دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال ششم، شماره بیست و پنجم، مرداد و شهریور ۱۳۹۹
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

JNRM
پژوهش‌های نوین در ریاضی
دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

کاربرد روش تابع هسته برای حل یک کلاس از معادلات انتگرال خطی دو بعدی با هسته منفرد ضعیف

محمد رضا اصلاحچی[۱*]، مریم رضایی[۲]

[۱و۲] گروه ریاضی کاربردی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۶/۱۲/۰۵ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۸/۰۶/۱۳

چکیده

در این مقاله یک معادله انتگرال ولترای نوع دوم خطی یک بعدی را حل می‌کنیم. بدین منظور با استفاده از شکل معادله، یک عملگر خطی تعریف می‌کنیم و با استفاده از آن و عملگر الحاقی‌اش و توابع هسته باز تولید یک پایه برای فضای توابع به دست می‌آوریم. سپس جواب معادله انتگرال را بر حسب این توابع پایه‌ای به دست می‌آوریم. مثال‌های ارائه شده در این مقاله صحت و اعتبار روش را نشان می‌دهند. اما این روش برای معادلات انتگرال ولترای نوع دوم غیر خطی یک بعدی نتیجه‌ای به دست نمی‌دهد، در این حالت یک روش جدید برای محاسبه ضرایب فوریه بایستی ارائه شود بنابراین تمرکز بعدی ما ارائه یک روش برای محاسبه ضرایب فوریه در حالت غیر خطی است. این روش به راحتی قابل تعمیم برای معادله انتگرال ولترای نوع دوم خطی دو بعدی است و ما روی این موضوع در مقاله دیگر کار می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: معادله انتگرال ولترا، هسته باز تولید، ضرایب فوریه.

*. عهده‌دار مکاتبات: Email: Eslahchi@modares.ac.ir

۱- مقدمه

همانطور که می‌دانید معادله انتگرال ولترای نوع دوم خطی یک بعدی در بسیاری از علوم و مهندسی دارای کاربردهای فراوانی است. در سال‌های اخیر چندین روش برای حل این معادلات داده شده است. به عنوان مثال وزواز[1] در [۱و۲] روش‌های آدومین[2] و تکرار نوسانی[3] برای حل این گونه معادلات ارائه داده است. همچنین در [۳] روش تابع هار کسری و در [۴و۵] روش موجک–گلرکین[4] ارائه شده است. در این مقاله یک روش جدید برای حل این معادله ارائه خواهیم کرد. بدین منظور معادله انتگرال ولترای نوع دوم خطی یک بعدی به صورت زیر را در نظر بگیرید:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)u(t)dt \qquad (۱)$$

که در آن $x \in [0,1]$، $u(x)$ یک تابع مجهول و $u(x), f(x) \in W_2^1[0,1]$.

فضای تابعی $W_2^1[0,1]$ یک فضای هسته باز تولید است که در بخش بعدی تعریف خواهد شد. هدف ما در این مقاله پیدا کردن تابعی مانند $u(x)$ در $W_2^1[0,1]$ است به طوری که در معادله (۱) صدق کند. بدین منظور با توجه به شکل معادله (۱) یک عملگر خطی روی $W_2^1[0,1]$ تعریف می‌کنیم. سپس با استفاده از عملگر الحاقی نظیر و توابع هسته باز تولید در $W_2^1[0,1]$ یک پایه برای آن می‌سازیم. سپس جواب معادله (۱) را بر حسب این پایه به دست می‌آوریم.

۲- پیشینه تحقیق

مسأله مکان‌یابی انبار سال‌هاست مورد بحث میان محققین است، با این حال مطالعه نظریه مکان‌یابی در سال ۱۹۰۹ توسط آلفرد وبر آغاز شد. وبر مکان‌یابی انبار را با هدف حداقل‌سازی فاصله بین انبار و تسهیلات موجود به کار برد. [۵] همچنین طبق تحقیقات کارماکر و همکارش، مهم‌ترین معیار جهت انتخاب مکان انبار مدت زمان پاسخ‌گویی، شرایط حمل و نقل، هزینه، شرایط مکانی و منابع انسانی به عنوان مهم‌ترین معیارها شناخته شده است که در این مطالعات هزینه شامل هزینه زمین و هزینه حمل و نقل است و مدت زمان پاسخ‌گویی شامل زمان پاسخ‌دهی و مدت تاخیر تعریف شده است. [۶] اوزکان و همکارانش انتخاب مکان انبار را به عنوان مهمترین بخش تصمیم‌گیری معرفی نموده و به تحلیل و معرفی معیارهای مهمی چون قیمت واحد، هزینه موجودی، میانگین فاصله تا کارگاه‌ها، میانگین فاصله تا عرضه‌کننده و انعطاف‌پذیری پرداختند. [۷] در تحقیقات انجام شده در رابطه با تصمیم‌گیری مکان انبار از مدل‌های تصمیم‌گیری بسیاری استفاده شده است که خلاصه‌ای از مدل‌ها در جدول (۱) آمده است:

در جدول (۱) برخی از رایج–ترین مدل‌هایی که در ارزیابی و انتخاب مکان انبار ارائه شده است، معرفی شدند.

در برخی از مقاله‌ها از یک مدل و در برخی دیگر ترکیبی از مدل‌ها استفاده شده است. همچنین نمی‌توان ادعا کرد که یک مدل از سایر مدل‌ها بهتر است، زیرا تمامی مدل‌ها نقاط ضعف و قوت خود را دارند و هر مدل ممکن است برای مسأله خاصی مناسب و کاربردی باشد. نکته دیگر اینکه در مدل‌های تصمیم‌گیری چند شاخصه باید به مدل‌های جبرانی[1] و غیرجبرانی[2] هم توجه داشت. برخی از مدل‌ها اجازه مبادله بین معیارها را نمی‌دهند و برخی مجوز مبادله را صادر می‌کنند.

جدول (۱): طبقه‌بندی مدل‌های تصمیم‌گیری

طبقه	روش	منابع
برنامه‌ریزی ریاضی	Mixed integer programming Non-linear programming Global optimization	[۱۴–۸]
تصمیم‌گیری چند معیاره	AHP – TOPSIS- ELECTRE- VIKOR	[۶، ۷، ۱۵–۱۷]

در این مقاله علاوه بر اینکه یکی از مدل‌های کلاسیک جهت مکانیابی استفاده خواهد شد، با استفاده از روش UTASTAR مطلوبیت رتبه‌بندی گزینه‌های مورد ارزیابی در مدل فوق نیز سنجش خواهد گردید. در مجموع باید عنوان نمود که اهمیت ویژه استفاده از مدل UTASTAR اینست که قادر به پاسخ‌گویی به این سوال است که آیا گزینه‌های رتبه‌بندی شده توسط هر مدل تصمیم‌گیری توانایی برطرف نمودن نیاز تصمیم گیرنده را داراست یا خیر؟ و در این پژوهش به دنبال پاسخ به این سوال هستیم که آیا کاندیداهای احداث انبار در شرکت مورد مطالعه که توسط یکی از مدل‌های تصمیم‌گیری شناخته شده رتبه‌بندی شده‌اند واقعاً کاندیداهای مناسبی هستند یا خیر؟

۳- روش حل معادله

برای به دست آوردن جواب معادله (۱) در $W_2^1[0,1]$، ابتدا یک عملگر خطی روی $W_2^1[0,1]$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

برای هر $u(x)\in W_2^1[0,1]$، قرار می‌دهیم:

$$(Lu)(x)=u(x)-\lambda\int_0^x K(x,t)u(t)dt$$

اگر $u(x)$ جواب معادله (۱) باشد در این صورت داریم:

$$(Lu)(x)=f(x) \qquad (۲)$$

بنابراین مسأله ما تبدیل می‌شود به یافتن تابعی مانند $f(x)$ به طوری که در معادله (۲) صدق کند. فرض کنیم L^* عملگر الحاقی نظیر L و دنباله $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ در بازه $[0,1]$ چگال باشد در این حالت قرار می‌دهیم:

$$\phi_i(x)=r_{x_i}(x)$$

و

$$\psi_i(x)=(L^*\phi_i)(x)$$

یا

$$\psi_i(x)=r_x(x_i)-\lambda\int_0^{x_i}K(x_i,t)r_x(t)dt$$

با استفاده از روند متعامد سازی گرام-اشمیت یک دنباله متعامد یکه مانند $\{\overline{\psi}_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ از روی دنباله $\{\psi_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ می‌سازیم. فرض کنید β_{ik} ضرایب در روند گرام-اشمیت به صورت زیر باشند:

$$\overline{\psi}_i(x)=\sum_{k=1}^{i}\beta_{ik}\psi_k(x)$$

دنباله $\{\overline{\psi}_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ در فضای $W_2^1[0,1]$ کامل نیست، اما می‌توان آن را به یک پایه برای $W_2^1[0,1]$ توسیع داد. بدین منظور داریم،

$$span(\{\overline{\psi}_i(x)\}_{i=1}^{\infty})=$$
$$\{u(x)\,|\,u(x)=\sum_{i=1}^{n}c_i\overline{\psi}_i(x),c_i\in\mathbb{R},n\in\mathbb{N}\}$$

گیریم S بستار این زیر فضا به صورت زیر باشد،

$$S=\overline{span(\{\overline{\psi}_i(x)\}_{i=1}^{\infty})}$$

و $S^{\perp}$ زیر فضای مکمل متعامد S در $W_2^1[0,1]$ باشد. با استفاده از روش زیر یک پایه برای $S^{\perp}$ به دست می‌آوریم، قرار می‌دهیم:

$$\overline{\phi}_j(x)=\frac{\rho_j(x)}{\|\rho_j(x)\|_{W_2^1}}$$

که در آن

$$\rho_j(x)=\phi_j(x)-\sum_{i=1}^{\infty}<\phi_j(x),\overline{\psi}_i(x)>_{W_2^1}\overline{\psi}_i(x)$$
$$-\sum_{i=1}^{j-1}<\phi_i(x),\overline{\phi}_i(x)>_{W_2^1}\overline{\phi}_i(x)$$

و $j=1,2,\ldots$ و به ازای $j=1$، $\sum_{i=1}^{j-1}=0$. دنباله $\{\overline{\phi}_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ یک پایه برای $S^{\perp}$ است. چون $\{\overline{\psi}_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ و $\{\overline{\phi}_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ به ترتیب پایه‌هایی برای S و $S^{\perp}$ هستند و $W_2^1[0,1]=S\oplus S^{\perp}$ بنابراین،

$$B=\{\overline{\psi}_i(x)\}_{i=1}^{\infty}\cup\{\overline{\phi}_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$$

یک پایه برای $W_2^1[0,1]$ است.

قضیه ۳-۱: اگر دنباله $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$ در بازه $[0,1]$ چگال باشد آنگاه جواب معادله (۱) به صورت زیر است:

$$u(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{i}\beta_{ik}f(s_k)\overline{\psi}_i(x)+\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j\overline{\phi}_j(x) \quad (۳)$$

که در آن α_jها از دستگاه معادلات خطی زیر به دست می‌آیند،

$$f(x_n)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{i}\beta_{ik}f(s_k)(L\overline{\psi}_i)(x_n)+\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j(L\overline{\phi}_j)(x_n) \qquad (n=1,2,\ldots) \quad (۴)$$

اثبات: فرض کنیم $u(x)\in W_2^1[0,1]$ جواب معادله (۱) باشد در این صورت با بسط $u(x)$ بر حسب پایه B داریم،

$$u(x)=\sum_{i=1}^{\infty}<u(x),\overline{\psi}_i(x)>_{W_2^1}\overline{\psi}_i(x)+\sum_{j=1}^{\infty}<u(x),\overline{\phi}_j(x)>_{W_2^1}\overline{\phi}_j(x)$$

گیریم $\alpha_j=<u(x),\overline{\phi}_j(x)>_{W_2^1}$ بنابراین تساوی فوق به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$u(x)=\sum_{i=1}^{\infty}<u(x),\sum_{k=1}^{i}\beta_{ik}\psi_k(x)>_{W_2^1}\overline{\psi}_i(x)+\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j\overline{\phi}_j(x)$$
$$=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{i}\beta_{ik}<u(x),(L^*\phi_k)(x)>_{W_2^1}\overline{\psi}_i(x)+\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j\overline{\phi}_j(x)$$
$$=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{i}\beta_{ik}<(Lu)(x),\phi_k(x)>_{W_2^1}\overline{\psi}_i(x)+\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j\overline{\phi}_j(x)$$
$$=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{i}\beta_{ik}<f(x),\phi_k(x)>_{W_2^1}\overline{\psi}_i(x)+\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j\overline{\phi}_j(x)$$
$$=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{i}\beta_{ik}f(s_k)\overline{\psi}_i(x)+\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j\overline{\phi}_j(x)$$

چون L یک عملگر خطی است از (۳) نتیجه می‌گیریم که،

$$(Lu)(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{i}\beta_{ik}f(s_k)(L\overline{\psi}_i)(x)+\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j(L\overline{\phi}_j)(x)$$

اما $(Lu)(x)=f(x)$ بنابراین،

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{i}\beta_{ik}f(s_k)(L\overline{\psi}_i)(x)+\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j(L\overline{\phi}_j)(x)$$

به خصوص برای $x=x_n$ داریم،

$$f(x_n)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{i}\beta_{ik}f(s_k)(L\overline{\psi}_i)(x_n)+\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j(L\overline{\phi}_j)(x_n)$$

که در آن $n=1,2,\ldots$.

اکنون جواب تقریبی معادله (۱) با برش سری (۳) به صورت زیر به دست می‌آید،

$$u_{n,m}(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i}\beta_{ik}f(s_k)\overline{\psi}_i(x)+\sum_{j=1}^{m}\alpha_j\overline{\phi}_j(x)$$

و α_jها صادق در دستگاه معادلات خطی زیر هستند،

$$f(x_l)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i}\beta_{ik}f(s_k)(L\overline{\psi}_i)(x_l)+\sum_{j=1}^{m}\alpha_j(L\overline{\phi}_j)(x_l)$$

که در آن $l=1,2,\ldots$.

قضیه۳-۲: هرگاه $u(x)$ جواب معادله (۱) و $r_{n,m}(x)$ خطای جواب تقریبی $u_{n,m}(x)$ باشد که $u(x)$ و $u_{n,m}(x)$ بترتیب توسط فرمول‌های (۳) و (۴) داده شده‌اند آنگاه نتایج زیر به دست می‌آیند:

الف) جواب تقریبی $u_{n,m}(x)$ همگرا به جواب دقیق $u(x)$ به معنای $\|.\|_{W_2^1}$ است.

ب) خطای $r_{n,m}(x)$ یکنوا نزولی به معنای $\|.\|_{W_2^1}$ است و

$$\lim_{n,m\to\infty}\|r_{n,m}(x)\|_{W_2^1}=0$$

اثبات: (الف) چون B یک پایه متعامد نرمال $W_2^1[0,1]$ است از (۳) نتیجه می‌گیریم که $u_{n,m}(x)$ به $u(x)$ همگرا است.

(ب) داریم،

$$\|r_{n+1,m+1}(x)\|_{W_2^1}^2=\sum_{i=n+1}^{\infty}(\sum_{k=1}^{i}\beta_{ik}f(s_k))^2+\sum_{j=m+1}^{\infty}\alpha_j^2-[\sum_{k=1}^{i}\beta_{(n+1)k}f(s_k)]^2-\alpha_{m+1}^2$$
$$=\|r_{n,m}(x)\|_{W_2^1}^2-[\sum_{k=1}^{i}\beta_{(n+1)k}f(s_k)]^2-\alpha_{m+1}^2$$

بنابراین،

$$\|r_{n+1,m+1}(x)\|_{W_2^1}^2\le\|r_{n,m}(x)\|_{W_2^1}^2$$

و لذا

$$\|r_{n+1,m+1}(x)\|_{W_2^1}\le\|r_{n,m}(x)\|_{W_2^1}$$

پس بنا به (الف) خواهیم داشت،

$$\lim_{n,m\to\infty}\|r_{n,m}(x)\|_{W_2^1}=0$$

۴- مثال‌های عددی

در این بخش چند مثال ارائه می‌دهیم که روش فوق را روی آنها پیاده‌سازی می‌کنیم. مقادیر جواب تقریبی در نقاط x_i که در آن $i=1,2,...,10$ را محاسبه می‌کنیم و آنها را با جواب دقیق معادله (۱) مقایسه می‌نماییم. مقادیر به دست آمده صحت روش را تایید می‌کنند.

مثال ۴-۱: معادله انتگرال ولترای خطی نوع دوم زیر را در نظر بگیرید:

$$u(x)=\sin(x)+2\int_0^x\sin(2x-2t)u(t)dt$$

جواب دقیق این معادله عبارتست از $u(x)=4x-3\sin(x)$ جدول ۱ نتایج عددی این مثال را نشان می‌دهد.

مثال ۴-۲: معادله انتگرال ولترای نوع دوم خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$u(x)=x+\int_0^x\sin(x-t)u(t)dt$$

جواب دقیق این معادله $u(x)=x+\frac{x^3}{6}$ است. جدول ۲ نتایج عددی مربوط به این مثال را نشان می‌دهد.

جدول ۱: خطای مطلق جواب تقریبی برای مثال ۴-۱

i	x_i	جواب دقیق $u(x)$	جواب تقریبی $u_{50,50}(x)$	خطای مطلق
1	0.1	0.1004997500	0.1007005842	0.0002008342
2	0.2	0.2039920076	0.2037188495	0.0002731581
3	0.3	0.3134393799	0.3140408253	0.0006014454
4	0.4	0.431744973	0.4335841123	0.0018391393
5	0.5	0.561723384	0.5645375201	0.0028141361
6	0.6	0.706072580	0.7099262038	0.0038536238
7	0.7	0.867346938	0.8723574500	0.0050105120
8	0.8	1.047931727	1.053988106	0.006056379
9	0.9	1.250019271	1.256086743	0.006067472
10	1	1.475587046	1.434412785	0.041174261

جدول ۲: خطای مطلق جواب تقریبی برای مثال ۴-۲

i	x_i	جواب دقیق $u(x)$	جواب تقریبی $u_{40,40}(x)$	خطای مطلق
1	0.1	.1001666667	0.09963474708	0.00053191962
2	0.2	.2013333333	0.2016640777	0.0003307444
3	0.3	.3045000000	0.3045884224	0.0000884224
4	0.4	.4106666667	0.4116167810	0.0009501143
5	0.5	.5208333333	0.5219489476	0.0011156143
6	0.6	.6360000000	0.6374922784	0.0014922784
7	0.7	.7571666667	0.7592649969	0.0020983302
8	0.8	.8853333333	0.8880116366	0.0026783033
9	0.9	1.021500000	1.024615183	0.003115183
10	1	1.166666667	1.133984638	0.032682029

مثال ۴-۳: معادله انتگرال ولترای نوع دوم خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$u(x)=f(x)+\int_0^x (2x^2-8)\sin(xt)u(t)dt$$

که در آن

$$f(x)=-2x+4\sin(x^2)(\sin 2x-\cos 2x)$$
$$+(\sin 2x+\cos 2x)(1+2x\cos(x^2))$$

جواب دقیق این معادله به صورت $u(x)=\sin 2x+\cos 2x$ می‌باشد. جدول ۳ نتایج عددی مربوط به این مثال را نشان می‌دهد.

مثال ۴-۴: معادله انتگرال ولترای نوع دوم خطی ریر را در نظر بگیرید:

$$u(x)=\frac{1}{\cos(x^2)}-xe^x\tan(x^2)+$$
$$\int_0^x \frac{(1+x^2)\cos(xt)}{\cos(x^2)}u(t)dt$$

جواب دقیق این معادله عبارتست از $u(x)=e^x$. جدول ۴ نتایج عددی مربوط به این مثال را نشان می‌دهد.

نتیجه‌گیری

در این مقاله ما روی معادله انتگرال ولترای نوع دوم خطی یک بعدی کار کردیم. روش به کاربرده شده در این مقاله به راحتی قابل تعمیم به حالت دو بعدی است. اما این روش را نمی‌توان برای معادلات انتگرال ولترای نوع دوم غیرخطی استفاده کرد، در این حالت برای محاسبه α_jها بایستی از روش جدید استفاده نمود. بنابراین تمرکز بعدی ما محاسبه α_jها در حالت غیرخطی است. در این مقاله محاسبات با نرم افزار *Maple* انجام شده است. ما معتقدیم که روش حاضر در این مقاله با تغییر عملگر L مجدداً قابل پیاده‌سازی است.

جدول ۳: خطای مطلق جواب تقریبی برای مثال ۴-۳

i	x_i	جواب دقیق $u(x)$	جواب تقریبی $u_{30,30}(x)$	خطای مطلق
1	0.1	1.178735909	1.178512166	0.0002
2	0.2	1.310479336	1.309749905	0.0008
3	0.3	1.389978088	1.388496239	0.0015
4	0.4	1.414062800	1.415276569	0.0012
5	0.5	1.381773291	1.381451467	0.0003
6	0.6	1.294396840	1.294206443	0.0002
7	0.7	1.155416873	1.153560835	0.0018
8	0.8	0.9703740807	0.9621475627	0.00822
9	0.9	0.7466455362	0.7288779277	0.01777
10	1	0.4931505903	0.5466505827	0.05350

جدول ۴: خطای مطلق جواب تقریبی برای مثال ۴-۴

i	x_i	جواب دقیق $u(x)$	جواب تقریبی $u_{50,50}(x)$	خطای مطلق
1	0.1	1.105170918	1.105312301	0.000141383
2	0.2	1.221402758	1.221702606	0.000299848
3	0.3	1.349858808	1.350573580	0.000714772
4	0.4	1.491824698	1.493597858	0.001773160
5	0.5	1.648721271	1.648998216	0.000276945
6	0.6	1.822118800	1.822704111	0.000585311
7	0.7	2.013752707	2.014300034	0.000547327
8	0.8	2.225540928	2.227017513	0.001476585
9	0.9	2.459603111	2.457640764	0.001962347
10	1	2.718281828	2.657601055	0.060680773

فهرست منابع

[1] A. M. Wazwaz. A first course in integral equations. World Scientific. Singapour (1997).

[2] A. M. Wazwaz. Linear and nonlinear integral equation: methods and applications. Higher Education Press and Springer Verlage (2011).

[3] M. H. Reihani, Z. Abadi. Rationalized Harr functions method for solving Fredholm and Volterra integral equations. Journal of Computational and Applied Mathematics 12-20 (2007).

[4] J. Saberi-Nadjafi, M. Mehrabinezhad, T. Diogo. The Coiflet-Galerkin method for linear Volterra integral equations. Applied Mathematics and Computation 221:469-483 (2013).

[5] J. Saberi-Nadjafi, M. Mehrabinezhad, H. Akbari. Solving Volterra integral equations of the second kind by Wavelet-Galerkin scheme. Computer and Mathematics with Applications 63:1536-1547 (2012).

[6] Miggen Cui, Yingzhen Lin.Nonlinear Numerical Analysis in the Reproducing Kernel Space.Nova Science Publishers, Inc (2008).