دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال ششم، شماره بیست و پنجم، مرداد و شهریور ۱۳۹۹
شماره شاپا: ۵۸۸-۲۵۸۸X

پژوهش‌های نوین در ریاضی

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

نتایجی برای عدد احاطه‌ای رومی ماکسیمال در گراف‌ها

مریم کمالی پاشاکلایی[۱]، حسین عبداله زاده آهنگر[۱*]، مهران مطیعی[۱]، سید محمود شیخ الاسلامی[۲]

[۱و۲و۳] گروه ریاضی، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل، ایران
[۴] گروه ریاضی، دانشگاه شهید مدنی آذربایجان، تبریز، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۸/۰۱/۱۸ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۸/۰۴/۳۰

چکیده

تابع $f:V(G) \to \{0,1,2\}$ یک تابع احاطه‌گر رومی (RDF) برای گراف G نامیده می‌شود هرگاه هر راس u که $f(u) = 0$ مجاور به یک راس v که $f(v) = 2$، باشد. وزن یک RDF f برابر است با $w(f) = \sum_{v \in V} f(v)$. عدد احاطه‌گر رومی گراف G را با نماد $\gamma_R(G)$ نمایش می‌دهیم که کمترین وزن یک RDF در گراف G است. تابع احاطه‌گر رومی ماکسیمال (MRDF) برای گراف G یک تابع احاطه‌گر رومی $f = (V_0, V_1, V_2)$ می‌باشد به‌طوری که $V_0 = \{v \in V(G) | f(v) = 0\}$ یک مجموعه‌ی احاطه‌گر برای گراف G نباشد. وزن یک MRDF f برابر با $w(f) = \sum_{v \in V} f(v)$ است. عدد احاطه‌گر رومی ماکسیمال گراف G را با نماد $\gamma_{mR}(G)$ نمایش می‌دهیم که کمترین وزن یک MRDF در گراف G است. در این مقاله مطالعه روی پارامتر احاطه‌گر رومی ماکسیمال را ادامه می‌دهیم. ابتدا تمام گراف‌های G با کمر حداقل ۶ که $\gamma_{mR}(G) = n - 2$ باشد، را دسته‌بندی می‌کنیم و سپس ویژگی مورد نظر را برای برخی از گراف‌های با کمر ۵ بررسی می‌نماییم.

واژه‌های کلیدی: تابع احاطه‌گر رومی، عدد احاطه‌گر رومی، تابع احاطه‌گر رومی ماکسیمال، عدد احاطه‌گر رومی ماکسیمال.

*. عهده دار مکاتبات: Email: ha.ahangar@nit.ac.ir

۱. مقدمه

برای اصطلاحات و نمادهای نظریه گراف که در مقاله ارائه نشده است، خواننده را به [۶، ۷] ارجاع می‌دهیم. در این مقاله، گراف $G=(V,E)$ با مجموعه راس‌های $V=V(G)$ و مجموعه یال‌های $E=E(G)$ است. مرتبه و اندازه گراف G را به‌ترتیب با $|V|=n$ و $|E|=m$ نشان می‌دهیم. مجموعه‌ی همه راس‌هایی که با راس v مجاورند را همسایگی باز v نامیده و به صورت $N(v)$ نشان می‌دهیم و همسایگی بسته‌ی v را به‌صورت $N[v]=N(v)\cup\{v\}$ تعریف می‌کنیم. $N(S)=\cup_{v\in S}N(v)$ همسایگی باز $S\subseteq V$ و همسایگی بسته آن برابر با $N[S]=N(S)\cup S$ است. درجه‌ی راس $v\in V(G)$ برابر است با $deg_G(v)=deg(v)=|N(v)|$، مینیمم و ماکسیمم درجه‌ی گراف G را به ترتیب با $\delta=\delta(G)$ و $\Delta=\Delta(G)$ معرفی می‌کنیم. راس با درجه‌ی یک را برگ و گراف همبند بدون دور را درخت می‌نامیم. منظور از K_n گراف کامل از مرتبه n، C_n دور به طول n و P_n مسیر به طول $n-1$ می‌باشد. فاصله‌ی دورترین راس گراف G نسبت به راس v را خروج از مرکز گراف G گوییم و با نماد $e(v)$ نشان می‌دهیم. به بزرگترین خروج از مرکز راس‌ها در یک گراف قطر گراف گویند که با $diam(G)$ نشان می‌دهیم. کمر گراف G، طول کوتاهترین دور در آن گراف می‌باشد که با $g(G)$ نشان می‌دهیم. اگر گراف G شامل دور نباشد، کمر آن را ∞ تعریف می‌کنیم. طول کوتاه‌ترین مسیر از راس u نسبت به راس v در گراف G را فاصله‌ی u از v نامیده که با $d(u,v)$ نشان می‌دهیم.

مجموعه $A\subseteq V(G)$ یک مجموعه‌ی احاطه‌گر نامیده می‌شود هرگاه $N[A]=V(G)$. عدد احاطه‌گر گراف G که با $\gamma(G)$ نشان داده می‌شود برابر با تعداد اعضای یک مجموعه احاطه‌گر است که کمترین تعداد عضو ممکن را دارد. هر مجموعه احاطه‌گر با مینیمم تعداد عضو را با $\gamma(G)$-مجموعه نشان می‌دهیم. مجموعه احاطه‌گر $D\subseteq V(G)$ یک مجموعه احاطه‌گر ماکسیمال (MDS) نامیده می‌شود هرگاه $V-D$ یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف G نباشد. عدد احاطه‌گر ماکسیمال گراف G که با $\gamma_m(G)$ نشان داده می‌شود برابر با تعداد اعضای یک مجموعه احاطه‌گر ماکسیمال است که کمترین تعداد عضو ممکن را دارد. مفهوم احاطه‌گر ماکسیمال توسط کولی و جاناکرام [۸] معرفی شده است و برای اطلاعات بیشتر خواننده را به [۹] ارجاع می‌دهیم.

تابع $f:V(G)\rightarrow\{0,1,2\}$ یک تابع احاطه‌گر رومی (RDF) برای گراف G نامیده می‌شود هرگاه هر راس u که $f(u)=0$، مجاور به یک راس v باشد که $f(v)=2$. وزن یک RDF f برابر است با $w(f)=\sum_{v\in V}f(v)$. عدد احاطه‌گر رومی گراف G را با نماد $\gamma_R(G)$ نمایش می‌دهیم که کمترین وزن یک RDF در گراف G است (برای اطلاعات بیشتر خواننده را به [۴، ۵، ۶، ۷] ارجاع می‌دهیم). تابع احاطه‌گر رومی ماکسیمال (MRDF) برای گراف G یک تابع احاطه‌گر رومی $f=(V_0,V_1,V_2)$ می‌باشد که در آن $V_0=\{v\in V(G)|f(v)=0\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف G نباشد. وزن یک MRDF f برابر است با $w(f)=\sum_{v\in V}f(v)$. عدد احاطه‌گر رومی ماکسیمال گراف G که با نماد $\gamma_{mR}(G)$ نمایش می‌دهیم کمترین وزن یک MRDF در گراف G است. پارامتر احاطه‌ای رومی ماکسیمال توسط عبداله‌زاده آهنگر و همکاران در [۱] معرفی شده است. برای اطلاعات بیشتر خواننده را به [۲، ۳] ارجاع می‌دهیم.

عبداله‌زاده آهنگر و همکاران [۱] پارامتر احاطه‌ای رومی ماکسیمال را معرفی نمودند و در آن مقاله گراف‌هایی از مرتبه n با عدد احاطه‌ای رومی ماکسیمال بزرگ، یعنی $\gamma_{mR}(G)=n$ را دسته‌بندی نموده‌اند. در ادامه عبداله‌زاده آهنگر و همکاران [۳] گراف‌هایی از مرتبه n با عدد احاطه‌ای رومی ماکسیمال $n-1$ را دسته‌بندی نموده‌اند. همچنین عبداله‌زاده آهنگر و همکاران [۲] تمام درخت‌های از مرتبه‌ی n با ویژگی عدد احاطه‌ای رومی ماکسیمال برابر $n-2$ را دسته‌بندی کردند. در این مقاله مطالعه روی پارامتر احاطه‌ای رومی ماکسیمال را ادامه می‌دهیم. به ویژه پارامتر احاطه‌ای رومی ماکسیمال را برای تمام گراف‌های G با کمر حداقل ۶ مورد مطالعه قرار می‌دهیم، یعنی تمام گراف‌های G با کمر حداقل ۶ و ویژگی $\gamma_{mR}(G)=n-2$ را دسته‌بندی می‌کنیم.

سپس ویژگی مورد نظر را برای برخی از گراف‌های با کمر ۵ بررسی می‌نماییم. در این مقاله تمام گراف‌ها همبند و غیربدیهی می‌باشند.
نتایج زیر را در بخش‌های دیگر مقاله مورد استفاده قرار می‌دهیم.

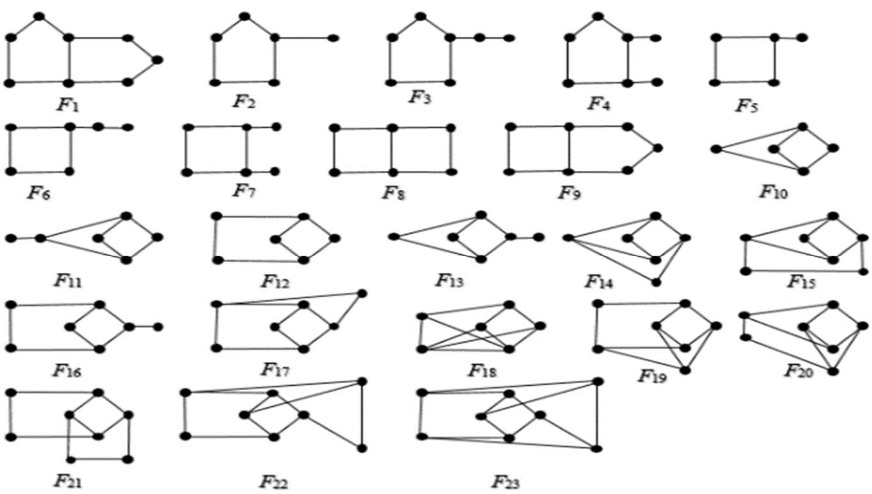
قضیه الف: [۱] برای هر گراف G داریم:
$\gamma_{mR}(G) \leq \gamma_R(G) + \delta(G)$.

گزاره ب: [۱] برای هر عدد صحیح مثبت $k \geq 1$،
$\gamma_{mR}(C_{3k}) = 2k + 1$،
$\gamma_{mR}(C_{3k+1}) = 2k + 2$
و
$\gamma_{mR}(C_{3k+2}) = 2k + 3$.

قضیه پ: [۱] برای هر گراف G از مرتبه‌ی حداقل ۲ داریم:
$\gamma_R(G) \leq n - \Delta(G) + 1$.

مشاهده ت: [۳] اگر $G \neq K_n$ گرافی از مرتبه‌ی حداقل ۴ باشد، آن‌گاه $\gamma_{mR}(G) \geq \delta(G) + 2$.

قضیه ث: [۳] اگر G گرافی از مرتبه‌ی حداقل ۵ و فاقد دور سه راسی باشد، آن‌گاه $\gamma_{mR}(G) = n - 1$ اگر و فقط اگر G گرافی است که از گراف $K_{1,3}$ با زیر تقسیم کردن $t \in \{0,1,2,3\}$ یال از آن حاصل شود یا $G \in \{P_5, P_6, P_7, C_6, C_7, C_8, S_{2,2}\} \cup \mathcal{F}$.



شکل ۱- خانواده $\mathcal{F}$

۲- نتایج مقدماتی

در این بخش نتایجی را که برای بخش‌های دیگر مورد نیاز است ارائه می‌دهیم.

گزاره ۱. اگر G گرافی از مرتبه‌ی $n \geq 4$ باشد و $\gamma_{mR}(G) = n - 2$، آن‌گاه
$\Delta(G) - \delta(G) \leq 3$.

اثبات: با استفاده از قضیه‌های الف و پ داریم:

$$n - 2 = \gamma_{mR}(G) \leq \gamma_R(G) + \delta(G) \leq n - \Delta(G) + 1 + \delta(G)$$

لذا

$\Delta(G) - \delta(G) \leq 3$.

نتیجه ۲. اگر G گرافی از مرتبه‌ی $n \geq 4$ باشد که $\gamma_{mR}(G) = n - 2$، آن‌گاه $\delta(G) \leq n - 4$.

اثبات: با به‌کارگیری مشاهده‌ی ت، نتیجه بدیهی است.■

لم ۳. فرض کنید G گرافی از مرتبه‌ی n باشد و $\gamma_{mR}(G) = n - 2$. در این‌صورت:

(الف) اگر v راسی از درجه‌ی حداقل ۴ باشد، آن‌گاه به ازای هر $u \in V(G)$، $d(u, v) \le 2$.

(ب) اگر v راسی از درجه‌ی ۳ باشد، آن‌گاه به ازای هر $u \in V(G)$، $d(u, v) \le 5$.

اثبات: (الف) فرض کنید v راسی از درجه‌ی حداقل ۴ باشد و فرض (خلف) کنید راسی مانند u وجود داشته باشد که در فاصله‌ی حداقل ۳ از v است. در این‌صورت تابع $f: V(G) \to \{0,1,2\}$ را به صورت زیر تعریف کنید:

$f(v) = 2$ ،$f(x) = 0$

که در آن $x \in N(v)$ و برای بقیه‌ی رئوس گراف قرار دهید $f(x) = 1$. واضح است که f یک MRDF برای گراف G است و $w(f) = n - |N[v]| + 2 \times 1$
$\le n - 5 + 2$
$= n - 3$

بنابراین با توجه به تعریف MRDF داریم: $\gamma_{mR}(G) \le n - 3$، که تناقض است.

(ب) فرض کنید v راسی از درجه‌ی ۳ باشد و فرض (خلف) کنید که راسی مانند u در فاصله‌ی حداقل ۶ نسبت به v وجود داشته باشد. w را راسی واقع بر مسیر $u - v$ و در فاصله‌ی ۳ نسبت به v در نظر بگیرید. واضح است که تابع

$f = (N(v) \cup N(w), V(G) - (N[v] \cup N[w]), \{v, w\})$

یک MRDF برای گراف G است و وزنش برابر است با:

$w(f) = n - |N[v] \cup N[w]| + 2 \times 2$
$\le n - 7 + 4$
$= n - 3$

یعنی $\gamma_{mR}(G) \le n - 3$ که تناقض است. ■

۳- دسته‌بندی گراف‌های G با کمر حداقل ۶، از مرتبه n و عدد احاطه‌ای رومی ماکسیمال $n - 2$

لم ۴. اگر G گرافی با کمر ۶، ۷ یا ۸، از مرتبه‌ی حداقل $g(G) + 1$ و $\gamma_{mR}(G) = n - 2$ باشد، آن‌گاه $\Delta(G) = 3$.

اثبات: چون G گرافی از مرتبه‌ی $g(G) + 1$ است، لذا $\Delta(G) \neq 2$. فرض (خلف) کنید که $\Delta(G) \ge 4$ و همچنین فرض کنید x راسی دلخواه با ماکزیمم درجه باشد. به وضوح راسی مانند y وجود دارد به طوری‌که $d(x, y) \ge 3$، که با لم ۳-الف در تناقض است. ■

تبصره: در نتایج زیر و اثبات‌های مربوطه نماد C همان $C_{g(G)}$ است.

لم ۵. فرض کنید G گرافی با کمر حداقل ۷ و از مرتبه‌ی n باشد. اگر $\gamma_{mR}(G) = n - 2$ و دور C دو راس از درجه‌ی ۳ داشته باشد، آن‌گاه این دو راس مجاورند.

اثبات: فرض کنید $C = (x_1 x_2 \dots x_{g(G)})$ یک دور از G باشد. فرض (خلف) کنید که دو راس از درجه‌ی ۳ روی دور C مجاور نباشند. حالت‌های زیر وجود دارد:

حالت الف: $\deg(x_1) = \deg(x_3) = 3$.

فرض کنید y_1 و y_2 به ترتیب مجاورهای x_1 و x_3 باشند که روی دور C نیستند. به‌وضوح تابع

$f = (N(x_3) \cup N(x_6), V(G) - (N[x_3] \cup N[x_6]), \{x_3, x_6\})$

یک MRDF برای گراف G با وزن $n - 3$ است. بنابراین $\gamma_{mR}(G) \le n - 3$ که تناقض است.

حالت ب: $\deg(x_1) = \deg(x_i) = 3$ که در آن $i \in \{4,5, \dots, \lceil \frac{n}{2} \rceil + 1\}$.

فرض کنید y_1 و y_2 به ترتیب مجاورهای x_1 و x_i باشند که روی دور C نیستند. تابع f را به صورت زیر تعریف کنید:

$$f = (N(x_1) \cup N(x_i) - \{y_1\}, V(G) - (N[x_1] \cup N[x_i] - \{y_1\}), \{x_1, x_i\})$$

این تابع یک MRDF برای G با وزن $n-3$ است. لذا $\gamma_{mR}(G) \leq n-3$ که تناقض می‌باشد. ■

لم ۶. فرض کنید G گرافی با کمر ۷ یا ۸ و از مرتبه‌ی n باشد. اگر $\gamma_{mR}(G) = n-2$، آن‌گاه هر راس خارج دور C از درجه‌ی حداکثر ۲ می‌باشد.

اثبات: فرض کنید $C = (x_1 x_2 \dots x_{g(G)})$، $\deg(x_1) = 3$ و y_1 مجاور x_1 باشد که روی دور C نیست. با توجه به کمر گراف هر راس خارج دور C، مانند y، حداکثر به یکی از رئوس C مجاور است.

فرض (خلف) کنید $\deg(y = y_1) = 3$. تابع:

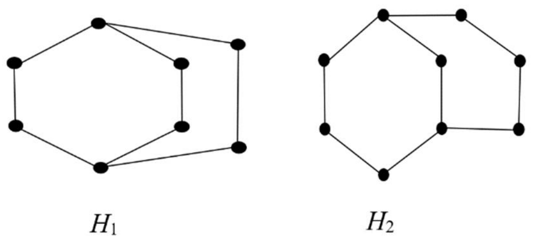
$$f = (N(y_1) \cup N(x_3), V(G) - (N[y_1] \cup N[x_3]), \{y_1, x_3\})$$

یک MRDF برای G با وزن $n-3$ است لذا $\gamma_{mR}(G) \leq n-3$ که با فرض در تناقض است.

حال فرض کنید راس y به هیچکدام از رئوس C مجاور نباشد. چون هیچ دو راس از $N(y)$ مجاور به دو راس مجاور از C نیستند، لذا به‌سادگی قابل بررسی است که $\gamma_{mR}(G) \leq n-3$، که تناقض است. ■

گزاره ۷. فرض کنید G گرافی با کمر حداقل ۷ و از مرتبه‌ی n باشد. اگر $\gamma_{mR}(G) = n-2$ باشد، آن‌گاه G حداکثر دو راس از درجه‌ی ۳ دارد.

اثبات: با توجه به لم‌های ۵ و ۶ نتیجه دلخواه حاصل می‌شود. ■



شکل ۲- گراف‌های H_1 و H_2

مشاهده ۸. اگر $G \in \{H_1, H_2\}$ باشد، آن‌گاه $\gamma_{mR}(G) = |V(G)| - 2$.

لم ۹. فرض کنید $G \ncong H_1, H_2$ گرافی با کمر ۶ و از مرتبه‌ی n باشد. اگر $\gamma_{mR}(G) = n-2$ و دور C حداقل دو راس از درجه‌ی ۳ داشته باشد، آن‌گاه هر راس خارج دور C برگ است.

اثبات: فرض کنید $C = (x_1 x_2 \dots x_6)$ یک دور در G باشد که دو راس آن از درجه‌ی ۳ هستند. حالت‌های زیر را بررسی می‌کنیم:

الف) دو راس مجاور باشند.

بدون از دست‌دادن کلیت مساله فرض کنید y_1 و y_2 مجاورهای x_1 و x_2 باشند. فرض (خلف) کنید که y_1 برگ نباشد و $y_1 y_3 \in E(G)$. اگر راس‌های x_4 و y_3 مجاور نباشند، آن‌گاه تابع:

$$f = (N(x_2) \cup N(x_5), V(G) - (N[x_2] \cup N[x_5]), \{x_2, x_5\})$$

یک MRDF برای گراف G با وزن $n-3$ می‌باشد. در نتیجه $\gamma_{mR}(G) \leq n-3$، که تناقض است.

حال فرض کنید $x_4 y_3 \in E(G)$. در این‌صورت تابع

$$f = (N(x_1) \cup N(x_4) - \{x_2\}, V(G) - (N[x_1] \cup N[x_4] - \{x_2\}), \{x_1, x_4\})$$

یک MRDF برای گراف G با وزن $n-3$ است. در نتیجه $\gamma_{mR}(G) \leq n-3$، که تناقض می‌باشد.

ب) دو راس مجاور نباشند.

ابتدا فرض کنید $\deg(x_1) = \deg(x_3) = 3$ و راس‌های y_1 و y_2 به‌ترتیب مجاورهای x_1 و x_3 باشند که روی دور C نیستند. فرض (خلف) کنید که y_1 برگ نباشد و $y_1y_3 \in E(G)$. چون $G \ncong H_2$، اگر $x_4\, y_3 \notin E(G)$، آن‌گاه تابع

$$f = (N(x_3) \cup N(x_6), V(G) - (N[x_3] \cup N[x_6]), \{x_3, x_6\})$$

یک MRDF برای گراف G با وزن $n-3$ می‌باشد. بنابراین $\gamma_{mR}(G) \leq n-3$ که تناقض است.

حال فرض کنید $x_4\, y_3 \in E(G)$. واضح است که همانند حالت الف یک MRDF برای گراف G با وزن $n-3$ می‌توان یافت، که تناقض می‌باشد.

در نهایت اگر $\deg(x_1) = \deg(x_4) = 3$ و y_1 و y_2 به ترتیب مجاورهای x_1 و x_4 باشند که روی دور C نیستند، چون $G \ncong H_1$، آن‌گاه تابع

$$f = (N(x_1) \cup N(x_4) - \{y_1\}, V(G) - (N[x_1] \cup N[x_4] - \{y_1\}), \{x_1, x_4\})$$

یک MRDF برای گراف G با وزن $n-3$ می‌باشد. بنابراین $\gamma_{mR}(G) \leq n-3$ که تناقض می‌باشد.■

لم ۱۰. فرض کنید G گرافی از مرتبه‌ی n و با کمر حداقل ۷ باشد. اگر $\gamma_{mR}(G) = n-2$ و دو راس دور C از درجه‌ی ۳ باشند، آن‌گاه هر راس خارج دور C برگ است.

اثبات: فرض کنید $C = (x_1x_2 \dots x_{g(G)})$ دوری از گراف G است که دو راس آن از درجه‌ی ۳ می‌باشند. بنا به لم ۵ این دو راس مجاورند. بدون از دست‌دادن کلیت مساله فرض کنید x_1 و x_2 دو راس مورد نظر باشند و y_1 و y_2 به ترتیب مجاورهای آن‌ها باشند که روی دور C نیستند. فرض (خلف) کنید که y_1 برگ نباشد. چون $g(G) \geq 7$، راس y_1 به y_2 و رئوس C مجاور نیست. بنابراین باید راسی مانند y_3 وجود داشته باشد که $y_1y_3 \in E(G)$. لذا تابع

$$f = (N(x_2) \cup N(x_5), V(G) - (N[x_2] \cup N[x_5]), \{x_2, x_5\})$$

یک MRDF برای گراف G با وزن $n-3$ می‌باشد. بنابراین $\gamma_{mR}(G) \leq n-3$ که تناقض است. ■

لم ۱۱. فرض کنید $G \ncong H_2$ گرافی با کمر ۶، ۷ یا ۸، ماکزیمم درجه‌ی ۳ و از مرتبه‌ی n باشد. اگر G شامل $P_l = x_iy_1 \dots y_l$، $C = (x_1x_2 \dots x_{g(G)})$ باشد که برای یک i، $V(C) \cap V(P_l) = \{x_i\}$ و $\gamma_{mR}(G) = n-2$، آن‌گاه $l \leq 2$.

اثبات: بدون از دست دادن کلیت مساله فرض کنید $i = 1$. فرض (خلف) کنید که $l \geq 3$.

اگر $y_3x_5 \notin E$، آن‌گاه تابع

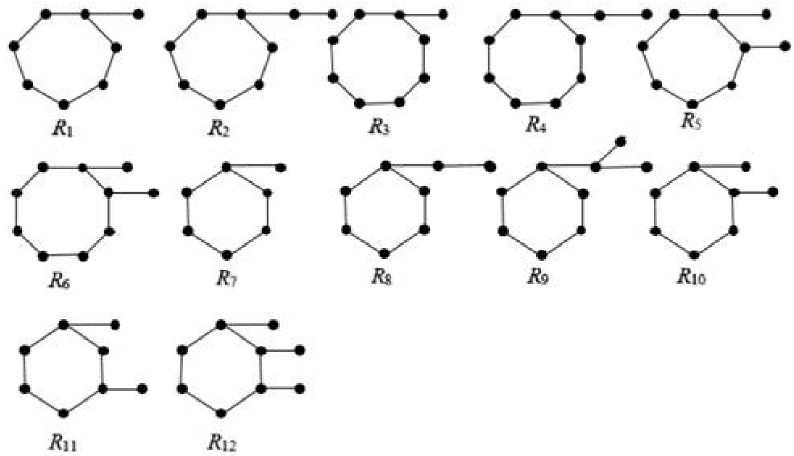
$$f = (N(x_1) \cup N(x_4), V(G) - (N[x_1] \cup N[x_4]), \{x_1, x_4\})$$

یک MRDF برای گراف G با وزن $n-3$ می‌باشد. بنابراین $\gamma_{mR}(G) \leq n-3$ که تناقض است.

حال فرض کنید $y_3x_5 \in E$. در این‌صورت تابع

$$f = (N(x_1) \cup N(x_5) - \{y_3\}, V(G) - (N[x_1] \cup N[x_5] - \{y_3\}), \{x_1, x_5\})$$

یک MRDF برای گراف G با وزن $n-3$ می‌باشد. در نتیجه $\gamma_{mR}(G) \leq n-3$ که تناقض است. ■



شکل ۳- خانواده $\mathcal{R}$

قضیه ۱۲. فرض کنید G گرافی از مرتبه n و با کمر حداقل ۶ باشد. در این‌صورت $\gamma_{mR}(G) = n - 2$ اگر و فقط اگر $G \in \{C_9, C_{10}, C_{11}, H_1, H_2\} \cup \mathcal{R}$.

اثبات: فرض کنید $\gamma_{mR}(G) = n - 2$. فرض کنید $C = (x_1x_2 \dots x_{g(G)})$ یک دور از G باشد. حالت‌های زیر را بر اساس کمر گراف در نظر می‌گیریم:

حالت اول: $g(G) \geq 9$.

نشان می‌دهیم $\Delta(G) = 2$. فرض (خلف) کنید که $\Delta(G) \geq 3$. بدون از دست‌دادن کلیت مساله فرض کنید $\deg(x_1) \geq 3$ و $x_1 y_1 \in E(G)$. چون $g(G) \geq 9$ لذا y_1 با هیچ یک از رئوس C مجاور نیست. حال واضح است که تابع

$f = (\{x_2, x_{g(G)}, x_3, x_5, x_6, x_8\}, V(G) - \{x_1, x_2, x_{g(G)}, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}, \{x_1, x_4, x_7\})$

یک MRDF برای گراف G با وزن $n - 3$ می‌باشد. در نتیجه $\gamma_{mR}(G) \leq n - 3$ که تناقض است. لذا با توجه به گزاره‌ی ب، $G \in \{C_9, C_{10}, C_{11}\}$.

حالت دوم: $g(G) \in \{7,8\}$.

اگر $\Delta(G) = 2$، آن‌گاه G یکی از گراف‌های C_7 یا C_8 می‌باشد که بنا به گزاره‌ی ب، $\gamma_{mR}(C_7) = 6$ و $\gamma_{mR}(C_8) = 7$ که تناقض است. حال بنا به لم ۴ داریم: $\Delta(G) = 3$. با توجه به لم‌های ۵ ، ۶ ، ۱۰ و ۱۱ داریم: $G \cong R_i$ که در آن $i = 1,2, \dots, 6$.

حالت سوم: $g(G) = 6$.

همانند حالت دوم نتیجه می‌شود که $\Delta(G) = 3$. اگر دور C فقط یک راس از درجه ۳ داشته باشد، آن‌گاه با توجه به لم ۱۱ نتیجه می‌گیریم که $G \cong R_i$ که در آن $i = 7,8,9$. حال فرض کنید دور C دو راس از درجه ۳ داشته باشد. در این حالت با توجه به مشاهده‌ی ۸ و لم ۹ نتیجه می‌شود $G \cong R_i$ که در آن $i = 10$ و 11. در نهایت فرض کنید دور C سه راس از درجه ۳ داشته باشد. قرار دهید y_1، y_2 و y_3 به ترتیب مجاورهای x_1، x_3 و x_5 باشند. واضح است که تابع

$f = (N(x_3) \cup N(x_5), V(G) - (N[x_3] \cup N[x_5]), \{x_3, x_5\})$

یک MRDF برای گراف G با وزن $n - 3$ می‌باشد. در نتیجه $\gamma_{mR}(G) \leq n - 3$ که تناقض است. حال با توجه به لم ۹ نتیجه می‌شود که $G \cong R_{12}$.

بررسی حالت عکس قضیه واضح است. ■

۴- دسته بندی گراف‌هایی از مرتبه n، کمر ۵ و عدد احاطه‌ای رومی ماکسیمال $n - 2$

لم ۱۳. فرض کنید $G \neq C$ گرافی با کمر ۵ و از مرتبه‌ی n باشد. اگر $\gamma_{mR}(G) = n-2$، آن‌گاه $\Delta(G) \in \{3,4\}$.

اثبات: فرض کنید $C = (x_1x_2x_3x_4x_5)$. فرض (خلف) کنید که $\Delta(G) \geq 5$. همچنین فرض کنید x راسی با درجه‌ی ماکزیمم و y راسی خارج دور و مجاور آن باشد. با توجه به لم ۳ -الف، $x \in C$. زیرا در غیر این‌صورت فاصله‌ی بعضی از رئوس G نسبت به راس x بیشتر از ۲ می‌باشد که تناقض است. به وضوح تابع
$f = (N(x) - \{y\}, V(G) - (N[x] - \{y\}), \{x\})$

یک MRDF برای گراف G با وزن $n-3$ می‌باشد. در نتیجه $\gamma_{mR}(G) \leq n-3$ که تناقض است. ■

لم ۱۴. فرض کنید G گرافی با کمر ۵ و از مرتبه‌ی n باشد که $\Delta(G) = 4$. اگر $\gamma_{mR}(G) = n-2$، آن‌گاه G دقیقاً یک راس از درجه‌ی ۴ دارد که روی دور C واقع است.

اثبات: فرض کنید $C = (x_1x_2x_3x_4x_5)$ یک دور از G باشد. همچن‌ین فرض کنید x راسی از درجه‌ی $\Delta(G)$ باشد. نشان می‌دهیم $x \in C$.

فرض (خلف) کنید که $x \in V(G) - V(C)$. اگر $N(x) \cap V(C) = \emptyset$، آن‌گاه فاصله‌ی بعضی از رئوس گراف G نسبت به x بیشتر از ۲ می‌باشد که با لم ۳-الف تناقض دارد. بدون از دست‌دادن کلیت مساله فرض کنید $N(x) \cap V(C) = \{x_1\}$. همچنین فرض کنید y_1 و y_2 مجاورهای x باشند که روی دور C نیستند. چون کمر گراف ۵ است، در نتیجه هر یک از y_iها که $i \in \{1,2\}$، فقط به یکی از رئوس x_3 یا x_4 مجاور می‌باشد. فرض کنید $y_1x_3 \in E(G)$ و $y_2x_4 \in E(G)$. در این‌صورت تابع
$f = (\{y_1, y_2, x_1, x_2, x_4\}, V(G) - \{x, y_1, y_2, x_1, x_2, x_3, x_4\}, \{x, x_3\})$

یک MRDF برای گراف G با وزن $n-3$ می‌باشد. در نتیجه $\gamma_{mR}(G) \leq n-3$ که تناقض است. در غیر این‌صورت بنا به لم ۳-الف تناقض است.

حال نشان می‌دهیم حداکثر یک راس C از درجه‌ی ۴ است. فرض (خلف) کنید که دو راس C از درجه‌ی ۴ باشند، حالت‌های زیر را بررسی می‌کنیم:

حالت اول: دو راس مجاور باشند.

بدون از دست دادن کلیت مساله فرض کنید $\deg(x_1) = \deg(x_2) = 4$ و رئوس y_1 و y_2 مجاور x_1 و رئوس y_3 و y_4 مجاور x_2 باشند. تابع
$f = (\{y_2, x_5, y_3, y_4, x_3\}, V(G) - \{x_1, y_2, x_5, y_3, y_4, x_2, x_3\}, \{x_1, x_2\})$

یک MRDF برای گراف G با وزن $n-3$ می‌باشد. در نتیجه $\gamma_{mR}(G) \leq n-3$ که تناقض است.

حالت دوم: دو راس مجاور نباشند.

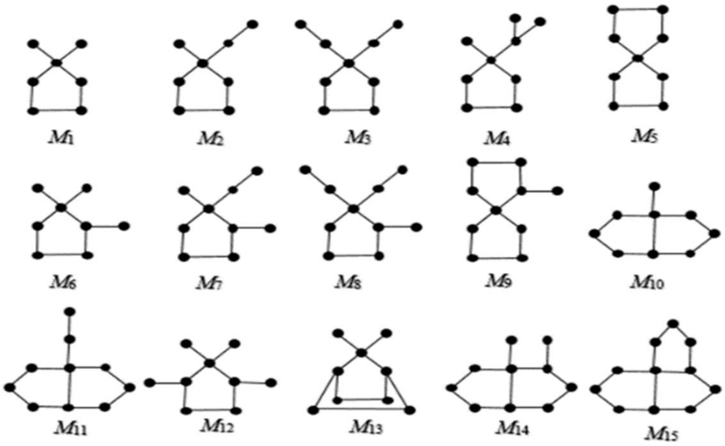
بدون از دست دادن کلیت مساله فرض کنید $\deg(x_1) = \deg(x_3) = 4$. در این‌صورت تابع
$f = (N(x_1) \cup N(x_3) - \{x_2\}, V(G) - (N[x_1] \cup N[x_3] - \{x_2\}), \{x_1, x_3\})$

یک MRDF برای گراف G با وزن $n-4$ است و نتیجه می‌دهد $\gamma_{mR}(G) \leq n-4$ که تناقض است.

لم ۱۵. فرض کنید G گرافی با کمر ۵، ماکزیمم درجه‌ی ۴ و از مرتبه‌ی n باشد.اگر $\gamma_{mR}(G) = n-2$، آن‌گاه رئوس نامجاور با راس از درجه‌ی ۴ روی دور C، از درجه‌ی ۲ می‌باشند.

اثبات: فرض کنید $C = (x_1x_2x_3x_4x_5)$ یک دور از G باشد. با توجه به لم ۱۴ بدون از دست‌دادن کلیت مساله فرض کنید $\deg(x_1) = 4$. نشان می‌دهیم $\deg(x_3) = \deg(x_4) = 2$. فرض (خلف) کنید که $\deg(x_3) = 3$ یا $\deg(x_4) = 3$. در این‌صورت به‌وضوح تابع
$f = (N(x_1) \cup N(x_3) - \{x_2\}, V(G) - (N[x_1] \cup N[x_3] - \{x_2\}), \{x_1, x_3\})$

یک MRDF برای گراف G با وزن $n-3$ می‌باشد. بنابراین $\gamma_{mR}(G) \leq n-3$ که تناقض است. ■



شکل ۴- خانواده $\mathcal{M}$

قضیه ۱۶. فرض کنید G گرافی با کمر ۵، ماکزیمم درجه‌ی ۴ و از مرتبه‌ی n باشد. در این‌صورت $\gamma_{mR}(G) = n - 2$ اگر و فقط اگر $G \in \mathcal{M}$.

اثبات: فرض کنید $\gamma_{mR}(G) = n - 2$. اگر $C = (x_1x_2x_3x_4x_5)$ یک دور از گراف G باشد، آن‌گاه بنا به لم ۱۴، G فقط یک راس از درجه‌ی ۴ دارد که روی دور C نیز واقع است. بدون از دست‌دادن کلیت مساله فرض کنید $\deg(x_1) = 4$ و راس‌های y_1 و y_2 مجاورهای x_1 باشند که روی دور C نیستند. بنا به لم ۱۵ نتیجه می‌شود که برای هر $i \in \{3,4\}$، $\deg(x_i) = 2$. حالت‌های زیر را بررسی می‌کنیم:

حالت اول: برای هر $i \in \{2,5\}$، $\deg(x_i) = 2$،

ادعا ۱. اگر G تک‌دور باشد و یکی از راس‌های مجاور به راس درجه‌ی ۴ که روی دور C نیست از درجه‌ی ۳ باشد، آن‌گاه راس دیگر برگ می‌باشد.

اثبات: فرض کنید $\deg(y_1) = 3$ و فرض (خلف) کنید که $\deg(y_2) \geq 2$ و y_3 مجاور به y_2 باشد. در این‌صورت با تعریف تابع

$$f = (N(y_1) \cup N(x_3), V(G) - (N[y_1] \cup N[x_3]), \{y_1, x_3\})$$

یک MRDF برای گراف G با وزن $n - 3$ می‌باشد.

بنابراین $\gamma_{mR}(G) \leq n - 3$ که تناقض است. □

حال بنا به لم ۳ –الف هر راس از G در فاصله‌ی حداکثر ۲ نسبت به راس x_1 است. لذا با توجه به ادعای ۱ نتیجه می‌شود که برای هر $i \in \{1,2,3,4\}$، $G \cong M_i$.

حال فرض کنید G تک‌دور نباشد. بنا به مفروضات بالا، $\deg(x_i) = 2$ که در آن $i \neq 1$. لذا با توجه به لم ۳-الف راس‌های y_1 و y_2 باید در یک دور واقع شوند. از طرفی باید $\deg(y_1) = \deg(y_2) = 2$. به این ترتیب نتیجه می‌شود که $G \cong M_5$.

حالت دوم: $\deg(x_2) = 3$ و $\deg(x_5) = 2$ (یا $\deg(x_5) = 3$ و $\deg(x_2) = 2$).

بدون از دست‌دادن کلیت مساله فرض کنید $\deg(x_2) = 3$ و $x_2y_3 \in E(G)$.

ادعا ۲. اگر y_3 برگ باشد، آن‌گاه هر راس خارج دور C از درجه‌ی حداکثر ۲ می‌باشد.

اثبات: فرض (خلف) کنید که $\deg(y_1) \geq 3$. با توجه به لم ۱۴ داریم: $\deg(y_1) = 3$. در این‌صورت تابع

$$f = (N(y_1) \cup N(x_4), V(G) - (N[y_1] \cup N[x_4]), \{y_1, x_4\})$$

یک MRDF برای گراف G با وزن $n - 3$ می‌باشد.

بنابراین $\gamma_{mR}(G) \leq n-3$ که تناقض است. □
به این ترتیب با توجه به ادعای ۲ و مفروضات بالا و لم ۳-الف داریم: $G \cong M_6, M_7, M_8, M_9$.
حال فرض کنید y_3 برگ نباشد و $y_3y_4 \in E(G)$. با توجه به لم ۳-الف راس y_4 باید فقط به یکی از رئوس y_1 یا y_2 مجاور باشد، درغیر این‌صورت تناقض است. به این ترتیب $G \cong M_{10}, M_{11}$.

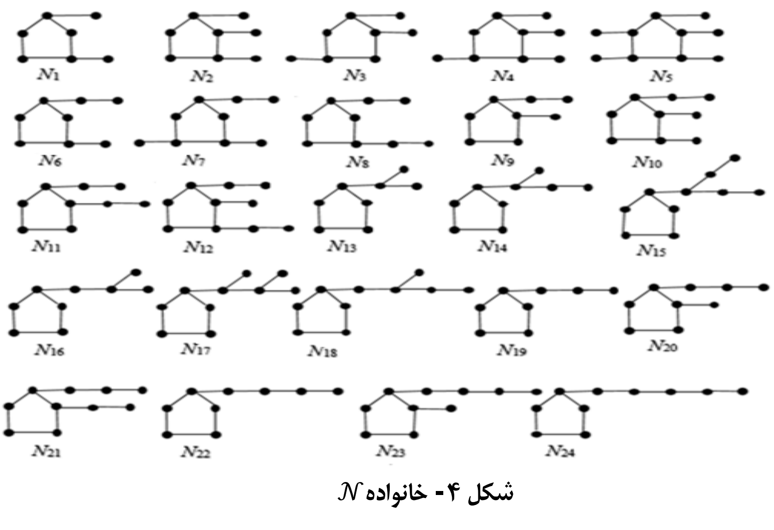
حالت سوم: برای هر $i \in \{2,5\}$، $\deg(x_i) = 3$. فرض کنید y_3 و y_4 به ترتیب مجاورهای x_2 و x_5 باشند.

ادعا ۳. اگر y_3 و y_4 برگ باشند، آن‌گاه y_1 و y_2 برگ هستند.
اثبات: فرض (خلف) کنید که $\deg(y_1) = 2$. در این‌صورت تابع
$$f = (N(x_2) \cup N(x_5), V(G) - (N[x_2] \cup N[x_5]), \{x_2, x_5\})$$

یک MRDF برای گراف G با وزن $n-3$ می‌باشد. بنابراین $\gamma_{mR}(G) \leq n-3$ که تناقض است. □
حال با توجه به ادعای ۳ و مفروضات بالا نتیجه می‌شود که $G \cong M_{12}$.
حال فرض کنید راس‌های y_3 یا y_4 برگ نباشند. اگر $y_3y_4 \in E(G)$، آن‌گاه به‌وضوح y_1 و y_2 برگ هستند. در غیر این‌صورت تناقض حاصل می‌شود. لذا $G \cong M_{13}$. اگر $y_3y_4 \notin E(G)$، آن‌گاه بنا به لم ۳-الف و فرض $g(G) = 5$، y_3 باید حداکثر با یکی از رئوس y_1 یا y_2، مثلاً y_1، همسایه مشترک داشته باشد. حال اگر y_4 برگ باشد، آن‌گاه $G \cong M_{14}$ و اگر y_4 برگ نباشد، طبق مفروضات بالا حداکثر یک همسایه مشترک با y_2 دارد. لذا $G \cong M_{15}$.
بررسی حالت عکس قضیه واضح است. ■
در این قسمت به دسته بندی گراف‌های تک‌دور از مرتبه n، کمر ۵، ماکزیمم درجه ۳ و با عدد احاطه‌ای رومی ماکسیمال $n-2$ می‌پردازیم.

لم ۱۷. فرض کنید G گراف تک‌دور با کمر ۵، ماکزیمم درجه‌ی ۳ و از مرتبه‌ی n باشد. فرض کنید G شامل $C_5 = (x_1x_2 \dots x_5)$ و $P_l = x_iy_1 \dots y_l$ باشد که برای یک i، $V(C_5) \cap V(P_l) = \{x_i\}$. اگر $\gamma_{mR}(G) = n-2$ باشد، آن‌گاه $l \leq 5$.
اثبات: بدون از دست‌دادن کلیت مساله فرض کنید $i = 1$. فرض (خلف) کنید که $l \geq 6$. تابع
$$f = (N(y_3) \cup N(x_1), V(G) - (N[y_3] \cup N[x_1]), \{y_3, x_1\})$$

یک MRDF برای گراف G با وزن $n-3$ می‌باشد. بنابراین $\gamma_{mR}(G) \leq n-3$ که تناقض است. ■



شکل ۴- خانواده $\mathcal{N}$

قضیه ۱۸. فرض کنید G گراف تک‌دور با کمر ۵ و ماکزیمم درجه‌ی ۳ باشد. در این‌صورت $\gamma_{mR}(G) = n-2$ اگر و فقط اگر $G \in \mathcal{N}$.

اثبات: فرض کنید $\gamma_{mR}(G) = n-2$. فرض کنید G شامل مسیر $P_l = x_1y_1y_2\dots y_l$ و دور $C = (x_1x_2\dots x_5)$ باشد، به طوری‌که $V(C) \cap V(P_l) = \{x_1\}$. با توجه به لم۱۷، نتیجه می‌گیریم که $l \leq 5$. بنابراین حالت‌های زیر را بررسی می‌کنیم.

حالت الف) $l = 1$.

از قضیه‌ی ث نتیجه می‌شود که حداقل دو راس نامجاور C از درجه‌ی ۳ می‌باشد. به این‌ترتیب به وضوح نتیجه می‌شود که $G \in \{N_1, N_2, N_3, N_4, N_5\}$.

حالت ب) $l = 2$.

اگر $\deg(y_1) = 2$ و $\deg(x_i) = 2$ که در آن $i \neq 1$، آن‌گاه بنا به قضیه‌ی ث، نتیجه می‌گیریم که $\gamma_{mR}(G) = n-1$، لذا تناقض حاصل می‌شود.

ادعا ۴. اگر راس x_2 از درجه‌ی ۳ باشد، آن‌گاه راس‌های x_4 و x_5 از درجه‌ی ۲ هستند.

اثبات: فرض کنید y_3 مجاور x_2 باشد. همچنین فرض (خلف) کنید که $\deg(x_i) = 3$ که 5 یا $i = 4$.
به‌وضوح تابع

$$f = (N(x_2) \cup N(x_i), V(G) - (N[x_2] \cup N[x_i]), \{x_2, x_i\})$$

یک MRDF برای گراف G با وزن $n-3$ می‌باشد. بنابراین $\gamma_{mR}(G) \leq n-3$ که تناقض است.□

اگر $\deg(x_2) = 2$ باشد، آن‌گاه به سادگی نتیجه می‌شود که $G \in \{N_6, N_7, N_8\}$. حال اگر $\deg(x_2) = 3$ و برای هر $i \neq 1$ گراف G شامل مسیر $x_iy_3y_4$ نباشد، آن‌گاه با توجه به ادعای ۴ و با یک بررسی ساده می‌توان نتیجه گرفت که $G \in \{N_9, N_{10}\}$. اگر $\deg(x_2) = 3$ و برای هر $i \neq 1$ گراف G شامل مسیر $x_iy_3y_4$ باشد (می‌توان i را ۲ نیز در نظر گرفت)، آن‌گاه با توجه به ادعای ۴ و با یک بررسی ساده می‌توان نتیجه گرفت که $G \in \{N_{11}, N_{12}\}$.

حال فرض کنید $\deg(y_1) = 3$ و y_3 مجاور y_1 باشد.

ادعا ۵. برای هر $i \in \{2,3,4,5\}$، $\deg(x_i) = 2$.

اثبات: فرض (خلف) کنید که $\deg(x_i) = 3$ برای بعضی $i = 2,3,4,5$.

اگر $i = 2$ (یا $i = 5$)، آن‌گاه تابع

$$f = (N(y_1) \cup N(x_4), V(G) - (N[y_1] \cup N[x_4]), \{y_1, x_4\})$$

یک MRDF برای گراف G با وزن $n-3$ است. بنابراین $\gamma_{mR}(G) \leq n-3$ که تناقض است.

حال فرض کنید $i = 3$ (یا$i = 4$). در این‌صورت تابع

$$f = (N(y_1) \cup N(x_3) - \{y_2\}, V(G) - (N[y_1] \cup N[x_3] - \{y_2\}), \{y_1, x_3\})$$

یک MRDF برای گراف G با وزن $n-3$ است. بنابراین $\gamma_{mR}(G) \leq n-3$ که تناقض است. □

بنابراین با توجه به ادعای ۵ و مفروضات بالا نتیجه می‌شود که $G \cong N_{13}$.

حالت پ) $l \geq 3$.

ادعا ۶. $\deg(x_j) = 2$ برای $j = 3,4$.

اثبات: فرض (خلف) کنید $\deg(x_3) = 3$. تابع

$$f = (N(x_1) \cup N(x_3), V(G) - (N[x_1] \cup N[x_3]), \{x_1, x_3\})$$

یک MRDF برای گراف G با وزن $n-3$ می‌باشد. بنابراین $\gamma_{mR}(G) \leq n-3$ که تناقض است. □

اگر $\deg(y_1) = 3$ باشد (یا $\deg(y_2) = 3$ باشد.) با توجه به ادعای ۵، نتیجه می‌شود که $G \in \{N_{14}, N_{15}, N_{16}, N_{17}, N_{18}\}$.

اگر $l \geq 3$ و رئوس y_1 یا y_2 از درجه‌ی ۲ باشند، آن‌گاه با توجه به ادعاهای ۴ و ۶ و بررسی ساده نتیجه می‌شود که $G \cong N_i$ که در آن $i = 19, 20, \dots, 24$.

بررسی حالت عکس قضیه واضح است. ■

فهرست منابع

[1] H. Abdollahzadeh Ahangar, A. Bahremandpour, S.M. Sheikholeslami, N.D. Soner, Z. Tahmasbzadehbaee and L. Volkman, Maximal Roman domin-ation numbers in graphs, Util. Math. 103 (2017) 245-258.

[2] H. Abdollahzadeh Ahangar, M. Chellali, D. Kuziak, and V. Samodivkin, On maximal Roman domination in graphs, Int. J. Comput. Math. 93(7) (2016) 1093-1102.

[3] H. Abdollahzadeh Ahangar, M. Chellali, D. Kuziak, and V. Samodivkin, Connected graphs with maximal Roman domination numbers one less than their order, Ars combin. 144 (2019) 207-224.

[4] E.J. Cockayne, P.M. Dreyer Jr., S.M. Hedetniemi, and S.T. Hedetniemi,On Roman domination in graphs, Discrete Math. 278 (2004)11-22.

[5] A. Hansberg, N. Jafari Rad, and L. Volkmann, Vertex and edge critical Roman domination in graphs, Util. Math. 92 (2013) 73-88.

[6] T.W. Haynes, S.T. Hedetniemi, and P.J. Slater (eds), Domination in Graphs: Advanced Topic, Marcel Dekker, Inc. New York, 1998.

[7] T.W. Haynes, S.T. Hedetniemi, and P.J. Slater (eds), Fundamentals of Domination in Graphs, Marcel Dekker, Inc., New York, 1998.

[8] V.R. Kulli and B. Janakiram, The maximal domination number of a graph, Graph Theory Notes ofNew York, New York Academy of Sciences XXXIII (1997), 11-13.

[9] V.R. Kulli and B. Janakiram, A note on maximal domination number of a graph, Graph Theory Notes of New York, New York Academy ofSciences XXXIII (2000), 35-36.