت به جواب دقیق و مشتقات آن $y^{(i)}$ همگرا می‌باشند.

برهان: فرض کنید K_s^m هسته‌ی بازتولید فضای ${}_c\mathcal{H}_2^m[0,T]$ باشد، در این‌صورت داریم:

$$\begin{aligned}&y_n(s) - y(s) = \langle y_n - y, K_s^m\rangle_{{}_c\mathcal{H}_2^m}\\ &= y_n^{(i)}(s) - y^{(i)}(s)\\ &= (y_n(s) - y(s))^{(j)}\\ &= \frac{d^i}{ds^i}(\langle y_n - y, K_s^m\rangle_{{}_c\mathcal{H}_2^m})\\ &= \langle y_n - y, \frac{\partial^i K_s^m}{\partial s^i}\rangle_{{}_c\mathcal{H}_2^m}.\end{aligned}$$

با استفاده از نامساوی کوشی– شوارتز داریم:

$$|y_n^{(i)}(s) - y^{(i)}(s)| \le \|y_n - y\|_{{}_c\mathcal{H}_2^m}\|\frac{\partial^i K_s^m}{\partial s^i}\|_{{}_c\mathcal{H}_2^m}.$$

حال با توجه به پیوستگی $\|\frac{\partial^i K_s^m}{\partial s^i}\|_{{}_c\mathcal{H}_2^m}$ نسبت به متغیر s در بازه $[0,T]$ داریم:

$$|y_n^{(i)}(s) - y^{(i)}(s)| \le M_i \|y_n - y\|_{{}_c\mathcal{H}_2^m}.$$

که در آن M_i ها برای $i = 0,1,2,...,m-1$ اعداد حقیقی مثبت هستند. بنابراین برهان تمام است.

۴- الگوریتم کمینه‌سازی

از آنجایی‌که a_k شامل عبارت‌های مجهول است، لذا جواب را نمی‌توان به‌صورت مستقیم از رابطه‌ی (۶) به‌دست آورد. یکی از الگوریتم‌هایی که برای محاسبه‌ی تقریب استفاده می‌شود، الگوریتم کمینه‌سازی است که در مورد آن بحث خواهیم کرد.

به منظور به‌دست‌آوردن a_k در رابطه‌ی (۶)، مجموع زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned}T_n(\bar{\mathbf{a}}_n) = \sum_{k=1}^{n}[a_k - G(t, y_n(p_1 t + q_1; \bar{\mathbf{a}}_n)\\ ,..., y_n(p_l t + q_l; \bar{\mathbf{a}}_n))|_{t=t_k}]^2.\end{aligned} \qquad (۷)$$

اکنون $\bar{\mathbf{a}}_n$ را طوری می‌یابیم که $T_n(\bar{\mathbf{a}}_n)$ را کمینه کند، سپس با یافتن $\bar{\mathbf{a}}_n$، جواب تقریبی را به‌دست می‌آوریم.

به منظور کمینه‌سازی $T_n(\bar{\mathbf{a}}_n)$ می‌توان از الگوریتم زیر استفاده نمود:

گام ۱: مقدار اولیه‌ای برای $\bar{\mathbf{a}}_n$ انتخاب نموده و آن‌را با $\bar{\mathbf{a}}_n^0$ نمایش می‌دهیم.

گام ۲: با قرار دادن $\bar{\mathbf{a}}_n^0$ درون عبارت (۶) و به‌دست‌آوردن $y_n(t;\bar{\mathbf{a}}_n^0)$ داریم:

$$y_n(t;\bar{\mathbf{a}}_n^0) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i}\beta_{ik}a_k^0\bar{\theta}_i(t).$$

گام ۳: با قرار دادن $\overline{\mathbf{a}}_n^0$ درون رابطه‌ی (۷) و محاسبه $T_n(\overline{\mathbf{a}}_n^0)$ داریم:

$$T_n(\overline{\mathbf{a}}_n^0)=\sum_{k=1}^{n}[a_k^0-G(t,y_n(p_1t+q_1;\overline{\mathbf{a}}_n^0),$$
$$y_n(p_lt+q_l;\overline{\mathbf{a}}_n^0))]]^2.$$

گام ۴: اگر $T_n(\overline{\mathbf{a}}_n^0)<\varepsilon$، آن‌گاه محاسبات را متوقف می‌کنیم. وگرنه با محاسبه مقدار تابع غیرخطی

$$G(t,y_n(p_1t+q_1;\overline{\mathbf{a}}_n^0),y_n(p_lt+q_l;\overline{\mathbf{a}}_n^0))|_{t=t_k}$$

نقطه جدید $\overline{\mathbf{a}}_n^1$ را به‌دست می‌آوریم.

گام ۵: با قرار دادن $\overline{\mathbf{a}}_n^1$ درون رابطه‌ی (۷) و محاسبه $T_n(\overline{\mathbf{a}}_n^1)$ داریم:

$$T_n(\overline{\mathbf{a}}_n^1)=\sum_{k=1}^{n}[a_k^1-G(t,y_n(p_1t+q_1;\overline{\mathbf{a}}_n^1),$$
$$y_n(p_lt+q_l;\overline{\mathbf{a}}_n^1))|_{t=t_k}]]^2.$$

گام ۶: اگر $T_n(\overline{\mathbf{a}}_n^1)<T_n(\overline{\mathbf{a}}_n^0)$، آن‌گاه $\overline{\mathbf{a}}_n^0$ را با $\overline{\mathbf{a}}_n^1$ جانشین کرده و به گام ۲ برمی‌گردیم وگرنه از نقطه $\overline{\mathbf{a}}_n^1$ صرف‌نظر نموده و نقطه جدید $\overline{\mathbf{a}}_n^0$ را انتخاب نموده و به گام ۲ بر می‌گردیم.

بنابراین مقدار تقریبی $\overline{\mathbf{a}}_k^P, k=1,2,\dots,n$ را چنان به‌دست می‌آوریم به‌طوری‌که $T_n(\overline{\mathbf{a}}_k^P)<\varepsilon$ و در نتیجه جواب تقریبی را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$y_n(t;\overline{\mathbf{a}}_n^P)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i}\beta_{ik}a_k^P\overline{\theta}_i(t). \qquad (۸)$$

۵- آنالیز خطا

در ادامه این فصل، آنالیز خطای روش در حل مسائل خطی زیر را ارائه می‌دهیم.

مسئله خطی ۱:

$$\begin{cases} y'(t)+\sum_{k=0}^{l}w_{k,i}(t)y^{(i)}p_kt+q_k) \\ \qquad\qquad = G(t) \\ y(0)=0,\ t\in[0,T]. \end{cases} \qquad (۹)$$

مسئله خطی ۲:

$$\begin{cases} y''(t)+\sum_{k=0}^{l}\sum_{i=0}^{1}w_{k,i}(t)y^{(i)}p_kt+q_k) \\ \qquad\qquad = G(t) \\ y(0)=0, y'(0)=0,\ t\in[0,T]. \end{cases} \qquad (۱۰)$$

قضیه ۸: فرض کنید y_n جواب تقریبی مسئله‌ی (۹) در فضای هسته بازتولید ${}_c\mathcal{H}_2^3[0,T]$ و همچنین وارون عملگر $\mathfrak{L}$ کران‌دار باشد. اگر افراز یکنواخت $w_{k,i},G\in C^2[0,T]$ آن‌گاه داریم:

$$\|y-y_n\|_\infty\le dh,\ h=\frac{T}{n-1},$$

که در آن d یک ثابت حقیقی مثبت است.

برهان: همان‌طوری‌که می‌دانیم با قراردادن $y_n(t)$ در معادله‌ی (۹) مانده $E_n(t)$ نتیجه می‌شود:

$$E_n(t)=y_n'(t)+\sum_{k=0}^{l}w_k(t)y_n(p(t)+q_k)-G(t).$$

با استفاده از قضیه ۶ داریم:

$$E_n(t_i)=0, 1\le i\le n.$$

فرض کنید $p_i(E_n;t)$ نمایش چندجمله‌ای درون‌یاب E_n در نقاط t_i و t_{i+1} باشد، در این‌صورت خطای درونیابی را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$E_n(t)=E_n(t)-p_i(E_n;t)|_{[t_i,t_{i+1}]}$$
$$=\frac{(t-t_i)}{(t_{i+1}-t_i)}\int_{t_{i+1}}^{t}(t_{i+1}-s)E_n''(s)ds \qquad (۱۱)$$
$$+\frac{(t-t_{i+1})}{(t_i-t_{i+1})}\int_{t_i}^{t}(t_i-s)E_n''(s)ds,\ t\in[t_i,t_{i+1}].$$

از آنجایی‌که $E_n''\in C[0,T]$، لذا داریم:

$$|E_n(t)|\le a_ih^2, t_i\le t\le t_{i+1},$$

که در آن a_i ها برای $i=1,2,\dots,n-1$ مقادیر ثابت حقیقی هستند. بنابراین داریم:

$$\max_{t\in[0,T]} |E_n(t)| \le ah^2,\ a=\max_{1\le i\le n-1} a_i. \qquad (۱۲)$$

اکنون با مشتق‌گیری از رابطه‌ی (۱۱) نسبت به متغیر t داریم:

$$E_n'(t)=\frac{1}{(t_{i+1}-t_i)}\int_{t_{i+1}}^{t}(t_{i+1}-s)E_n''(s)ds$$
$$+\frac{(t-t_i)}{(t_{i+1}-t_i)}(t_{i+1}-t)E_n''(t)$$
$$+\frac{1}{(t_i-t_{i+1})}\int_{t_i}^{t}(t_i-s)E_n''(s)ds$$
$$+\frac{(t-t_{i+1})}{(t_i-t_{i+1})}(t_i-t)E_n''(t),\ t\in[t_i,t_{i+1}].$$

در هر زیربازه $[t_i,t_{i+1}]$ داریم:

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}}(E_n'(s))^2ds\le b_ih^3,$$

که در آن b_iها برای $i=1,2,...,n-1$ مقادیر حقیقی مثبت هستند.

لذا ثابت $b>0$ وجود دارد، به‌طوری‌که داریم:

$$\int_0^T(E_n'(s))^2ds\le bh^2. \qquad (۱۳)$$

با استفاده از روابط (۱۲) و (۱۳) داریم:

$$\|E_n\|^2_{\mathcal{H}_2^1[0,T]}\le ch^2,$$

که در آن c ثابت حقیقی است.

بنابراین مقدار ثابت حقیقی d وجود دارد، به‌طوری‌که داریم:

$$\|y-y_n\|_\infty\le dh.$$

بنابراین برهان تمام است.

قضیه ۹: فرض کنید y_n جواب تقریبی مسئله‌ی (۹) در فضای هسته‌ی بازتولید ${}_c\mathcal{H}_2^4[0,T]$ و همچنین وارون عملگر $\mathfrak{L}$ کران‌دار باشد. اگر $0=t_1<t_2<...<t_n=T$ افراز یکنواخت و $w_{k,i},G\in C^4[0,T]$، آن‌گاه داریم:

$$\|y-y_n\|_\infty\le dh^3,\ h=\frac{T}{n-1},$$

که در آن d یک ثابت حقیقی مثبت است.

برهان: همان‌طوری‌که می‌دانیم:

$$E_n(t_i)=0,\ 1\le i\le n$$

و لذا با به‌کارگیری قضیه‌ی رول روی $E_n(t)$ داریم:

$$E_n'(\varsigma_i)=0,\varsigma_i\in[t_i,t_{i+1}],\ i=1,2,...,n-1.$$

همچنین با به‌کارگیری مجدد قضیه‌ی رول روی $E_n'(t)$ داریم:

$$E_n''(\sigma_i)=0,\sigma_i\in[\varsigma_i,\varsigma_{i+1}],\ i=1,2,...,n-2.$$

فرض کنید $p_i(E_n'';t)$ نمایش چندجمله‌ای درون‌یاب E_n'' در نقاط σ_i و σ_{i+1} باشد، در این‌صورت داریم: $p_i(E_n'';t)=0.$

با محاسبه‌ی خطای درونیاب روی بازه $[t_1,\sigma_2]$ داریم:

$$E_n''(t)=E_n''(t)-p_1(E_n'';t)|_{[t_1,\sigma_2]}$$
$$=\frac{(t-\sigma_1)}{(\sigma_2-\sigma_1)}\int_{\sigma_2}^{t}(\sigma_2-s)E_n^{(4)}(s)ds$$
$$+\frac{(t-\sigma_2)}{(\sigma_1-\sigma_2)}\int_{\sigma_1}^{t}(\sigma_1-s)E_n^{(4)}(s)ds,$$
$$t\in[t_1,\sigma_2].$$

از آنجایی‌که $E_n^{(4)}\in C[0,T]$، لذا داریم:

$$\max_{t\in[t_1,\sigma_2]}|E_n''(t)|\le a_1h^2, \qquad (۱۴)$$

که در آن a_1 ثابت حقیقی مثبت است. همچنین داریم:

$$E_n''(t)=E_n''(t)-p_i(E_n'';t)|_{[\sigma_i,\sigma_{i+1}]}$$
$$=\frac{(t-\sigma_i)}{(\sigma_{i+1}-\sigma_i)}\int_{\sigma_{i+1}}^{t}(\sigma_{i+1}-s)E_n^{(4)}(s)ds$$

$$+\frac{(t-\sigma_{i+1})}{(\sigma_i-\sigma_{i+1})}\int_{\sigma_i}^{t}(\sigma_i-s)E_n^{(4)}(s)ds\,, \qquad (۱۵)$$
$$t\in[\sigma_i,\sigma_{i+1}],\ i=2,3,\dots,n-4.$$

لذا از رابطه‌ی (۱۵) نتیجه می‌شود:

$$|E_n''(t)|\le a_i h^2, \sigma_i\le t\le\sigma_{i+1}\,,\ i=2,3,\dots,n-4, \qquad (۱۶)$$

که در آن a_iها برای $i=2,3,\dots,n-4$ ثابت‌های حقیقی مثبت هستند. به طور مشابه داریم:

$$\max_{t\in[\sigma_{n-3},t_n]}|E_n''(t)|\le a_{n-3}h^2, \qquad (۱۷)$$

که در آن a_{n-3} ثابت حقیقی مثبت است. با استفاده از روابط (۱۴)، (۱۶) و (۱۷) داریم:

$$\max_{t\in[0,T]}|E_n''(t)|\le ah^2, a=\max_{1\le i\le n-3}\{a_i\}.$$

در هر زیربازه $[t_i,t_{i+1}]$ داریم:

$$|E'(t)|=\left|\int_{\zeta i}^{t}E_n''(s)ds\right|$$
$$\le\|E_n''(t)\|_\infty|t-\varsigma_i|\le b_i h^3,$$

که در آن b_iها برای $i=1,2,\dots,n-1$ مقادیر حقیقی مثبت هستند. بنابراین نتیجه می‌شود:

$$|E_n'(t)|\le bh^3,\ t\in[0,T], \qquad (۱۸)$$

که در آن b ثابت حقیقی مثبت است.
به طور مشابه داریم:

$$|E_n(t)|\le ch^4,\ t\in[0,T], \qquad (۱۹)$$

که در آن c ثابت حقیقی مثبت است.
اکنون از رابطه‌ی (۱۸) می‌توان نشان داد که ثابت حقیقی مثبت k وجود دارد به‌طوری‌که داریم:

$$\int_0^T(E_n'(s))^2ds\le kh^6. \qquad (۲۰)$$

و با استفاده از روابط (۱۹) و (۲۰) رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$\|E_n\|^2_{\mathcal{H}_2^1[0,T]}\le lh^6,$$

که در آن l ثابت حقیقی مثبت است.
بنابراین ثابت حقیقی d وجود دارد، به‌طوری‌که داریم:

$$\|y-y_n\|_\infty\le dh^3,$$

و بنابراین برهان تمام است.

قضیه ۱۰: فرض کنید y_n جواب تقریبی مسئله‌ی (۹) در فضای هسته‌ی بازتولید ${}_c\mathcal{H}_2^6[0,T]$ و همچنین وارون عملگر $\mathfrak{L}$ کران‌دار باشد. اگر $0=t_1<t_2<\dots<t_n=T$ افراز یکنواخت و $w_{k,i},G\in C^6[0,T]$، آن‌گاه داریم:

$$\|y-y_n\|_\infty\le dh^5,\ h=\frac{T}{n-1},$$

که در آن d یک ثابت حقیقی مثبت است.
برهان: همان‌طوری‌که می‌دانیم

$$E_n(t_i)=0,\ 0<i<n$$

و لذا با به‌کارگیری قضیه‌ی رول داریم:

$$E_n'(\varsigma_i)=0,\varsigma_i\in[t_i,t_{i+1}],\ i=1,2,\dots,n-1,$$

با استفاده مکرر از قضیه‌ی رول داریم:

$$E_n''(\sigma_i)=0,\sigma_i\in[\varsigma_i,\varsigma_{i+1}],\ i=1,2,\dots,n-2,$$
$$E_n'''(\zeta_i)=0,\zeta_i\in[\sigma_i,\sigma_{i+1}],\ i=1,2,\dots,n-3,$$
$$E_n^{(4)}(\tau_i)=0,\tau_i\in[\zeta_i,\zeta_{i+1}],\ i=1,2,\dots,n-4,$$

فرض کنید $p_i(E_n^{(4)};t)$ چندجمله‌ای درون‌یاب $E_n^{(4)}$ در نقاط τ_i و τ_{i+1} باشد، در این‌صورت داریم:

$$p_i(E_n^{(4)};t)=0.$$

با محاسبه‌ی خطای درونیاب روی بازه $[t_1,\tau_2]$ داریم:

$$E_n^{(4)}(t)=E_n^{(4)}(t)-p_1(E_n^{(4)};t)|_{[t_1,\tau_2]}$$

$$=\frac{(t-\tau_1)}{(\tau_2-\tau_1)}\int_{\tau_2}^{t}(\tau_2-s)E_n^{(6)}(s)ds$$
$$+\frac{(t-\tau_2)}{(\tau_1-\tau_2)}\int_{\tau_1}^{t}(\tau_1-s)E_n^{(6)}(s)ds,$$
$$t\in[t_1,\tau_2].$$

از آنجایی‌که $E_n^{(6)}\in C[0,T]$، لذا داریم:

$$\max_{t\in[t_1,\tau_2]}|E_n^{(4)}(t)|\le a_1h^2,$$

که در آن a_1 مقدار ثابت حقیقی مثبت است.
علاوه‌براین برای $t\in[\tau_i,\tau_{i+1}]$ داریم:

$$E_n^{(4)}(t)=E_n^{(4)}(t)-p_i(E_n^{(4)};t)|_{[\tau_i,\tau_{i+1}]}$$
$$=\frac{(t-\tau_i)}{(\tau_{i+1}-\tau_i)}\int_{\tau_{i+1}}^{t}(\tau_{i+1}-s)E_n^{(6)}(s)ds \qquad (۲۱)$$
$$+\frac{(t-\tau_{i+1})}{(\tau_i-\tau_{i+1})}\int_{\tau_i}^{t}(\tau_i-s)E_n^{(6)}(s)ds$$
$$,\ t\in[\tau_i,\tau_{i+1}],i=2,3,\dots,n-6.$$

بنابراین با استفاده از رابطه‌ی (۲۱) رابطه‌ی زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$|E_n^{(4)}(t)|\le a_ih^2,\tau_i\le t\le\tau_{i+1}, \quad i=2,3,\dots,n-6, \qquad (۲۲)$$

که در آن a_iها به ازای $i=2,3,\dots,n-6$ مقادیر حقیقی مثبت هستند. به طور مشابه می‌توان نشان داد:

$$\max_{t\in[\tau_{n-5},t_n]}|E_n^{(4)}(t)|\le a_{n-5}h^2, \qquad (۲۳)$$

که در آن a_{n-5} ثابت حقیقی مثبت است. با استفاده از روابط (۲۱)، (۲۲) و (۲۳) داریم:

$$\max_{t\in[0,T]}|E_n^{(4)}(t)|\le ah^2,\ a=\max_{1\le i\le n-5}\{a_i\}.$$

در هر زیربازه $[t_i,t_{i+1}]$ داریم:

$$|E_n'''(t)|=\left|\int_{\tau_i}^{t}E_n^{(4)}(s)ds\right|$$
$$\le\|E_n^{(4)}(t)\|_\infty|t-\tau_i|\le b_ih^3,$$

که در آن b_iها به ازای $i=1,2,\dots,n-3$ مقادیر حقیقی مثبت هستند. بنابراین داریم:

$$|E_n'''(t)|\le bh^3,\ t\in[0,T],$$

که در آن b ثابت حقیقی مثبت است. به طور مشابه داریم:

$$|E_n''(t)|\le ch^4, t\in[0,T],$$
$$|E_n'(t)|\le kh^5,\ t\in[0,T], \qquad (۲۴)$$
$$E_n(t)|\le lh^6,\ t\in[0,T], \qquad (۲۵)$$

که در آن c ، k و l مقادیر حقیقی مثبت هستند.
با توجه به رابطه‌ی (۲۴) می‌توان نشان داد که ثابت حقیقی مثبت e وجود دارد به‌طوری‌که داریم:

$$\int_0^T(E_n'(s))^2ds\le eh^{10}. \qquad (۲۶)$$

از روابط (۲۵) و (۲۶) نتیجه می‌شود:

$$\|E_n\|^2_{\mathcal{H}_2^1[0,T]}\le rh^{10},$$

که در آن r ثابت حقیقی مثبت است.
و بنابراین ثابت حقیقی d وجود دارد به‌طوری‌که داریم:

$$\|y-y_n\|_\infty\le dh^5,$$

و بنابراین برهان تمام است.

قضیه ۱۱: فرض کنید y_n جواب تقریبی مسئله‌ی (۱۰) در فضای هسته‌ی بازتولید $_c\mathcal{H}_2^4[0,T]$ و همچنین وارون عملگر $\mathfrak{L}$ کران‌دار باشد. اگر $0=t_1<t_2<\dots<t_n=T$ افراز یکنواخت و $w_{k,i},G\in C^2[0,T]$، آن‌گاه داریم:

$$\| y - y_n \|_\infty \le dh,\ \ h = \frac{T}{n-1},$$

که در آن d یک ثابت حقیقی مثبت است.

برهان: مشابه برهان قضیه‌ی ۸ می‌توان این قضیه را نیز اثبات نمود.

قضیه ۱۲: فرض کنید y_n جواب تقریبی مسئله‌ی (۱۰) در فضای هسته‌ی بازتولید ${}_c\mathcal{H}_2^6[0,T]$ و همچنین وارون عملگر $\mathfrak{L}$ کران‌دار باشد. اگر $0=t_1<t_2<...<t_n=T$ افراز یکنواخت و $w_{k,i}, G\in C^4[0,T]$، آن‌گاه داریم:

$$\| y - y_n \|_\infty \le dh^3,\ \ h = \frac{T}{n-1},$$

که در آن d ثابت حقیقی مثبت است.

برهان: مشابه برهان قضیه‌ی ۹ می‌توان این قضیه را نیز اثبات نمود.

قضیه۱۳: فرض کنید y_n جواب تقریبی مسئله (۱۰) در فضای ${}_c\mathcal{H}_2^6[0,T]$ و همچنین وارون عملگر $\mathfrak{L}$ کران‌دار باشد. اگر $0=t_1<t_2<...<t_n=T$ افراز یکنواخت و $w_{k,i}, G\in C^6[0,T]$، آن‌گاه داریم:

$$\| y - y_n \|_\infty \le dh^5,\ h = \frac{T}{n-1},$$

که در آن d یک ثابت حقیقی مثبت است.

برهان: مشابه برهان قضیه‌ی ۱۰ می‌توان این قضیه را نیز اثبات نمود.

۵- مثال‌ها

در این قسمت برای نشان دادن دقت روش هسته‌ی بازتولید، سه مثال عددی را در نظر می‌گیریم. نتایج به‌دست‌آمده از مثال‌ها را با روش‌های موجود دیگر [۴، ۱۲، ۱۴] مقایسه می‌کنیم.

در مثال‌های عددی، برای نشان دادن دقت جواب تقریبی، خطای مطلق زیر را گزارش می‌کنیم:

$$er_n^m(t) = | y_{exact}(t) - y_n(t) |,\ y_n \in_c \mathcal{H}_2^m.$$

مثال ۱: معادله دیفرانسیل تأخیری غیرخطی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} y'(t) = 1 - 2y^2(\frac{t}{2}), \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

برای این مسئله $y(t) = \sin(t)$ است.

برای حل این مثال، سه فضای هسته‌ی بازتولید ${}_c\mathcal{H}_2^3[0,1]$، ${}_c\mathcal{H}_2^4[0,1]$ و ${}_c\mathcal{H}_2^6[0,1]$ را در نظر می‌گیریم. با انتخاب نقاط گره $\{t_i = \frac{i}{n}\}_{i=1}^n$ و انتخاب $n=15$، جواب تقریبی معادله‌ی مذکور را به‌دست می‌آوریم. در جدول ۱ مقادیر خطای مطلق گزارش شده است که گویای این مطلب است که خطای تقریب در

$$G(t) = e^{-t}(-2\sin(2t)$$
$$+2\sin(\frac{t}{2})\cos^2(\frac{t}{2}) + \sin(\frac{t}{2})\cos(t)).$$

${}_c\mathcal{H}_2^5[0,1]$ نسبت به فضای ${}_c\mathcal{H}_2^3[0,1]$ و ${}_c\mathcal{H}_2^4[0,T]$ در برخی نقاط گرهی کمتر است. همان‌طور که در قضایای تقریب خطا بیان شد با افزایش مرتبه‌ی فضا بایست جواب تقریبی دقیق‌تر باشد. این موضوع در این مثال واضح است زیرا در فضاهای مرتبه بالاتر جواب تقریبی به نظر دقیق‌تر است. برای مثال ۱ در جواب تقریبی دقیق‌تر ${}_c\mathcal{H}_2^5[0,1]$ از ${}_c\mathcal{H}_2^3[0,1]$ و ${}_c\mathcal{H}_2^4[0,1]$ است.

جدول ۱: خطای مطلق جواب تقریبی در دو فضای هسته‌ی بازتولید مختلف (مثال ۱)

	er_{15}^{3}	er_{15}^{4}	er_{15}^{5}
t_i	$m=3$	$m=4$	$m=5$
0.0	0.0	0.0	0.0
0.1	3.692×10^{-4}	1.558×10^{-4}	3.545×10^{-5}
0.2	8.389×10^{-4}	5.109×10^{-4}	8.575×10^{-4}
0.3	4.939×10^{-4}	1.754×10^{-4}	1.456×10^{-4}
0.4	5.142×10^{-3}	8.812×10^{-4}	3.593×10^{-4}
0.5	3.567×10^{-3}	3.173×10^{-4}	3.967×10^{-4}
0.6	7.176×10^{-4}	2.695×10^{-4}	2.714×10^{-4}
0.7	8.178×10^{-4}	1.918×10^{-4}	2.256×10^{-4}
0.8	9.374×10^{-3}	5.367×10^{-4}	2.173×10^{-4}
0.9	7.141×10^{-5}	2.799×10^{-5}	4.532×10^{-6}
1.0	6.194×10^{-4}	5.166×10^{-4}	2.617×10^{-4}

جدول ۲: مقایسه بین خطای مطلق جواب‌های روش هسته‌ی بازتولید و روش [۱۳] (مثال۲)

	er_{50}^{3} $m=3$	er_{50}^{4} $m=4$	$Doha\ \&etal.li$ 0[۱۳] $\alpha=\beta=-\frac{1}{2}$	$Doha\ \&etal.li$ 0[۱۳] $\alpha=\beta=\frac{1}{2}$
t_i			$k=24$	$k=24$
0.00	0.00	0.00	1.890×10^{-1}	3.850×10^{-2}
0.5	3.961×10^{-6}	4.468×10^{-7}	1.625×10^{-5}	7.151×10^{-5}
1.0	8.318×10^{-6}	4.272×10^{-7}	1.223×10^{-4}	2.376×10^{-4}
1.5	5.227×10^{-6}	3.570×10^{-6}	4.940×10^{-5}	2.272×10^{-4}
2.0	3.102×10^{-4}	4.761×10^{-4}	2.163×10^{-5}	4.426×10^{-4}
2.5	5.917×10^{-3}	1.179×10^{-5}	1.360×10^{-4}	3.820×10^{-4}
3.0	1.826×10^{-3}	4.623×10^{-5}	1.879×10^{-4}	1.726×10^{-4}
3.5	5.603×10^{-3}	2.789×10^{-3}	1.105×10^{-3}	4.221×10^{-4}
4.0	1.876×10^{-3}	4.762×10^{-4}	1.029×10^{-3}	2.764×10^{-4}

جدول ۳: مقایسه بین خطای مطلق روش هسته‌ی بازتولید و روش‌های [۱۵، ۱۴] (مثال ۳)

	er_{40}^{4}	er_{40}^{5}	$Tohidi\ \&etal.li$ 2[15]	$Yalinbas\ \&etal.li$ 1[14]
t_i	$m=4$	$m=5$	$k=5$	$k=5$
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.2	7.981×10^{-8}	6.515×10^{-8}	3.69×10^{-7}	4.75×10^{-6}
0.4	6.564×10^{-7}	9.341×10^{-8}	2.37×10^{-6}	6.14×10^{-5}
0.6	4.109×10^{-8}	5.050×10^{-8}	5.96×10^{-6}	2.48×10^{-4}
0.8	4.672×10^{-8}	2.721×10^{-8}	3.48×10^{-5}	6.20×10^{-4}
1.0	3.254×10^{-8}	2.412×10^{-8}	2.03×10^{-4}	1.19×10^{-3}

مثال ۲: در این مثال، معادله‌ی تأخیری خطی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} y'(t) = -y(t) + w_1(t)y(\frac{t}{2}) \\ +w_2(t)y(\frac{t}{4}) + G(t), \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

که در آن

$$w_1(t) = -e^{-0.5t}\sin(0.5t), w_2(t) = -2e^{-0.75t}\cos(0.5t)\sin(0.25t),$$

و برای این مسئله $y(t) = e^{-2t}\cos(2t)$ است. برای حل این مثال دو فضای هسته‌ی بازتولید ${}_c\mathcal{H}_2^3[0,4]$ و ${}_c\mathcal{H}_2^4[0,4]$ را در نظر می‌گیریم. با انتخاب نقاط گرهی $\{t_i = \frac{4i}{n}\}_{i=1}^n$ و انتخاب $n=50$، جواب تقریبی معادله‌ی مذکور را به‌دست می‌آوریم. مقادیر خطای مطلق برای نقاط گرهی در جدول ۲ گزارش شده است. جدول ۲ نشان می‌دهد که جواب تقریبی به‌دست آمده در دو فضای جواب ${}_c\mathcal{H}_2^3[0,4]$ و ${}_c\mathcal{H}_2^4[0,4]$ دقیق‌تر از نتایج مراجع [۴] است.

مثال ۳: معادله‌ی دیفرانسیل تأخیری خطی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} y'''(t) = -y(t) - y(t-0.3) + e^{-t+0.3}, \\ y(0) = 1, y'(0) = -1,\ y''(0) = 1, \end{cases}$$

برای این مسئله $y(t) = e^{-t}$ است.

برای حل این مثال دو فضای هسته‌ی بازتولید ${}_c\mathcal{H}_2^4[0,1]$ و ${}_c\mathcal{H}_2^5[0,1]$ را در نظر می‌گیریم. با انتخاب نقاط گرهی $\{t_i = \frac{i}{n}\}_{i=1}^n$ و انتخاب $n = 40$، جواب تقریبی معادله‌ی مذکور را به‌دست می‌آوریم. مقادیر خطای مطلق برای نقاط گرهی در جدول ۳ گزارش شده است. نتایج جدول ۳ نشان می‌دهد تقریب‌های به‌دست‌آمده از روش در فضای هسته باز تولید ${}_c\mathcal{H}_2^4[0,1]$ و ${}_c\mathcal{H}_2^5[0,1]$ دقیق‌تر از نتایج مراجع [۱۲-۱۴] است.

۶- نتیجه‌گیری و پیشنهادات

در این مقاله، روش هسته‌ی بازتولید، معادلات دیفرانسیل تاخیری را در نظر گرفتیم. ابتدا فضای هسته‌ی بازتولید را با توجه به‌صورت کلی مسئله و شرایط حاکم بر آن تعریف کرده و سپس هسته‌ی بازتولید را با حل دستگاهی از معادلات جبری خطی به‌صورت تابعی چند ضابطه‌ای به‌دست آوردیم. توابع پایه متعامد یکه را با فرایند متعامدسازی گرام–اشمیت تشکیل داده و به عنوان توابع پایه در تقریب جواب، مورد استفاده قرار دادیم. همان‌طوری‌که مشاهده شد، برای حل مسائل غیرخطی، سری جواب ساخته شده شامل عبارت‌های مجهول است، لذا نمی‌توانیم جواب را به طور مستقیم به‌دست آوریم. بنابراین برای به‌دست‌آوردن جواب تقریبی، یک الگوریتم کمینه‌سازی پیشنهاد کردیم. همچنین چندین تقریب خطا زمانی که مسئله خطی است، ارائه نمودیم که در جدول ۴ خلاصه‌ای از آن آورده شده است.

جدول ۴: مرتبه‌ی خطا در فضای هسته‌ی بازتولی ${}_c\mathcal{H}_2^m[0,T]$.

$r=1$	$m=3$	$m=4$	$m=5$
	$O(h)$	$O(h^3)$	$O(h^5)$
$r=2$	$m=4$	$m=5$	$m=6$
	$O(h)$	$O(h^3)$	$O(h^5)$

فهرست منابع

[1] Aronszajn, N. (1951). Theory of reproducing kernels. Cambridge, MA: Harvard niversity.

[2] Cui, M. and Geng, F. (2007). A computational method for solving one-dimensional variable-coefficient Burgers equation. Applied Mathematics and Computation, **188**, 1389-1401.

[3] Cui, M. and Lin, Y. (2009). Nonlinear numerical analysis in the reproducing Kernel space ،NY: Nova Science Publ, New York, .

[4] Doha, E.H., Bhrawy, A.H., Blaleanu, D. and Hafez, R. M. (2014). A new Jacobi rational–Gauss collocation method for numerical solution of generalized pantograph equations. Applied Numerical Mathematics, **77**, 43-54.

[5] Fardi, M. Ghasemi, M. (2016). Solving nonlocal initial-boundary value problems for parabolic and hyperbolic integro-differential equations in reproducing kernel hilbert space, Numerical Methods for Partial Differential Equations, **3**, 174-198.

[6] Fardi, M., Ghasemi, M. and Khoshsiar Ghaziani, R. (2016). The Reproducing Kernel Method for Some Variational Problems Depending on Indefinite Integrals, Mathematical Modelling and Analysis, **21**, 412-429.

[7] Geng, F. and Cui, M. (2012). A reproducing kernel method for solving nonlocal fractional boundary value problems, Applied mathematics Letters, **25**, 818-823.

[8] Geng, F. Z. and Li, X. M. (2012). A New Method for Riccati Differential Equations Based on Reproducing Kernel and Quasiline-arization Methods, Abstract and Applied Analysis, 1-8.

[9] Ghasemi, M., Fardi, M. and Khoshsiar Ghaziani, R. (2015). Numerical solution of nonlinear delay differential equations of fractional order in reproducing kernel Hilbert space, Applied Mathematics and Computation, **268**, 815-831.

[10] Ismail, H. N., Raslan, K. and Rabboh, A. A. (2004). Adomian decomposition method for Burgers–Huxley and Burgers–Fisher equations. Applied Mathematics and Computation, **159**, 291-301.

[11] Jiang, W., Cui, M. and Lin, Y. (2010). Anti-periodic solutions for Rayleigh-type equations via the reproducing kernel Hilbert space method, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, **15**, 1754-1758.

[12] Tohidi. E., Bhrawy, A. H. and Erfani, K. (2013). A collocation method based on Bernoulli operational matrix for numerical solution of generalized pantograph equation, Applied Mathematical Modelling, **37**, 4283-4294.

[13] Vahdati, S. Fardi, M. and Ghasemi, M. (2018). Option pricing using a computational method based on reproducing kernel, Journal of Computational and Applied Mathematics, **328**, 252-266.

[14] Yalinbas, S., Aynigul, M. and Sezer, M. (2011). A collocation method using Hermi- -te polynomials for approximate solution of pantograph equations. Journal of the ranklin Institute, **348**,1128-1139.

[15] Zhou, Y., Cui, M. and Lin, Y. (2009). Numerical algorithm for parabolic

problems with non- Classical conditions, Journal of Computational and Applied Mathematics, **230**, 770–780.