دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال ششم، شماره بیست و پنجم، مرداد و شهریور ۱۳۹۹
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

رویکردی برای به‌دست آوردن جواب‌های کارای سره نزدیک به نقطه ایدآل در بهینه‌سازی چندهدفه

بهنام حذار[۱]، قاسم توحیدی[۲]*، بهروز دانشیان[۳]

(۱) گروه ریاضی، واحد لاهیجان، دانشگاه آزاد اسلامی، لاهیجان، ایران
(۲و۳) گروه ریاضی، واحد تهران مرکزی، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۷/۱۰/۰۱ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۹/۰۴/۲۹

چکیده

توازن میان توابع هدف در بهینه‌سازی چندهدفه یکی از ابزارهای تفسیر و بررسی جواب‌های کارا است. جواب‌های کارای سره یکی از مفاهیم مهم از نظر تئوری و عملی می‌باشد که نشان دهنده رفتار توابع هدف طی یک فرایند تغییر می‌باشد؛ جواب‌های کارای سره جواب‌های کارایی هستند که ناهنجاری‌های توابع هدف در بعضی از نقاط را فیلتر می‌کنند و این به تصمیم‌گیری برای به دست آوردن جواب‌های با اهمیت بیشتر توسط مدیریت کمک شایانی خواهد کرد. یکی از مهمترین ابزارهای به دست آوردن جواب با توازن کراندار در بهینه‌سازی چندهدفه، روش اسکالرسازی مجموع وزن‌دارشده است که بسیاری از نویسندگان این نوع از اسکالرسازی را در بهینه‌سازی تعاملی بررسی کرده‌اند. این مقاله روشی برای به دست آوردن جواب‌های کارای سره نزدیک به نقطه ایدآل با دیدگاه تئوری و تعاملی و با استفاده از اسکالرسازی وزنی ارائه می‌دهد. با توجه به اینکه نزدیکی به نقطه ایدآل می‌تواند یکی از ترجیحات تصمیم‌گیرنده باشد؛ این روش، ترجیحات تصمیم‌گیرنده را بدون از دست دادن تئوری در نظر می‌گیرد. بنابراین این مقاله رویکردی برای یافتن جواب‌های کارای سره نزدیک به نقطه ایدآل ارائه می‌دهد.

واژه‌های کلیدی: بهینه‌سازی چندهدفه، کارای سره، توازن، نقطه ایدآل، اسکالرسازی مجموع وزن‌دارشده.

* عهده دار مکاتبات
Email: gh_tohidi@iauctb.ac.ir

۱- مقدمه

یکی از زمینه‌های پرکاربرد برنامه‌ریزی ریاضی، مسایل بهینه‌سازی چند هدفه می‌باشد. این نوع از مسایل کاربردهای فراوانی در دنیای واقعی دارند. یکی از مباحث پراهمیت در بهینه‌سازی چندهدفه، اسکالرسازی[1] می‌باشد [4]. یکی از مهم‌ترین روش‌های اسکالرسازی روش اسکالرسازی مجموع وزن‌دار شده[2] است. جواب‌های اسکالرسازی با مجموع وزن‌دارشده در بهینه‌سازی چندهدفه، به ویژه وقتی که وزن‌های به کاربرده شده اکیداً مثبت باشند، اهمیت ویژه‌ای دارند و در ارتباط با این موضوع مفاهیم توازن و جواب‌های کارای سره[3] معرفی شده‌اند [4,5]. توازن یا موازنه[4] بین دو تابع هدف بصورت بصورت نسبت تغییرات بهبود یک تابع هدف به تغییرات تابع دیگر در جهت بدتر شدن مقدار آن، سنجیده می‌گردد. موازنه توابع، اطلاعات مفیدی در رابطه با رفتار توابع هدف در یک نقطه کارا ارائه می‌دهد به طوری که تصمیم گیرنده را در انتخاب تصمیم ارجح یاری می‌دهد [4]. یکی از شاخه‌های مهم در بهینه‌سازی چندهدفه، بهینه سازی چند هدفه تعاملی می‌باشد. بهینه‌سازی چند هدفه تعاملی نوعی بهینه‌سازی با دیدگاه عملی و مدیریتی می‌باشد و معمولاً به دنبال برآورد کردن ترجیحات تصمیم‌گیرنده است که در این روش یک تعامل سازنده مابین تحلیل‌گر مساله و تصمیم‌گیرنده برقرار می‌شود [6,7]. موازنه بین توابع هدف یکی از مهمترین مفاهیم کاربردی در ادبیات بهینه‌سازی چندهدفه تعاملی نیز می‌باشد. در ارتباط با این مطلب همان‌طور که ذکر شد جواب‌های کارای سره جواب‌هایی با توازن‌های متناهی هستند؛ بطوریکه این جواب‌ها می‌توانند گزینه‌های مناسبی برای تصمیم‌گیری باشند و تصمیم‌گیرنده می‌تواند از بین آنها یک جواب ارجح را انتخاب کند [6,8]. با در نظر گرفتن این موضوع که یک جواب کارای سره جوابی است که برای هر تابع هدف که بتوان در آن بهبودی ایجاد کرد یک توازن متناهی موجود باشد. به دلیل اهمیت این نقاط، محققان زیادی به دنبال به‌دست آوردن آنها بوده و به بررسی ارتباطشان با اسکالرسازی، به ویژه روش مجموع وزن‌دار شده، از منظرهای مختلف مفهوم کارایی سره، پرداخته‌اند و در این راستا تعریف‌هایی با دیدگاه‌های مختلف ارائه داده‌اند [4,5].

توازن میان توابع هدف در بهینه‌سازی چندهدفه یکی از مهمترین مفاهیم و ابزارهای تفسیر و بررسی جواب‌های کارا است. یک توازن فرایندی است که در آن بهبود هر تابع هدفی منجر به بدتر شدن حداقل یک تابع هدف دیگر خواهد شد. نسبت این بهبود به بدتر شدن متناظر یک توازن میان آن توابع هدف نامیده می‌شود [4,5].

برنامه‌ریزی چندهدفه زیر را در نظر بگیرید:

$$\min_{x\in X} f(x) = \left(f_1(x), \dots, f_p(x)\right). \qquad (۱)$$

که در آن اغلب توابع هدف در تضاد با هم هستند و $f_i: R^n \to R$ برای $i = 1, \dots, p$. هم‌چنین تصویر مجموعه شدنی X تحت تابع f را با $Y = f(X)$ نشان می‌دهیم .مجموعه شدنی X را به صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$X = \begin{Bmatrix} x \in C \subseteq R^n: g_j(x) \le 0, \\ j = 1, \dots, m \end{Bmatrix}.$$

یک جواب مانند x را جواب نشدنی گوییم، هرگاه در شرایط مجموعه X صدق نکند. از طرفی، اگر جواب x همه محدودیت‌ها و حدود متغیرهای مجموعه X را برآورده سازد، به عنوان یک جواب شدنی شناخته می‌شود. مجموعه‌ی همه جواب‌های شدنی، ناحیه‌ی شدنی، فضای تصمیم یا فضای جستجو را تشکیل می‌دهد و آن را با X نشان می‌دهیم.

تعریف ۱. (مفهوم غالب بودن)

اگر $x_1, x_2 \in X$ و $f(x_1) \le f(x_2)$ گوییم x_1 غالب بر x_2 است و $f(x_1)$ غالب بر $f(x_2)$ است. که در آن $f(x_1) \le f(x_2)$ هرگاه $f_k(x_1) \le f_k(x_2)$ برای هر $k = ۱, \dots, p$ و وجود داشته باشد $i \in \{۱, \dots, p\}$ به‌طوریکه $f_i(x_1) < f_i(x_2)$ [4,5].

1. Scalarization
2. Weighted sum scalarization
3. Proper efficient solution
4. Trade- off

تعریف ۲. (مفهوم کارایی و بهینگی پارتو)
جواب شدنی $\hat{x} \in X$ کارا یا بهینه پارتو گفته می‌شود اگر نقطه دیگری مانند $x \in X$ موجود نباشد بطوریکه $f(x) \leq f(\hat{x})$. اگر $\hat{x}$ کارا باشد، $f(\hat{x})$ نقطه غیرغالب نامیده می‌شود. مجموعه همه جواب‌های کارای $\hat{x} \in X$ با X_E نشان داده می‌شود و مجموعه کارا نامیده می‌شود. مجموعه تمام نقاط غیرغالب $\hat{y} = f(\hat{x}) \in Y$ که در آن $\hat{x} \in X_E$ با Y_N نشان داده می‌شود و مجموعه غیرغالب نامیده می‌شود [4,5].

تعریف۳. (مفهوم کارایی سره از نظر جئوفریون)
جواب شدنی $\hat{x} \in X$ را یک جواب کارای سره گویند هرگاه عدد $M > 0$ موجود باشد طوری‌که برای هر $x \in X$ و هر اندیس i با خاصیت $f_i(x) < f_i(\hat{x})$ یک اندیس j با خاصیت $f_j(\hat{x}) < f_j(x)$ موجود باشد به‌طوری که

$$\frac{f_i(\hat{x}) - f_i(x)}{f_j(x) - f_j(\hat{x})} < M.$$

مجموعه تمامی جواب‌های کارای سره با X_{PE} نشان داده می‌شود [4,5, 9].

تعریف۴. (مفهوم کارایی سره از نظر کوهن و تاکر) جواب شدنی $\hat{x} \in X$ را یک جواب کارای سره به مفهوم کوهن و تاکر گویند هرگاه دستگاه خطی زیر جواب نداشته باشد:

$$\nabla f_i(\hat{x})^T d \leq 0, \forall\, i = 1, \dots, p$$
$$\nabla f_k(\hat{x})^T < 0, for\ some\ k \in \{1, \dots, p\}$$
$$\nabla g_j(\hat{x})^T \leq 0,$$
$$\forall j \in \{j = 1, \dots, m: g_j(\hat{x}) = 0\}.$$

که در آن مجموعه $\{j = 1, \dots, m: g_j(\hat{x}) = 0\}$ را مجموعه قیود فعال می‌نامند [4, 10].

قضیه ۱. فرض می‌کنیم مساله چندهدفه (۱) یک مساله محدب و توابع هدف و قیود بطور پیوسته دیفرانسیل‌پذیر باشد. آنگاه هر نقطه کارای سره به مفهوم کوهن و تاکر یک نقطه کارای سره به مفهوم جئوفریون است[4].

قضیه ۲. فرض می‌کنیم مسأله چندهدفه (۱) مسأله‌ای محدب و دیفرانسیل پذیر باشد و همچنین برای نقطه مفروض $\hat{x}$ داشته باشیم:
برای $d \in R^n$ با $\nabla g_j(\hat{x})^T d \leq 0,$ که در آن $j \in \{j = 1, \dots, m: g_j(\hat{x}) = 0\}$؛ عدد حقیقی $\bar{t} > 0$، تابع $l: [0, \bar{t}] \rightarrow R^n$ و مقدار مثبت α موجود باشند به طوری که $l(0) = \hat{x}$،

$$g(l(t)) \leq 0, \quad \forall\, t \in [0, \bar{t}],$$

و $l'(0) = \alpha d$. آنگاه اگر $\hat{x}$ کارای سره به مفهوم جئوفریون باشد کارای سره به مفهوم کوهن و تاکر نیز می‌باشد[4].

تعریف۵. (نقطه ایده‌آل[5])
نقطه $y^I = (y_1^I, \dots, y_p^I)$ که برای $k = 1,\dots, p$، به صورت زیر بدست می‌آید:

$$y_k^I = \min_{x \in X} f_k(x) \qquad (۲)$$

نقطه ایده‌آل مساله بهینه‌سازی چندهدفه نامیده می‌شود.

تعریف ۶. (نقطه ندیر[6])
نقطه $y^P = (y_1^P, \dots, y_p^P)$ که برای $k = 1,\dots, p$، به صورت زیر بدست می‌آید:

$$y_k^P = \max_{x \in X_E} f_k(x) \qquad (۳)$$

نقطه ندیر مساله بهینه‌سازی چند هدفه نامیده می‌شود [4].

تذکر: یادآور می شویم که در صورت بی کرانی یکی از توابع هدف در مسایل بهینه سازی چند هدفه، نقطه ایده آل وجود ندارد لذا ما با فرض وجود جواب بهینه برای تمام توابع هدف بحث را ادامه می‌دهیم.

5. Ideal point
6. Nadir point

به‌دست آوردن مقادیر نقطه ایده‌آل کار آسانی است، چون آن معادل با بهینه‌سازی تعدادی مسایل برنامه‌ریزی محدب است که معمولا جواب‌های بهینه آن به‌راحتی به دست می‌آیند. با این حال به‌دست آوردن مقادیر ندیر در حالت کلی کار خیلی مشکلی است (در واقع این مقادیر تنها در مسایل دوهدفه به‌راحتی به‌دست می‌آیند)[1].

در اغلب الگوریتم‌هایی که به جستجوی جواب‌های بهینه پارتو می‌پردازند، بردار ایده‌آل به عنوان یک جواب مرجع مورد استفاده قرار می‌گیرد. همچنین، همان‌گونه که در شکل ۱ مشخص است، جواب‌های نزدیک به بردار ایده آل جواب‌های بهتری هستند. به‌علاوه، بسیاری از الگوریتم‌ها، به منظور اسکالرسازی یا نرمال‌سازی نیازمند به دانستن حد پایین هر یک از توابع هدف هستند. در واقع، برخی از الگوریتم‌ها ممکن است نیاز به جوابی داشته باشند که مقدار هدف آن اکیداً از مقدار هدف هر جوابی در فضای جستجو بهتر باشد.

برای حل مسائل بهینه‌سازی چندهدفه در بیشتر موارد، چند مسأله تک‌هدفه نظیر آن مسأله چندهدفه حل می‌شود. فرآیند تبدیل مسأله چندهدفه به چنین مسائلی را اسکالرسازی می‌گویند. مسأله (۱) را در نظر بگیرید. در اسکالرسازی مجموع وزن‌دارشده، با ضرب کردن هر یک از اهداف در یک وزن نامنفی و جمع تمام اهداف وزن‌دار شده، یک تابع هدف واحد به صورت $\sum_{i=1}^{p}\lambda_i f_i(x)$ حاصل می‌گردد.

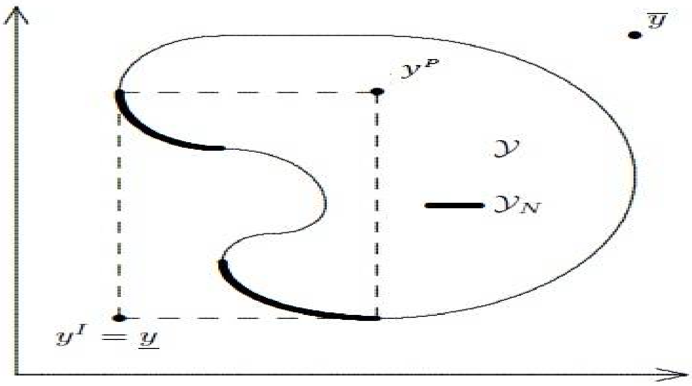
مسأله اسکالر متناظر با وزن نامنفی $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_p)$ به صورت زیر است:

$$\min_{x\in X}\sum_{i=1}^{p}\lambda_i f_i(x). \qquad (۴)$$

هر مساله بهینه‌سازی تک هدفه یک نقطه جواب بهینه خاص روی مرز پارتو تعیین می‌کند. از مزایای این روش ساده و پرکاربرد بودن آن است. برای مسائل محدب، این روش یافتن جواب‌هایی در سراسر مجموعه بهینه پارتو را تضمین می‌کند. اما این روش دارای معایبی است. برای مسائل بهینه‌سازی ترکیبی، مینیمم‌سازی و ماکزیمم سازی، باید تمامی اهداف را به یک نوع، مینیمم سازی یا ماکزیمم‌سازی، تبدیل کرد. توزیع یکنواخت مجموعه وزن‌ها تضمینی برای یکنواختی توزیع جواب‌های بهینه پارتو فراهم نمی‌کند. در این روش دو بردار وزنی متفاوت لزوما منجر به جواب‌های بهینه پارتو متفاوت نمی‌گردد. در بعضی از مسائل بهینه‌سازی چند هدفه، برای یک بردار وزنی خاص، ممکن است جواب‌های بهینه چندگانه‌ای وجود داشته باشند که هر کدام از این جواب‌ها به صورت ضعیف بر دیگر جواب‌ها غالب هستند. یکی دیگر از اشکالات اصلی اسکالرسازی مجموع وزن‌دارشده این است که روش فوق قادر به یافتن برخی از جواب‌های بهینه پارتو در فضای هدف نامحدب نیست.

لازم به ذکر است مسأله فوق یک مسأله بهینه‌سازی غیرخطی است و برای حل آن از الگوریتم‌های غیرخطی استفاده می‌شود [6, 11, 12, 13, 14, 15,16]. به عنوان مثال در [3] الگوریتمی برای حل مسائل حمل و نقل در حالت کاملا فازی پیشنهاد شده است که این الگوریتم، مساله‌ی حمل و نقل در حالت کاملا فازی را به یک مساله سه هدفه تبدیل و سپس از روش مجموع وزن‌دار شده در حل مسائل چندهدفه استفاده می کند و سپس مساله‌ی جدید را با روش سیمپلکس حل می‌نمایند. یادآور می‌شویم یک دسته از مهم‌ترین روش‌ها برای حل مسائل چندهدفه، استفاده از تکنیک‌های اسکالرسازی است. در این روش‌ها یک مسأله تک‌هدفه متناظر با مسأله چندهدفه حل می‌شود و ارتباط بین جواب‌های بهینه مسأله‌ی تک‌هدفه و جواب‌های کارای سره مسأله‌ی چندهدفه بررسی می‌شود.

در [2] ترکیبی از روش‌های اسکالرسازی مقید اصلاح شده (modified constrained) و مقید انعطاف‌پذیر (elastic constrained) در نظر گرفته شده و با کمک آن شرایطی لازم و کافی برای تولید جواب‌های تقریباً کارا (ضعیف، سره) ارائه شده است.



شکل (۱). یک مثال از نقطه ایدآل و نقطه ندیر

قضیه ۳.

۱) فرض کنید $x^* \in X$ یک جواب بهینه (۱) باشد. در اینصورت [1]:

اگر $\lambda > 0$ آنگاه $x^* \in X_{pE}$.

۲) فرض کنید X مجموعه محدب و $f_j(x)$، $j = 1,\dots, p$ توابع محدب باشند. در اینصورت:

اگر $x^* \in X_{pE}$ آنگاه $\lambda > 0$ وجود دارد که x^* جواب بهینه (۴) است.

۳) مسأله برنامه‌ریزی چندهدفه خطی را در نظر می‌گیریم:

اگر $\lambda > 0$ آنگاه $X_E = X_{PE}$ [4].

۲. نقاط کارا و فیلترکردن ناهنجاری در این نقاط

دو جواب شدنی $x, \hat{x} \in X$ از مسأله (۱) را با مقادیر تابع هدف $f(x)$ و $f(\hat{x})$ در نظر بگیرید. کسر

$$\frac{f_i(\hat{x}) - f_i(x)}{f_j(x) - f_j(\hat{x})}$$

می‌تواند تغییرات میان توابع f_i و f_j را در حالی که جواب $\hat{x}$ به سوی x حرکت می‌کند نشان دهد، که در آن

$$f_i(x) < f_i\ (\hat{x})$$

و

$$f_j\ (\hat{x}) < f_j(x).$$

بی‌کران بودن این کسر در حداقل یک نقطه x به عنوان یک معیار برای فیلتر کردن جواب‌های کارا توسط جئوفریون ارائه شد [19,18,17, 9, 8, 7, 6].

با توجه به اهمیت توازن‌های کراندار در بهینه‌سازی چندهدفه و مسائل کاربردی متناظر مانند مدیریت و صنایع این مقاله به بررسی جواب‌های کارا با توازن کراندار می‌پردازد. در واقع جواب‌های کارای سره به مفهوم جئوفریون مورد مطالعه قرار خواهند گرفت. جواب‌های کارای سره جواب‌های کارایی هستند که ناهنجاری‌های دیگر جواب‌های کارا را ندارد (با توجه به تعریف کوهن و تاکر یا جئوفریون)؛ زیرا که استفاده از جواب‌های کارای سره ناهنجاری‌های توابع هدف را در بعضی از نقاط از بین می‌برد و این به تصمیم‌گیری برای به دست آوردن جواب‌های با اهمیت بیشتر توسط مدیریت کمک شایانی خواهد کرد. از سویی نزدیک بودن جواب‌های کارای سره به نقطه ایدآل یکی از مهمترین اهداف مدیریت برای تصمیم‌گیری می‌تواند باشد یا بهتر است گفته شود مدیریت نزدیکی جواب‌های به دست آمده به نقطه ایدآل را یک محک برای انتخاب جواب در نظر می‌گیرد[6, 7].

مسأله چندهدفه زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\min \begin{array}{c} f(x) = \left(f_1(x), \dots, f_p(x)\right) \\ s.t.\, x \in X = \begin{Bmatrix} x \in R^n : g_j(x) \le 0, \\ j = 1, \dots, m \end{Bmatrix} \end{array} \qquad (۵)$$

که در آن توابع f_i و g_j توابعی دیفرانسیل‌پذیر می‌باشند. فرض می‌کنیم $\hat{x}$ یک جواب کارای پاراتوی مسأله (۵) باشد به طوریکه بردار ناصفر $\hat{d} \in R_+^p$ وجود داشته که

جواب دستگاه نامعادلات خطی زیر باشد:

$$\begin{aligned}&\nabla f_j(\hat{x})^T.d \le 0,\ \ \forall\, j=1,\dots,p\\&\nabla f_i(\hat{x})^T.d < 0,\ \ for\ some\\&i\in\{1,\dots,p\}\\&\nabla g_j(\hat{x})^T.d \le 0,\ \ \forall\, k=1,\dots,m\end{aligned} \tag{۶}$$

از آنجا که $\hat{x}$ یک جواب کارای پاراتو است پس اندیس $s\in\{1,\dots,p\}$ وجود دارد که $\nabla f_s(\hat{x})^T.\ \hat{d}=0$.
همچنین فرض می‌کنیم:

$$\nabla f_l(\hat{x})^T.\hat{d} = min_{i\in\{1,\dots,p\}}\nabla f_i(\hat{x})^T.\hat{d}<0\,.$$

براساس قضیه تیلور جواب کارای x موجود است به طوری که:

$$\begin{aligned}&f_s(x)-f_s(\hat{x})=o(\hat{d})\\&f_l(x)-f_l(\hat{x})=\nabla f_l(\hat{x})^T.\hat{d}+o(\hat{d})\end{aligned}$$

روشن است که اگر $f_s(x)$ بهبود یابد تابع هدف f_l بدتر می‌شود. اما نرخ رشد بدتر شدن اکیداً بیشتر از نرخ رشد بهبود می‌باشد، زیرا $\nabla f_l(\hat{x})^T.\hat{d}\neq 0$. این یک نوع ناهنجاری محاسباتی برای نقاط کارای پاراتو ایجاب می‌کند که برای نخستین بار توسط کوهن و تاکر ارائه شد [10, 20] و آنها سپس تعریف خود را از کارای سره به صورت تعریف ۴ ارائه دادند.

۳. کران بالای توازن‌ها در مسائل چندهدفه

جواب‌های کارای سره یکی از مفاهیم مهم از نظر تئوری و عملی می‌باشد که نشان دهنده رفتار توابع هدف طی یک فرایند تغییر می‌باشد؛ که ناهنجاری‌های به دست آمده در طی این فرایند یک جواب را از مجموعه جواب‌های کارای سره خارج می‌کند. اهمیت جواب‌های کارای سره در عمل بسیاری از نویسندگان و محققان را به سوی بررسی این مفهوم در ادبیات بهینه‌سازی تعاملی و تئوری بهینه‌سازی سوق داد برای مطالعه و اطلاعات بیشتر می‌توان به [6] و [19] رجوع کرد. در سال ۱۹۹۱ گرومل و فریرا [21] یک کران بالا برای توازن‌های متناهی و جواب‌های کارای سره به دست آوردند. آنها همچنین پیشنهادی برای تعیین وزن‌های اسکالرسازی وزنی ارائه دادند [21].

یک راه برای به‌دست آوردن نقاط کارای سره، استفاده از اسکالرسازی مجموع وزن‌دار شده است. در این روش به هر تابع هدف یک وزن نامنفی اختصاص داده و آن را به یک مسأله تک‌هدفه تبدیل می‌کنند. در حالتی که وزن‌های استفاده شده مثبت باشند جواب به دست آمده یک جواب کارای سره است ولی اگر حداقل یکی از وزن‌ها صفر باشد جواب بهینه حاصل الزاماً کارای سره نیست. یک جواب کارای سره در صورت تحدب، توسط یک مسأله مجموع وزن‌دار شده با وزن‌های مثبت به دست می‌آید اما اگر مسأله محدب نباشد تضمینی برای وجود یک وزن مثبت که نقطه کارای سره را شناسایی کند، نیست. البته فرض ما بر این است که اصل تحدب در مساله برقرار می‌باشد. درصورتیکه این اصل برقرار نباشد از روش‌های شناخته شده‌ای همچون محدودیت کشسانی و بنسون می‌توان برای شناسایی نقاط کارای سره استفاده نمود.

یکی از مهمترین اهداف در این مقاله انتخاب بهترین وزن برای بدست آوردن یک جواب کارای سره می‌باشد که کران بالای توازن‌های آن کمترین مقدار باشد زیرا در توازن‌های مناسب مقدار بهبود در یک تابع هدف با مقدار بدتر شدن در تابع هدف دیگر برابر است و می‌توان نشان داد این جواب به نقطه ایده‌آل نزدیکتر است، نقطه ایده‌آل نقطه‌ای است که در آن هر یک از توابع هدف بهینه خود را می‌گیرند. در اینجا سعی می‌شود مدلی برای انتخاب وزن‌های اسکالرسازی وزن‌دار شده به منظور به دست آوردن جواب‌های کارای سره با کوچکترین کران بالای توازن بین اهداف ارائه و حل گردد.

همانطور که گفته شد اگر λ یک بردار مثبت باشد هر جواب بهینه اسکالرسازی وزنی زیر یک جواب کارای سره است:

$$\min_{x\in X}\sum_{i=1}^{p}\lambda_i f_i(x) \tag{۷}$$

در ادامه رابطه بین کران بالای توازن‌های بین توابع هدف و مسأله اسکالر فوق بررسی می‌گردد.

فرض می‌کنیم که $\hat{x}$ یک جواب کارای سره باشد. و نیز فرض می‌کنیم که برای هر $x\in X$ و هر اندیس i با

$f_i(x) < f_i(\hat{x})$ یک اندیس j باشد که $f_j(\hat{x}) <$ $f_j(x)$ به طوری که:

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i(\hat{x}) \leq \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i(x).$$

گروملِ و فریرا [21] کران بالا برای توازن‌ها در جواب‌های کارای سره را به صورت زیر معرفی کردند:

$$\frac{f_i(\hat{x}) - f_i(x)}{f_j(x) - f_j(\hat{x})} \leq \frac{\lambda_j}{\lambda_i}, \qquad (۸)$$

بنابراین مقدار $\frac{\lambda_j}{\lambda_i}$ می‌تواند به عنوان یک کران بالا برای توازن‌های کراندار در نظر گرفته شود. در این راستا مجموعه Λ را برای تعیین جواب‌های کارای سره در نظر می‌گیریم:

$$\Lambda = \begin{Bmatrix} \lambda \in R^P : \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1, \\ \lambda_i > 0, \forall i = 1, \dots, p \end{Bmatrix}. \qquad (۹)$$

رابطه (۹) را در نظر بگیرید اگر $\lambda_i \to 0$ آنگاه توازن میان f_i و f_j بی‌کران است. بنابراین با بهبود مجموعه Λ به منظور جلوگیری ناهنجاری جواب‌های به دست آمده از اسکالرسازی (۷) به صورت زیر می‌توان به جواب‌های کارای سره رسید. مجموعه بهبود یافته را با Λ_ε نشان می‌دهیم که به صورت زیر است:

$$\Lambda_\varepsilon = \begin{Bmatrix} \lambda \in R^P : \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1, \\ \lambda_i \geq \varepsilon, \forall i = 1, \dots, p \end{Bmatrix} \qquad (۸)$$

که در آن ε یک عدد حقیقی مثبت می‌باشد.

کران بالای $\frac{\lambda_j}{\lambda_i}$ از رابطه (۸) را در نظر می‌گیریم. با تعریف Λ_ε به صورت (۱۰) روشن است که

$$\frac{\lambda_j}{\lambda_i} \leq \frac{1}{\varepsilon}.$$

بنابراین $\frac{1}{\varepsilon}$ می‌تواند یک کران بالای مناسب برای توازن‌های بین توابع هدف مسأله چندهدفه باشد.

۴ .تعیین بردار وزن با استفاده از اسکالرسازی مجموع وزن‌دار شده

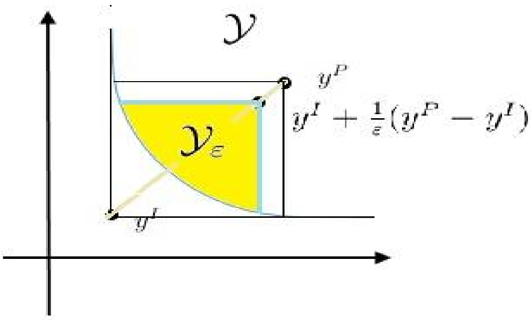
در این بخش ارتباط کارایی سره و اسکالرسازی مجموع وزن‌دار شده با توجه به مجموعه بهبود یافته Λ_ε را بیشتر مورد بررسی قرار می‌دهیم. همچنین به دنبال راهکاری برای به دست آوردن جواب‌های کارای سره‌ای هستیم که ترجیحات مدیریت و تصمیم‌گیرنده را برآورده کند. در این راستا سعی می‌گردد که جواب‌هایی که به نقطه ایدآل نزدیکتر باشند انتخاب گردند. نقطه ایدآل y^I و نقطه ندیر y^P را در نظر می‌گیریم. گروملِ و فریرا [21] مسأله اسکالر مجموع وزن‌دارشده را برای هر $\lambda \in \Lambda_\varepsilon$ در نظر گرفتند و نشان دادند که تحت شرط تحدب مسأله، جواب‌های بهینه مسأله اسکالر، نقطه $y^I + \frac{1}{\varepsilon}(y^P - y^I)$ را مغلوب می‌کنند بنابراین مجموعه

$$Y_\varepsilon := y^I + \frac{1}{\varepsilon}(y^P - y^I) - R_+^p$$

شامل همه جواب‌های کارای سره تولید شده توسط بردارهای Λ_ε می‌باشد که در آن $\frac{1}{\varepsilon}$ کران بالای توازن‌های متناظر آن جواب‌های کارای سره می‌باشد. شکل ۲ این موضوع را به صورت هندسی شرح می‌دهد.

اگر دقت شود هر چه ε افزایش یابد مجموعه Y_ε کوچکتر و مقدار $y^I + \frac{1}{\varepsilon}(y^P - y^I)$ به y^I نزدیکتر می‌گردد. این انگیزه‌ای است تا در جهت معرفی شده $(y^P - y^I)$ به پیدا کردن نقاطی از مجموعه جواب‌های کارای سره بپردازیم که نزدیک به نقطه ایدآل هستند. در این راستا مدل زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} &\max \varepsilon \\ &\min \sum_{i=1}^{p} \lambda_k f_k(x) \\ &s.t.\, x \in X, \qquad (۱۱) \\ &\sum_{i=1}^{p} \lambda_k = 1, \\ &\lambda_k \geq \varepsilon, \;\; k = 1, \dots, p \\ &\varepsilon \geq 0. \end{aligned}$$



شکل (۲). قطاع شامل تمام جواب‌های کارای سره با کران بالای $\frac{1}{\varepsilon}$ برای توازن‌های متناهی

مسأله بهینه‌سازی فوق با ایده افزایش ε به اندازه‌ای که بردار وزن مثبت λ موجود باشد که یک جواب کارای سره متناسب با ε حاصل شود ارائه شده است. یا به عبارت دیگر اگر $(x^*, \lambda^*, \varepsilon^*)$ یک جواب بهینه از مسأله (۱۱) با ε^* مثبت باشد آنگاه طبق قضیه ۳ جواب x^* یک جواب کارای سره است که توازن متناظر آن دارای کران بالای $\frac{1}{\varepsilon^*}$ است.

قضیه ۴. فرض می‌کنیم مسأله (۱) یک مسأله محدب باشد و همچنین فرض می‌کنیم که $(x^*, \lambda^*, \varepsilon^*)$ یک جواب بهینه از مسأله (۱۱) باشد. اگر $\varepsilon^* = 0$ آنگاه مسأله چند هدفه (۱) جواب کارای سره ندارد.

اثبات. به برهان خلف فرض می‌کنیم که $\bar{x}$ یک جواب کارای سره از مسأله (۱) باشد. چون این مسأله محدب است بنا به قضیه ۳ یک وزن مثبت $\bar{\lambda}$ موجود است که

$$\bar{x} = \mathrm{argmin}_{x \in X} \sum_{i=1}^{p} \bar{\lambda}_k f_k(x).$$

مقدار $\bar{\varepsilon}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\bar{\varepsilon} := \min_{k=1,\dots,p} \bar{\lambda}_k.$$

روشن است که $(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\varepsilon})$ یک جواب شدنی مسأله (۱۱) است که در آن $\bar{\varepsilon} > 0$. این تناقض حکم قضیه را به اثبات می‌رساند.

قضیه ۵. فرض می‌کنیم مسأله (۱) محدب باشد و همچنین $\varepsilon^* > 0$ مقدار بهینه متغیر ε از مسأله (۱۱) باشد. آنگاه $\frac{1}{\varepsilon^*}$ یک کران بالا برای تمام توازن‌های میان توابع هدف مسأله (۱) نسبت به مجموعه بهبود یافته Y_{ε^*} است.

اثبات. اثبات این موضوع روشن است.

۵. مثال‌های عددی

برای شرح بیشتر موضوع مثال‌های زیر را در نظر می‌گیریم. خاطر نشان می‌گردد که این مثال‌ها متناظر مساله (۱۱) بوده و با استفاده از اسکالر سازی و روش مجموعه قیود فعال[7] حل شده‌اند.

مثال ۱. مسأله $\min_{x \in X}(x_1, x_2)$ که در آن

$$X = \{x \in R^2 : (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \le 1, -1 \le x_1, x_2 \le 1\},$$

را در نظر می‌گیریم. جواب بهینه مسأله متناظر با (۱۱) برابر است با

$$x^* = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \approx (0/2929, 0/2929)$$

و $\lambda_1^* = \lambda_2^* = 0/5$ و $\varepsilon^* = 0/5$

روشن است که x^* نزدیک ترین جواب کارای سره به نقطه ایدآل y^I است. همچنین $M = \frac{1}{\varepsilon^*} = 2$ یک کران بالا برای توازن میان توابع هدف در نقطه x^* است. شکل ۳، هندسه این مسأله را نشان می‌دهد.

7. Active-set method

مثال ۲. فرض کنید

$f_1(x) = x_1$ ،$f_2(x) = x_2$
$f_3(x) = x_1^2 - x_1x_2^2 + 3x_1$
$g_1(x) = x_1 + 1/5$ ،$g_2(x) = -x_1 - 2$،
$g_3(x) = -x_2$ ،$g_4(x) = x_2 - 1$.

مسأله سه هدفه زیر را در نظر بگیرید:

$$\min_{x\in X}\big(f_1(x), f_2(x), f_3(x)\big)$$

که در آن

$$X = \{x \in R^2 : g_j(x) \le 0, j = 1,2,3,4\} .$$

به راحتی می‌توان نشان داد که این مسأله یک مسأله محدب است. زیرا توابع f_1، f_2، g_1، g_2، g_3 و g_4 توابعی خطی هستند و از آنجا که هسی تابع f_3 برابر با ۲ است پس این تابع محدب است. روشن است که نقطه ایدآل برابر با $(-2,0,-2/25)$.

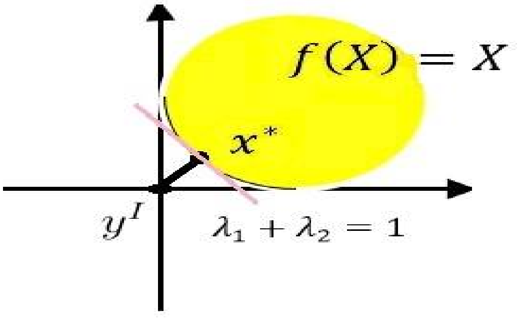
با حل مسأله متناظر (۱۱) داریم:

$x = (-1/5,1), \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0/3333,$
$\varepsilon = 0/3333.$

بنابراین، نقطه $(-1/5,1,-0/75)$ یک جواب کارای سره نزدیک به نقطه ایدآل است.

نتیجه‌گیری

در این مقاله نزدیکی نقاط کارای سره به نقطه ایدآل به عنوان یک معیار برای انتخاب جواب‌های ارجح در نظر گرفته شد. با استفاده از این معیار یک برنامه‌ریزی دوهدفه برای به‌دست آوردن جواب‌هایی با این خصوصیت ارائه شد و دو مثال در این زمینه حل گردید. از طرفی مدل ارائه شده در راستای به دست آوردن جواب‌های مورد نظر برنامه‌ریزی پیشنهاد شده یک کران بالا برای موازنه‌های بین توابع هدف ارائه می‌دهد. نویسندگان این مقاله ادعا دارند می‌توان از معیارهای مدیر برای رسیدن به اهداف خاصی استفاده نمود و به مدل‌های مناسبی برای رسیدن به جواب‌های ارجح مدیر رسید.



شکل (۳). تفسیر هندسی مثال ۱

فهرست منابع

[۱] وکیلی، جواد، دهقانی، حلیمه. مساله برنامه‌ریزی خطی دوسطحی برای محاسبه نقطه ضدایده‌آل. پژوهش‌های نوین در ریاضی، ۴۲-۳۱، ۲(۷) (۱۳۹۵).

[۲] غزنوی، مهرداد، اکبری، فرشته، خرم، اسماعیل. تعیین جواب‌های تقریباً کارای مسائل بهینه‌سازی چندهدفه با استفاده از روش اسکالرسازی مقید ترکیبی پژوهش‌های نوین در ریاضی پذیرفته شده، انتشار آنلاین ۲۰ اردیبهشت (۱۳۹۹).

[۳] خشنوا، آذر، مظفری، محمدرضا. مساله حمل و نقل کاملاً فازی پژوهش‌های نوین در ریاضی (۱۳۹۴) ۵۴-۴۱: (۳)۱.

[4] Ehrgott M., Multicriteria optimization. Berlin, Germany: Springer, (2005).

[5] Eichfelder G., Adaptive scalarization methods in multiobjective optimization. Berlin, Germany: Springer, (2008).

[6] Miettinen K., Nonlinear multiobjective optimization. Berlin, Germany: Springer, (1999).

[7] K. Miettinen, F. Ruiz., NAUTILUS framework: towards trade-o_-free interaction in multiobjec- tive optimization, Journal of Business Economics 86 (2016), 5-21.

[8] Miettinen K, Hakanen J, Podkopaev D., Interactive Nonlinear Multiobjective Optimization Methods. Berlin, Germany: Springer, (2016).

[9] Geoffrion A. M., Proper efficiency and the theory of vector maximization. Journal of Mathematical Analysis and Applications (1968) 22: 618-630.

[10] Kuhn H, Tucker A., nonlinear programming. In J. Neyman, editor, Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability (1951): 481-492.

[11] Benson H. P., An improved definition of proper efficiency for vector maximization with respect to cones. Journal of Mathematical Analysis and Applications (1979) 71: 232-241.

[12] Borwein J. M., Proper efficient points for maximizations with respect to cones. SIAM Journal on Control and Optimization (1977) 15: 57-63.

[13] Bouyssou, D., Using DEA as a tool for MCDM: some remarks." Journal of the operational Research Society (1999) 50.9: 974-978.

[14] Chankong V, Haimes Y, Multiobjective Decision Making Theory and Methodology, Elsevier, New York (1983).

[15] Hartley R, on cone-efficiency, cone-convexity and cone-compactness. SIAM Journal on Applied Mathematics, (1978), 34: 211-222.

[16] Henig M. I., Proper efficiency with respect to cones. Journal of Optimization Theory and Applications (1982) 36: 387-407.

[17] L. Pourkarimi, M. Karimi., Characterization of substantially and quasi-substantially effcient solutions in multiobjective optimization problems, Turkish Journal of Mathematics. 41.2 (2017), 293-304.

[18] L. Pourkarimi, M. Karimi., Quasi-proper e_ciency: a quantitative enhanced

e_ciency, Turkish Journal of Mathematics 42.3 (2018): 1156-1165.

[19] Sawaragi Y, Nakayama H, Tanino T., Theory of Multiobjective Optimization, Academic Press, Orlando, FL, (1985).

[20] Klinger, A., Letter to the Editor-Improper Solutions of the Vector Maximum Problem. Operational Research Letter (1967) 15.3: 570-572.

[21] Geromel J. C, Ferreira P. A. V., An upper bound on properly efficient solutions in multiobjective optimization. Operational Research Letter (1991) 10: 83-86.