دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال ششم، شماره بیست و پنجم، مرداد و شهریور ۱۳۹۹
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

پژوهش‌های نوین در ریاضی

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

آرنز منظم از عمل‌های مدولی و الحاقی دوم از یک مشتق

مهرداد شعبانی سلطانمرادی[۱]، داوود ابراهیمی بقا[۲*]

(۱) دانشجوی دکتری، گروه ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز، تهران، ایران
(۲) دانشیار گروه ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکز، تهران، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۸/۰۴/۱۸ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۸/۱۲/۲۲

چکیده

فرض کنیم A یک جبر باناخ و A'' باناخ A–مدول باشد. در این مقاله معیاری برای آرنز منظم نگاشت $T: A\times A'' \to A''$ ارائه می‌دهیم و متعاقب آن معادلی برای آرنز منظم جبر باناخ A'' بدست می‌آوریم. سپس با استفاده از عمل‌های مدولی و تحت شرایطی نشان می‌دهیم که الحاقی دوم از مشتق $A\to A'''$: خود نیز یک مشتق می‌باشد و سرانجام نتیجه ایی برای مشتق درونی آن بدست می‌آوریم.

واژه‌های کلیدی: جبر باناخ، آرنز منظم، عمل‌های مدولی باناخ.

* عهده‌دار مکاتبات

Email: e_bagha@yahoo.com

۱- مقدمه

آرنز نشان داد که نگاشت دو خطی کراندار $f: X \times Y \to Z$ روی فضاهای نرمدار عموماً توسیع‌های متفاوتی به نگاشت‌های دو خطی f^{***} و f^{r***r} دارند[2]. زمانیکه این توسیع‌ها برابر باشند f آرنز گفته می‌شود. جبر باناخ A آرنز منظم نامیده می‌شود هرگاه دو ضرب تعریف شده Δ و ∇ روی A'' (دوگان دوم A) برابر باشند.

اگر فضای نرمدار X، A–مدول باشد محمدزاده و ویشکی در مقاله [8] معیاری برای آرنز منظم بدست آورده و به دنبال آن معادلی برای آرنز منظم A ارائه داده‌اند. در این مقاله $X = A''$ (جبر باناخ با ضرب آرنز) به عنوان A–مدول در نظر گرفته شده و به طور مشابه معیاری برای آرنز منظم نگاشت $T: A \times A'' \to A''$ بدست می‌آوریم (قضیه ۲ .۱)، و همچنین معادلی برای آرنز منظم A'' ارائه می‌دهیم. سپس معیار فوق را برای عمل‌های مدولی A'' به عنوان باناخ A–مدول بکار میگیریم و به عمل‌های مدولی از A'' (مجهز با هر دو ضرب آرنز) روی A''' و $A^{(5)}$ ارتقا می‌دهیم. به این طریق گزاره‌های ۳. ۱ و ۳. ۳ که تعمیم بعضی از نتایج [3, 6] است ارائه می‌دهیم.

برای باناخ A–مدول A'' الحاقی دوم $D^{**}: (A^{**}, \Delta) \to (A''')'' = A^{(5)}$ از مشتق $D: A \to A'''$ توسیعی از D است و تحت شرایطی نشان می‌دهیم D^{**} خود نیز یک مشتق است. در مقاله [6] دیلز این مساله را برای حالت خاص $A'' = A$، مورد مطالعه قرار داده و نشان داد که D^{**} یک مشتق است اگر و تنها اگر $D^{**}(A'') \cdot A'' \subseteq A'$ [قضیه 6, 1.7] سپس در انتها نتایجی برای مشتق $D: A \to A'''$ بدست می‌آوریم. در واقع به تعمیمی از نتایج [3] و [6] می‌پردازیم. خواننده می‌تواند برای اصطلاحات علمی و موارد پایه به [4] رجوع کند.

فرض کنیم A جبر باناخ باشد. برای $a' \in A'$ و $F \in A''$، Fa' و $a'F$ در A' به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$< a, Fa' > = < a'a, F >$$
$$< a, a'F > = < aa', F > \quad (a \in A)$$

همچنین برای $F, G \in A''$، $F\Delta G$ و $F\nabla G$ در A'' به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$< a', F\Delta G > = < Ga', F >$$
$$< a', F\nabla G > = < a'F, G > \quad (a' \in A')$$

A'' به ترتیب با هر دو ضرب Δ و ∇ یک جبر باناخ است.

این ضرب‌ها به ترتیب ضرب‌های اول و دوم آرنز روی A'' نامیده می‌شود. جبر A آرنز منظم نامیده می‌شود اگر هردو ضرب‌های Δ و ∇ بر هم منطبق باشند. خواننده برای اطلاعات بیشتر از ضرب‌های آرنز به [9] و همچنین در مورد مسئله آرنز منظم روی دوگان جبرهای باناخ میتواند به [5] رجوع کند.

فرض کنیم A جبر باناخ باشد،به وضوح $A^{(4)}$ با هر یک از چهار ضرب آرنز زیر یک جبر باناخ است. این جبرها به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\left(A^{(4)}, \Delta\Delta\right) = \left((A'', \Delta)'', \Delta\right)$$
$$\left(A^{(4)}, \Delta\nabla\right) = \left((A'', \Delta)'', \nabla\right)$$
$$\left(A^{(4)}, \nabla\Delta\right) = \left((A'', \nabla)'', \Delta\right)$$
$$\left(A^{(4)}, \nabla\nabla\right) = \left((A'', \nabla)'', \nabla\right)$$

۲-بررسی آرنز منظم نگاشت $T: A \times A'' \to A''$

فرض کنیم A باناخ A–مدول باشد، آنگاه A'' باناخ A–مدول است. حال فرض کنیم A'' باناخ A–مدول چپ و $T: A \times A'' \to A''$ نگاشت دو خطی باشد. الحاقی $T^*: A''' \times A \to A'''$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$< T^*(a''', a), b'' > = < a''', T(a, b'') >$$

که در آن $a \in A, b'' \in A''$ و $a''' \in A'''$ همچنین یک نگاشت دو خطی نیز می‌باشد. با قرار دادن $T^{**} = (T^*)^*$ نگاشت $T^{**}: A^{(4)} \times A''' \to A'$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$< T^{**}\left(a^{(4)}, a'''\right), b > = < a^{(4)}, T^*(a''', b) >$$

که در آن $b \in A$، $a''' \in A'''$ و $a^{(4)} \in A^{(4)}$.

مشابها داریم:

$$T^{***}: A'' \times A^{(4)} \to A^{(4)}$$

که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$< T^{***}\left(a'', a^{(4)}\right), a''' > \\ = < a'', T^{**}(a^{(4)}, a''') >$$

که در آن $a'' \in A''$ ، $a''' \in A'''$ و $a^{(4)} \in A^{(4)}$

حال با روندی مشابه T^{****} و T^{*****} تعریف می‌شوند.

نگاشت T^r را نگاشت جابجاگر T گوییم، برای $a \in A$ و $a'' \in A''$ نگاشت دو خطی کراندار $T^r: A'' \times A \to A''$ به صورت $T^r(a'', a) = T(a, a'')$ تعریف می‌شود.

برای $a, b \in A$ و $a^{(n)}, b^{(n)} \in A^{(n)}$ الحاقی $T^{r*}: A''' \times A'' \to A'$ از T^r به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$< T^{r*}(a''', a''), b > \\ = < a''', T^r(a'', b) >$$

الحاقی $T^{r**}: A'' \times A''' \to A'''$ از T^{r*} نیز به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$< T^{r**}(a'', a'''), b'' > = \\ < a'', T^{r*}(a''', b'') >$$

الحاقی $T^{r***}: A^{(4)} \times A'' \to A^{(4)}$ از T^{r**} نیز مشابها به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$< T^{r***}\left(a^{(4)}, a''\right), a''' > = \\ < a^{(4)}, T^{r**}(a'', a''') >$$

به روش مشابه الحاقی T^{r****} و T^{r*****} به ترتیب از T^{r***} و T^{r****} ساخته می‌شود.

نگاشت T^{***} توسیع یکتایی از T است به طوریکه برای هر $\widehat{y''} \in A^{(4)}$ ، $T^{***}(\cdot, \widehat{y''})$ w^*- پیوسته باشد. همچنین برای هر $a \in A$ ، $T^{***}(a, \cdot)$ w^*- پیوسته است همچنین همانند فوق $T^{r***r}: A'' \times A^{(4)} \to A^{(4)}$ نیز توسیع یکتایی از T است به طوریکه برای هر $a'' \in A''$ و $T^{r***r}(\cdot, \hat{a})$ $T^{r***r}(a'', \cdot)$ نیز برای هر $\hat{a} \in A$، w^*- پیوسته است. به آسانی ثابت می‌شود که

$$T^{***}\left(a'', b^{(4)}\right) = \\ w^*\_ \ \lim_\alpha \lim_\beta T\left(a_\alpha, b''_\beta\right)$$

و

$$T^{r***r}\left(a'', b^{(4)}\right) \\ = \ w^*\_\lim_\beta \lim_\alpha T\left(a_\alpha, b''_\beta\right)$$

که در آن (a_α) و (b''_β) به ترتیب نت‌هایی در A و A'' همگرا به a'' و $b^{(4)}$ در توپولوژی ضعیف ستاره هستند.

نگاشت T آرنز منظم نامیده می‌شود هرگاه $T^{***} = T^{r***r}$.

با قضیه اصلی این بخش شروع می‌کنیم که معیاری برای آرنز منظم نگاشت دوخطی را فراهم می‌کند.

قضیه ۲-۱. فرض کنیم A جبر باناخ و نگاشت $T: A \times A'' \to A''$ با ضرب مدولی چپ باشد موارد زیر معادلند:

الف) T آرنز منظم است

ب) $T^{****} = T^{r*****r}$

ج) $T^{****}(A''', A'') \subseteq A'''$

د) نگاشت خطی $a \to T^*(a''', a): A \to A'''$ برای هر $a''' \in A'''$ ضعیفاً فشرده است.

برهان. فرض کنیم $a'' \in A''$ ، $b^{(4)} \in A^{(4)}$ و $c^{(5)} \in A^{(5)}$. برای هر $c''' \in A'''$ اگر (الف) برقرار باشد آنگاه

$$< T^{****}\left(c^{(5)}, a''\right), b^{(4)} > \\ = < c^{(5)}, T^{***}\left(a'', b^{(4)}\right) > \\ =< c^{(5)}, T^{r***r}\left(a'', b^{(4)}\right) > \\ =< c^{(5)}, T^{r***}\left(b^{(4)}, a''\right) > \\ =< a'', T^{r****}\left(c^{(5)}, b^{(4)}\right) > \\ =< T^{r*****}\left(a'', c^{(5)}\right), b^{(4)} >$$

بنابراین ادعای $T^{****} = T^{r*****r}$ ثابت شده است.

مفهوم (الف) به (ج) صراحتاً از این واقعیت پیروی می‌کند که

$$T^{****}(a''', b'') = T^{r*****}(b'', a''') \\ = T^{r*****}|A'' \times A'''(b'', a''') \\ = T^{r**}(b'', a''') \in A'''$$

بند (ج) معادل (د) است و واضح می‌باشد. بعلاوه اگر قرار دهیم $L = T^*(a''', .)$، آنگاه

$L^{**} = T^{****}(a''',.)$ به آسانی بدست می‌آید. حال نتیجه از این واقعیت پیروی می‌کند که L ضعیفاً فشرده است اگر و تنها اگر $L^{**}(A'') \subseteq A'''$.

برای اثبات (ج) به (الف) فرض کنیم $T^{****}(A''',A'') \subseteq A'''$ و (a_α) و (b''_β) به ترتیب نت‌هایی در A و A'' همگرا به a'' و $b^{(4)}$ در توپولوژی ضعیف ستاره باشند آنگاه

$$\begin{aligned}
&< T^{***}(a'',b^{(4)}) , c''' > \\
&= < T^{****}(c''',a'') , b^{(4)} > \\
&= \lim_\beta < T^{****}(c''',a'') , b''_\beta > \\
&= \lim_\beta < T^{***}(a'',b''_\beta) , c''' > \\
&= \lim_\beta < a'', T^{**}(b''_\beta, c''') > \\
&= \lim_\beta \lim_\alpha < T^{**}(b''_\beta ,c''') , a_\alpha > \\
&= < T^{r***r}(a'',b^{(4)}) , c''' >
\end{aligned}$$

و این منتج به این است که T آرنز بوده و اثبات راکامل می‌کند.□

بعنوان یک کاربرد نخست از قضیه ۲–۱، نتایج زیر را ارائه می‌دهیم [6].

لم ۲–۲. فرض کنیم A جبر باناخ و نگاشت $T: A \times A'' \to A''$ با ضرب مدولی چپ باشد موارد زیر معادلند:

الف) T و T^{r*} آرنز منظم اند

ب) $T^{***r*r} = T^{r*r***}$

ج) $T^{****}(A^{(5)} , A'') \subseteq A'''$

برهان. مفهوم (الف) به (ب) بدیهی است.

اگر (ب) برقرار باشد آنگاه $T^{****} = T^{r*r**}$. بعلاوه برای هر $a'' \in A''$ ،$b^{(4)} \in A^{(4)}$ و $c''' \in A'''$:

$$\begin{aligned}
&< T^{****}(a^{(5)} , b'') , c'' > \\
&= < T^{***r*r}(c'',a^{(5)}) , b'' > \\
&= < T^{r*r***}(c'', a^{(5)}) , b'' > \\
&= < T^{r*r**}(a^{(5)}, b''), c'' >
\end{aligned}$$

از اینکه $T^{r*r**}(a^{(5)}, b'')$ همواره در A''' قرار دارد لذا (ج) برقراراست.

برای رسیدن (ج) به (الف)، از اینکه

$$T^{****}(A''', A'') \subseteq T^{****}(A^{(5)},A'') \subseteq A'''$$

بنا به قضیه ۲–۱، T آرنز منظم است و یا معادلا $T^{r*****} = T^{r****r}$ همچنین

$$\begin{aligned}
(T^{r*})^{****}(A'', A^{(5)}) &= T^{r*****}(A'', A^{(5)}) \\
&= T^{****}(A^{(5)},A'') \subseteq A'''
\end{aligned}$$

حال مجددا بنا به قضیه ۲–۱، T^* نیزآرنز منظم است. □

۳- بررسی آرنز منظم (π_1,A'',π_2) به عنوان A–مدول و مشتق الحاقی دوم $D: A \to A'''$

فرض کنیم A جبر باناخ باشد، آنگاه (A'',Δ) جبر باناخ و $\pi_1: A \times A'' \to A''$ نگاشتی دو خطی کراندار است. جفت (π_1,A'') باناخ A–مدول چپ نامیده میشود اگر برای هر $a , b \in A$ و $F \in A''$ $\pi_1(ab , F) = \pi_1(a , \pi_1(b, F))$. باناخ A–مدول راست (A'', π_2) مشابها تعریف می‌شود. سه تایی (π_1, A'',π_2) باناخ A–مدول گفته می‌شود اگر (π_1, A'') و (A'',π_2) به ترتیب باناخ A–مدول چپ و راست باشند و برای هر $a , b \in A$ و $F \in A''$، $\pi_1(a , \pi_2(F , b)) = \pi_2(\pi_1(a , F) , b)$ به طور بدیهی $(\pi_2^{r*r}, A''', \pi_1^*)$ دوگان باناخ A–مدول (π_1, A'', π_2) است. همچنین $(\pi_1^{***}, A^{(4)}, \pi_2^{***})$ باناخ (A'',Δ)–مدول و $(\pi_1^{r***r}, A^{(4)}, \pi_2^{r***r})$ باناخ (A'',∇)–مدول می‌باشد. برای اثبات، قوانین شرکت پذیری را با توجه به اینکه (π_1, A'',π_2) باناخ A–مدول است بررسی و دنبال می‌کنیم.

حال اگر روند دوگان فوق را ادامه دهیم به موارد زیر دست پیدا می‌کنیم $(\pi_2^{***r*r}, A^{(5)}, \pi_1^{****})$ بعنوان دوگان باناخ (A'',Δ)–مدول از $(\pi_1^{***}, A^{(4)}, \pi_2^{***})$ و $(\pi_2^{r*****r}, A^{(5)} , \pi_1^{r***r*})$ بعنوان دوگان باناخ (A'',∇)–مدول از $(\pi_1^{r***r}, A^{(4)},\pi_2^{r***r})$ است.

بر طبق شمول‌های زیر

$$\pi_2^{***r*r}(A'',A''') = \pi_2^{**}(A'',A''') \subseteq A'''$$

و

$$\pi_1^{r***r*}(A''', A'') = \pi_1^{r**r}(A''', A'') \subseteq A'''$$

نتیجه می‌گیریم که (π_2^{**},A''') یک (A'',Δ)–زیر

مدول چپ از $A^{(5)}$ است در حالی‌که (A''',π_1^{r**r})، یک (A'',∇)–زیر مدول راست از $A^{(5)}$ می‌باشد. در حقیقت نتیجه بعدی مشخص می‌کند چه مواقعی $(\pi_2^{**},A''',\pi_1^{r**r})$ یک (A'',Δ)–زیر مدول چپ از $A^{(5)}$ ((A'',∇)–زیر مدول راست از $A^{(5)}$) است.

گزاره ۳–۱. فرض کنیم (π_1, A'', π_2) باناخ A–مدول باشد.

الف) (A'',Δ)، A'''–زیر مدول از $A^{(5)}$ است اگر و تنها اگر π_1 آرنز باشد.

ب) (A'',∇)، A'''–زیر مدول از $A^{(5)}$ است اگر و تنها اگر π_2 آرنز باشد.

برهان. قسمت (الف) را ثابت می‌کنیم و قسمت (ب) با بحثی مشابه اثبات می‌شود. واضح است (A'',∇)، A'''–زیر مدول راست از $A^{(5)}$ است اگر و تنها $\pi_1^{****}(A''', A'')\subseteq A'''$ و بنا به قضیه ۲–۱، π_1 آرنز است.□

به عنوان یک دستاورد، نتیجه بعدی را با قرار دادن π_1 $\pi = \pi^r = \pi_2$ وروی A'' از دیلز ارائه می‌دهیم[6].

لم ۳–۲. برای جبر باناخ A موارد زیر معادلند:

الف) A'' آرنز منظم است.

ب) (A'',Δ)، A'''–زیر مدول از $A^{(5)}$ است.

ج) (A'',∇)، A'''–زیر مدول از $A^{(5)}$ است.

فرض کنیم (π_1, A'', π_2) باناخ A–مدول باشد. همانطور که قبل از گزاره ۳–۱ اشاره کردیم (π_2^{**}, A''') و (A''',π_1^{r**r}) به ترتیب (A'',Δ)–زیر مدول چپ و (A'',∇)–زیر مدول راست هستند. بنابراین اگر ما فرض کنیم که A'' آرنز منظم است آنگاه (π_2^{**},A''') و (A''',π_1^{r**r}) به ترتیب A''–مدول چپ و راست هستند. نتیجه بعدی در ارتباط با این سوال است که چه موقع $(\pi_2^{**},A''', \pi_1^{r**r})$ یک A'' – مدول است.

گزاره ۳–۳. فرض کنیم A'' آرنز منظم و (π_1, A'', π_2) باناخ A–مدول باشد، آنگاه $(\pi_2^{**},A''',\pi_1^{r**r})$ باناخ A'' –مدول است اگر و تنها اگر نگاشت دو خطی $\theta_F: A\times A\to A''$ با ضابطه

$$\theta_F(a,b)=\pi_1\big(a,\pi_2(F,b)\big) = \pi_2(\pi_1(a,F),b)$$

برای هر $a,b\in A$ و $F\in A''$ آرنز منظم باشد.

برهان. سه تایی $(\pi_2^{**},A''',\pi_1^{r**r})$ باناخ A''–مدول است اگر و تنها اگر برای هر $a'', b''\in A''$، $a'\in A'$ و $F\in A''$،

$$<\pi_1^{r**r}(\pi_2^{**}(b'',a'),a''),F> = <\pi_2^{**}\big(b'',\pi_1^{r**r}(a',a'')\big),F>$$

فرض کنیم (a_α) و (b_β) نت هایی در A همگرا به a'' و b'' در توپولوژی ضعیف ستاره روی A'' باشند سپس با یک بازبینی مستقیم داریم

$$<\pi_1^{r**r}(\pi_2^{**}(b'',a'),a''),F> = \lim_\alpha\lim_\beta <a',\pi_2(\pi_1(a_\alpha,F),b_\beta)> = \lim_\alpha\lim_\beta<a',\theta_F(a_\alpha,b_\beta)>$$

و

$$<\pi_2^{**}\big(b'',\pi_1^{r**r}(a',a'')\big),F> = \lim_\beta\lim_\alpha<a',\pi_1\big(a_\alpha,\pi_2(F,b_\beta)\big)> = \lim_\beta\lim_\alpha <a',\theta_F(a_\alpha,b_\beta)>$$

بنابراین $(\pi_2^{**}،A'''،\pi_1^{r**r})$ باناخ A'' –مدول است اگر و تنها اگر برای هر $F\in A''$، θ_F آرنز منظم باشد.□

لم ۳–۴. فرض کنیم A یک C^*–جبر و (π_1,A'',π_2) باناخ A–مدول باشد. آنگاه $(\pi_2^{**},A''',\pi_1^{r**r})$ باناخ A'' –مدول است.

برهان. با استفاده از گزاره ۳–۳ برای هر $F\in A''$ کافی است نشان دهیم که $\theta_F: A\times A\to A''$ منظم است. با بکار گیری از قضیه ۲–۱ آرنز بودن θ_F معادل با فشردگی ضعیف نگاشت دوخطی $a\to\theta_F^*(F',a): A\to A'$ است با این واقعیت که هر نگاشت خطی کراندار از یک C^*–جبر با پیش دوگان W^*–جبر به طور خودکار ضعیفاً فشرده است [لم 9و1].

فرض کنیم (π_1, A'', π_2) باناخ A–مدول باشد. یک نگاشت خطی کراندار $D: A \to A'''$ مشتق گفته می‌شود هرگاه برای هر $a , b \in A$، $D(ab) = D(a)b + aD(b)$ یا معادلا

$$D(ab) = \pi_1^*(D(a) , b) + \pi_2^{r*r}(a , D(b))$$

در این بخش سوالی که چه مواقع الحاقی دوم از مشتق $D: A \to A'''$ دوباره خود مشتق است را بررسی می‌کنیم. در شروع بخش قبل بخاطر می‌آوریم که $(\pi_2^{***r*r}, A^{(5)}, \pi_1^{****})$ بعنوان باناخ (A'', Δ)–مدول و $(\pi_2^{r****r}, A^{(5)}, \pi_1^{r***r*})$ بعنوان باناخ (A'', ∇)–مدول متعارف هستند، لذا $D^{**}: (A'', \Delta) \to (A''')'' = A^{(5)}$ مشتق است اگر و تنها اگر برای هر $a'', b'' \in A''$،

$$D^{**}(a''\Delta b'') = \pi_1^{****}(D^{**}(a''), b'') + \pi_2^{***r*r}(a'', D^{**}(b''))$$

مشابها، $D^{**}: (A'', \nabla) \to (A''')'' = A^{(5)}$ مشتق است اگر و تنها اگر برای هر $a'', b'' \in A''$،

$$D^{**}(a''\nabla b'') = \pi_1^{r***r*}(D^{**}(a'') , b'') + \pi_2^{r****r}(a'', D^{**}(b''))$$

لم ۳–۵. فرض کنیم (π_1 , A'', π_2) باناخ A–مدول و $D: A \to A'''$ یک مشتق باشد. برای هر $a'', b'' \in A''$

الف)

$$D^{**}(a''\Delta b'') = \pi_1^{****}(D^{**}(a'') , b'') + \pi_2^{r*r***}(a'', D^{**}(b''))$$

ب)

$$D^{**}(a''\nabla b'') = \pi_1^{*r***r}(D^{**}(a'') , b'') + \pi_2^{r****r}(a'', D^{**}(b''))$$

برهان. اثباتی مشابه در [8] آمده است. □

دیلز در [قضیه 6, 1.7] نشان داده است که الحاقی دوم $D^{**}: (A^{**}, \Delta) \to A'''$ از مشتق $D: A \to A'$ مشتق است اگر و تنها اگر $D^{**}(A'') \cdot A'' \subseteq A'$ یا به طور معادل $\pi^{r****}(D^{**}(A''), A'') \subseteq A'$ که π نگاشت ضرب روی A است. قضیه بعد این مطلب را با یک اثبات مستقیم توسیع می‌دهد.

قضیه ۳–۶. فرض کنیم (π_1, A'', π_2) باناخ A–مدول و $D: A \to A'''$ یک مشتق باشد،

الف) $D^{**}: (A'', \Delta) \to (A''')'' = A^{(5)}$ مشتق است اگر و تنها اگر $\pi_2^{****}(D^{**}(A'') , A^{(4)}) \subseteq A'$.

ب) $D^{**}: (A'', \Delta) \to (A''')'' = A^{(5)}$ مشتق است اگر و تنها اگر $\pi_2^{r****}(D^{**}(A'') , A^{(4)}) \subseteq A'$.

برهان. قسمت (الف) را ثابت می‌کنیم. فرض کنیم برای هر $a'', b'' \in A''$ و $c^{(4)} \in A^{(4)}$، لم ۳–۳ را بکار می‌گیریم نتیجه می‌شود که $D^{**}: (A'', \Delta) \to (A''')'' = A^{(5)}$ مشتق است اگر و تنها اگر

$$< \pi_2^{***r*r}(a'', D^{**}(b'')), c^{(4)} > = < \pi_2^{r*r***}(a'', D^{**}(b'')), c^{(4)} >$$

و این برقرار است اگر و تنها اگر

$$< \pi_2^{****}(D^{**}(b'') , c^{(4)}) , a'' > = < \pi_2^{r*r**}(D^{**}(b'') , c^{(4)}) , a'' >$$

و یا به طور معادل

$$\pi_2^{****}(D^{**}(b'') , c^{(4)}) = \pi_2^{r*r**}(D^{**}(b'') , c^{(4)})$$

باید توجه داشت که $\pi_2^{****}(D^{**}(b''), c^{(4)}) \in A'''$ حال آنکه $\pi_2^{r*r**}(D^{**}(b'') , c^{(4)}) \in A'$ و همچنین

$$\pi_2^{****}(D^{**}(b'') , c^{(4)})|A' = \pi_2^{r*r**}(D^{**}(b'') , c^{(4)})$$

در نتیجه D^{**} مشتق است اگر و تنها اگر $\pi_2^{****}(D^{**}(b'') , c^{(4)}) \in A'$ لذا (الف) ثابت شده است. □

لم‌های زیر نتیجه ای از قضیه ۳–۶ می‌باشد.

لم ۳–۷. فرض کنیم (π_1, A'', π_2) باناخ A–مدول و $D: A \to A'''$ یک مشتق است، اگر A آرنز منظم باشد

آنگاه موارد زیر معادلند:

الف) $D^{**}: A'' \to A^{(5)}$ مشتق است.

ب) $\pi_2^{****}\left(D^{**}(A''),\ A^{(4)}\right) \subseteq A'$

ج) $\pi_2^{r****}\left(D^{**}(A''),\ A^{(4)}\right) \subseteq A'$

لم ۳-۸. فرض کنیم (π_1, A'', π_2) باناخ A-مدول و $D: A \to A'''$ یک مشتق باشد،

الف) اگر π_2 و π_2^{r*} هر دو آرنز منظم باشند آنگاه $D^{**}: (A'', \Delta) \to A^{(5)}$ یک مشتق است.

ب) اگر π_1 و π_1^{*} هر دو آرنز منظم باشند آنگاه $D^{**}: (A'', \nabla) \to A^{(5)}$ یک مشتق است.

برهان. اگر هر دو π_2 و π_2^{r*} آرنز باشند آنگاه با استفاده از لم ۲-۲، $\pi_2^{****}\left(D^{**}\left(A^{(5)}\right), A^{(4)}\right) \subseteq A'$. به ویژه $\pi_2^{****}\left(D^{**}(A''), A^{(4)}\right) \subseteq A'$ و نتیجه از قضیه ۳-۶ بدست می‌آید، (ب) مشابها بدست می‌آید. □

بنا به لم اخیر آرنز بودن هر دو π_2 و π_2^{r*} در (الف) (هر دو π_1 و π_1^{*} در (ب)) نشان می‌دهد که D^{**} یک مشتق است. حال بعنوان کاربرد دیگری از قضیه ۳-۶ تعمیم دیگری [6] را ارائه می‌دهیم.

لم ۳-۹. فرض کنیم (π_1, A'', π_2) باناخ A-مدول و $D: A \to A'''$ یک مشتق فشرده باشد،

الف) اگر π_2 آرنز منظم باشد آنگاه $D^{**}: (A'', \Delta) \to A^{(5)}$ یک مشتق است.

ب) اگر π_1 آرنز منظم باشد آنگاه $D^{**}: (A'', \nabla) \to A^{(5)}$ یک مشتق است.

برهان. از اینکه $D: A \to A'''$ ضعیفاً فشرده است، $D^{**}(A'') \subseteq A'''$. به عبارت دیگر آرنز بودن π_2 نتیجه می‌دهد که $\pi_2^{****}\left(A''',\ A^{(4)}\right) \subseteq A'$ (قضیه ۲-۱). بنابراین $\pi_2^{****}\left(D^{**}(A''), A^{(4)}\right) \subseteq A'$ که بدان معنی است $D^{**}: (A'', \Delta) \to A^{(5)}$ مشتق است. □

این بخش را با مشتق درونی به پایان می‌رسانیم. یک نگاشت خطی $D: A \to A'''$ مشتق درونی نامیده می‌شود هرگاه برای بعضی $x''' \in A'''$، $D(a) = x''' \cdot a - a\ x'''$ یا به طور معادل برای هر $a \in A$،

$$D(a) = \pi_1^{*}(x''', a) - \pi_2^{r*r}(a, x''').$$

نتیجه بعد تعمیمی از [گزاره 6, 1.6] است.

گزاره ۳-۱۰. فرض کنیم A'' باناخ A-مدول باشد به طوری‌که عمل‌های مدولی آرنز منظم هستند. آنگاه هر مشتق درونی $D: A \to A'''$ ضعیفاً فشرده است بعلاوه $D^{**}: (A'', \Delta) \to A^{(5)}$ و $D^{**}: (A'', \nabla) \to A^{(5)}$ مشتق درونی هستند.

برهان. بنا به تعریف مشتق درونی معادلا برای هر $a'' \in A''$ داریم،

$$D^{**}(a'') = \pi_1^{****}(x''', a'') - \pi_2^{r****}(x''', a'')$$

بعلاوه اگر فرض کنیم که π_1 و π_2 آرنز هستند آنگاه بنا به قضیه ۲-۱، بخش دوم عبارت سمت راست متعلق به A''' می‌باشد بنابراین $D^{**}(A'') \subseteq A'''$ یا به‌طور معادل D ضعیفاً فشرده است. با معادل قرار دادن قرار دادن $\pi_1^{r***r*} = \pi_1^{****}$ و π_2^{***r*r} $\pi_2^{r*****r}$ نتیجه می‌شود که

$$D^{**}(a'') = \pi_1^{****}(x''',\ a'') - \pi_2^{***r*r}(a'', x''')$$

و

$$D^{**}(a'') = \pi_1^{r***r*}(x''',\ a'') - \pi_2^{r*****r}(a'',\ x''')$$

بدان معنی است که هر دوی $D^{**}: (A'', \Delta) \to A^{(5)}$ و $D^{**}: (A'', \nabla) \to A^{(5)}$ مشتق درونی هستند. □

قدر دانی: نویسندگان از داوران گرامی این مقاله بابت مطالعه دقیق و پیشنهادات ارزنده سپاسگزاری می‌کنند.

فهرست منابع

[1] **C. A. Akemann**, "*The dual space of an operator algebra*", Trans. Amer. Math, Soc. 126(1967), 286-302.

[2] **R. Arens**, "*The adjoint of a bilinear operation*", Proc. Am. Math. Soc. 2-(1951), 839-848.

[3] **J. W. Bunce and W. L. Paschke**, "*Derivations on a C^*-algebra and its double dual*", J, Funct, Anal, 37(1980), 235-247.

[4] **H. G. Dales,** "*Banach algebra and automatic continuity*", Clarendon, Oxford, 2000.

[5] **H. G. Dales and A. T. M. Lan**, "*The second duals of Beurling algebras*", Men. Amer. Math. Soc. 177(836) (2005).

[6] **H. G. Dales, A. Rodrigues-Palacios and M**. V. Velasco, "*The second transpose of a derivation*", J. London Math. Soc. 64(2001), 707-721.

[7] **F. Gourdean**, "*Amenability and the secod dual of a Banach algebra*", Studia Math. 125 (1997), 75-81.

[8] **S. Mohammad zadeh and H. R. E. Vishki** *"Arens regularity of module actions and the second adjoint of a derivation"*, Bull. Austral. Math. Soc. 77(2008), 465-476.

[9] **T. W. Palmer**, *"Banach algebras and the general theory of *- algebras"*, Volume. 1, Cambridge University, (1994).