

روش محاسباتی برای حل معادلات دیفرانسیل تصادفی تأخیری از مرتبه کسری

بهرروز پارسا مقدم^{۱*}، زینب سلامت مستقیم^۲، الهام السادات هاشمی زاده^۳

^(۱) گروه ریاضی، واحد لاهیجان، دانشگاه آزاد اسلامی، لاهیجان، ایران

^(۲) گروه ریاضی، واحد کرج، دانشگاه آزاد اسلامی، کرج، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۷/۱۰/۱۴ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۸/۰۸/۱۲

چکیده

سیستم‌های دینامیکی در بسیاری از شاخه‌های علوم و صنعت غالباً با انواع مختلف از نویزهای محیطی آشفته می‌شوند. آنالیز این سیستم‌ها از اهمیت ویژه‌ای مابین پژوهشگران برخوردار می‌باشند. در این مقاله، ما روشی برای محاسبه جواب تقریبی معادلات دیفرانسیل غیر خطی تصادفی تأخیری از مرتبه کسری حاصل از حرکت برآونی را ارائه می‌دهیم. مشتقات از مرتبه کسری از نوع کاپوتو در نظر گرفته شده است. اساس روش محاسباتی بر پایه درونیابی اسپلاین دو خطی و تقریب تفاضلات متناهی می‌باشد. مرتبه همگرایی روش پیشنهادی با استفاده از نرم میانگین مجذور اثبات شده است و دقت روش از منظر میانگین خطای مطلق و مرتبه همگرایی تجربی آنالیز شده است. روش ارائه شده برای تعیین شاخص‌های آماری در مدل‌های گومبرتزیان و نیکولسون بکار گرفته شده است. معادله دیفرانسیل تأخیری و تصادفی گومبرتزیان از مرتبه کسری مدلسازی شده است برای توصیف رشد فرایند سرطان و معادله دیفرانسیل تأخیری و تصادفی نیکولسون از مرتبه کسری برای بیان دینامیک جمعیت آشفته‌گی‌های نیکولسون در محیط زیست، فرموله شده است.

واژه‌های کلیدی: حسابان کسری؛ حسابان تصادفی؛ معادلات دیفرانسیل تصادفی تأخیری؛ درونیابی اسپلاین دو خطی.

$$\begin{cases} \mathcal{D}_{0,t}^\beta u(t) = f(t, u(t), & t \in [0, T] \\ u(t-\delta) + g(t, u(t)) \frac{dW(t)}{dt} & \\ u(t) = \psi(t), & t \in [-\delta, 0] \end{cases}, \quad (1)$$

که $f: [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ، $\frac{1}{2} < \beta \leq 1$ و

$g: [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ توابع اندازه‌پذیر هستند، δ معرف زمان تأخیری است، $\psi(t)$ تابع سابقه تعریف شده در بازه $t \in [-\delta, 0]$ است، و $W(t)$ نشان‌دهنده فرایند وینر است. جواب‌های معادلات دیفرانسیل تصادفی تأخیری از مرتبه کسری از ویژگی‌های مارکوف پیروی نمی‌کند. بنابراین شبیه‌سازی این نوع معادلات پیچیده‌تر از شبیه‌سازی معادلات دیفرانسیل تصادفی است. علاوه بر این، جواب تحلیلی مسأله تصادفی تأخیری از مرتبه کسری (۱) را نمی‌توان بدست آورد، بنابراین برای پیش‌بینی رفتار مسیرهای نمونه‌ای جواب‌ها لازم است که بازه اطمینان جواب‌های تحلیلی را با استفاده از تقریب‌سازی‌های عددی بررسی کنیم [۳۰].

ادامه این مقاله به صورت زیر سازمان‌دهی شده است: در بخش ۲، تعاریف اصلی ارائه می‌شود که در ادامه مورد نیاز است. در بخش ۳، روش عددی را برای حل معادلات دیفرانسیل تصادفی تأخیری از مرتبه کسری تعمیم داده و از آن برای حل فرایند مدل‌سازی ریاضی در نظر می‌گیریم. در بخش ۴، مدل‌های رشد سلول‌های سرطانی گومبرتزیان و تکثیر حشرات نیکلسون از مرتبه کسری را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. در خاتمه، در بخش ۵، نتایج اصلی ارائه می‌شود.

۲. پیشنهادها

در این مقاله، فرض می‌کنیم $\Lambda = [0, T]$ و فضای احتمال $\mathbb{L}_t^2(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ اندازه‌پذیر برای توابع انتگرال‌پذیر $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ، با نرم میانگین مجذور زیر باشد:

$$\|u\|_{ms} := \mathbb{E}(\|u\|^2)^{\frac{1}{2}},$$

۱- مقدمه

مدل‌های تصادفی نقش مهمی در بسیاری از علوم دارند و در سال‌های اخیر مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفته‌اند. بسیاری از مشاهدات در دنیای واقعی با تأثیرات تصادفی ظاهر می‌شوند. یک مثال معروف، حرکت براونی است که با استفاده از حرکت تصادفی ذرات گرده معلق در مایعات و در اثر برخورد با مولکول‌های مایع نمایش داده شده است [۱]. رفتار تصادفی را می‌توان در دینامیک جمعیت [۲]، اپیدمی [۳]، حرکت یونها در بلورها [۴]، نوین حرارتی [۵]، قیمت سهام [۶] و قیمت‌گذاری بهینه در اقتصاد [۷] مشاهده کرد. مطالعه تصادفی اولین بار توسط انیشتین [۸]، سمولچسکی [۹] و لانگوین [۱۰] بررسی شد و سپس توسط اورشتای و اولنک در [۱۱] تعمیم داده شد.

اخیراً با تلفیق و بکارگیری نظریه مفاهیم بنیادی حسابان تصادفی و حسابان کسری، معادلات دیفرانسیل تصادفی از مرتبه کسری معرفی شده‌اند که دسته مهمی از معادلات دیفرانسیل تصادفی هستند [۱۲ و ۱۳]. بنابراین، شاهد گسترش مفاهیم و کاربردهای معادلات دیفرانسیل و انتگرال تصادفی از مرتبه کسری در مدل‌سازی دستگاه‌های پیچیده در امور مالی [۱۴ و ۱۵]، مسائل فیزیک [۱۶]، کنترل بهینه [۱۷]، حوزه هندسی [۱۸] و دستگاه‌های دینامیک [۱۹] هستیم. با این وجود، اهمیت توسعه الگوریتم‌های عددی جدید برای حل این نوع معادلات را می‌توان در [۲۴-۲۰] یافت.

یک دسته مهم از معادلات دیفرانسیل تصادفی، معادله دیفرانسیل تصادفی تأخیری است که در حالت کسری و غیرکسری، کاربردهای زیادی در فیزیک [۲۵]، سیستم‌های مرتبط با جمعیت [۲۶]، شبکه عصبی [۲۷]، کنترل بهینه [۲۸ و ۲۹] و غیره دارد. وجود و یکتایی معادلات دیفرانسیل تصادفی تأخیری از مرتبه کسری در [۳۰-۳۴] مورد بررسی قرار گرفته است، اما با توجه به دانش نویسندگان، تا کنون روش عددی برای حل آنها ارائه نشده است.

در این مطالعه، معادله دیفرانسیل تصادفی تأخیری از مرتبه کسری به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\|g(t, u_1) - g(t, u_2)\| \leq \hat{L} \|u_1 - u_2\|,$$

(ب) $f(\cdot, \cdot, 0) \in \mathbb{L}^2$ - انتگرال پذیر است، یعنی

$$\int_0^\infty \|f(\zeta, \zeta - \delta, 0)\|^2 d\zeta < \infty,$$

و $g(\cdot, 0)$ اساساً کراندار است، یعنی

$$\|g(\cdot, 0)\|_\infty := \text{ess sup}_{s \in [0, \infty)} g(s, 0) < \infty.$$

فرض می‌کنیم که $t_j = jh$

نقاط $j = -r, -r+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, n$ متساوی‌فاصله در بازه $\Lambda = [0, T]$ هستند به طوری

$$r = \frac{\delta}{h}, \quad n = \frac{T}{h} \quad \text{و} \quad r, n \in \mathbb{Z}$$

بنابراین مسأله (۱) به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$D_{0, t_n}^\beta u(t) = f(t_n, u_n, u_{n-r}) + g(t_n, u_n) \cdot \frac{W_{n+1} - W_n}{h}, \quad (۴)$$

در نتیجه، به ازای زمان t_n به محاسبه فرمول زیر نیازمندیم

$$D_{0, t_n}^\beta u(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^{t_n} \frac{u'(\zeta)}{(t-\zeta)^\beta} d\zeta, \quad (۵)$$

که $\frac{1}{2} < \beta \leq 1$ ، ζ متغیر کمکی متعلق به بازه

$[0, t_n]$ است. مشتق اول را با استفاده از اسپلاین دو خطی با نقاط گرهی انتخاب شده در t_j ، $j = 0, 1, \dots, n-1$ تقریب‌سازی می‌کنیم. اسپلاین $s_n(\zeta)$ به فرم زیر می‌باشد.

$$u'(\zeta) \approx s_n(\zeta) = \sum_{j=0}^n u'(t_j) s_{n,j}(\zeta), \quad (۶)$$

که $s_{n,j}(\zeta)$ در هر بازه $[t_{j-1}, t_{j+1}]$ به ازای $1 \leq j \leq n-1$ به صورت زیر ارائه می‌شود.

که $\|\cdot\|$ نرم اقلیدسی استاندارد است. $(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ فضای احتمال تولید شده با استفاده از فرایند وینر استاندارد یک بعدی $W(t): \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ است که دارای ویژگی‌های زیر است [۳۵]

- $W(0) = 0$ ؛

۲. $\{W(t)\}$ دارای نمو مستقل و مانا است؛

۳. به ازای هر $t > s \geq 0$ توزیع $W(t) - W(s)$ یک توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس $(t-s)$ است.

تعریف ۱. [۳۶]. مشتق از مرتبه کسری کاپوتو سمت چپ از مرتبه $m-1 < \beta \leq m$ که $0 \leq m-1 < \beta \leq m$ مرتبه صحیح و دلخواه است به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D_{0,t}^\beta u(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\beta)} \int_0^t \frac{u^{(m)}(\zeta)}{(t-\zeta)^{\beta+1-m}} d\zeta, \quad (۲)$$

که $m-1 < \beta \leq m$ ، $t, \zeta \in \mathbb{R}^+$ و $\Gamma(\cdot)$ معرف تابع گاما است.

تعریف ۲. [۳۶]. انتگرال از مرتبه کسری ریمنان-لیوویل سمت چپ از مرتبه $\beta \in \mathbb{R}^+$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$J_{0,t}^\beta u(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t u(\zeta) (t-\zeta)^{\beta-1} d\zeta. \quad (۳)$$

۳. روش تقریب‌سازی

در این بخش، تحت فرضیات زیر روش عددی برای مسأله تصادفی تأخیری از مرتبه کسری (۱) ارائه می‌گردد: الف) تابع $f(t, \cdot, \cdot)$ نسبت به متغیر دوم و سوم در شرط لیپشیتز صدق می‌کنند

$$\|f(t, u_1, u_2) - f(t, v_1, v_2)\| \leq L \|u_1 - v_1\| + K \|u_2 - v_2\|,$$

همچنین $g(t, \cdot)$ در متغیر دوم در شرط لیپشیتز صدق می‌کند.

1. Caputo
2. Riemann-Liouville

$$a_{n,j} = \begin{cases} (n-1)^{2-\beta} & j=0 \\ -n^{2-\beta}(n-(2-\beta)), & j=1 \\ (n-j+1)^{2-\beta} - 2(n-j)^{2-\beta} & 1 \leq j \leq n-1 \\ + (n-j-1)^{2-\beta}, & \\ 1, & j=n \end{cases} \quad \text{بطوریکه} \quad (9)$$

$$s_{n,j}(\zeta) = \begin{cases} \frac{\zeta - t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}}, & t_{j-1} \leq \zeta \leq t_j \\ \frac{t_{j+1} - \zeta}{t_{j+1} - t_j}, & t_j \leq \zeta \leq t_{j+1} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

اثبات - ابتدا مشتق مرتبه اول را با استفاده از تابع درون‌یابی خطی قطعه‌ای بر حسب اسپلاین دو خطی با انتخاب نقاط گرهی $t_j, j=0,1,\dots,n$ ، به صورت روبرو تقریب‌سازی می‌کنیم.

$$u'(\zeta) \approx s_n(\zeta) = \sum_{j=0}^n u'(t_j) s_{n,j}(\zeta) = \sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{\zeta - t_{j+1}}{t_j - t_{j+1}} u'(t_j) + \frac{\zeta - t_j}{t_{j+1} - t_j} u'(t_{j+1}) \right).$$

بنابراین با حل روابط انتگرالی و پس از ساده‌سازی، داریم

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{0,t_n}^\beta u(t) &\approx \frac{h^{-\beta}}{(2-\beta)(3-\beta)\Gamma(1-\beta)} (n-1)^{2-\beta} - n^{2-\beta} (n-(2-\beta))(t_1 - t_0) u'(t_0) \\ &+ \sum_{j=1}^{n-1} \frac{h^{-\beta}}{(2-\beta)(3-\beta)\Gamma(1-\beta)} (n-1)^{2-\beta} - n^{2-\beta} (n-(2-\beta))(t_j - t_{j-1}) u'(t_j) \\ &+ \frac{h^{-\beta}}{(2-\beta)(3-\beta)\Gamma(1-\beta)} (t_n - t_{n-1}) u'(t_n), \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\mathcal{D}_{0,t_n}^\beta u(t) \approx \sum_{j=0}^n \frac{h^{1-\beta}}{\Gamma(3-\beta)} a_{n,j} u'(t_j),$$

که

$$\begin{aligned} a_{n,0} &= (n-1)^{2-\beta} - n^{2-\beta} (n-(2-\beta)), \\ a_{n,j} &= c, \quad j=1,2,\dots,n-1, \\ a_{n,n} &= 1. \end{aligned}$$

لم ۲. فرض کنیم $\frac{1}{2} < \beta \leq 1$. همچنین فرض کنیم

$$\begin{aligned} u(t) &\text{ تابعی متعلق به } \mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P}) \text{ باشد و به ازای} \\ &هر زیر بازه } t \in [t_j, t_{j+1}] \subseteq \Lambda \\ &\|u'''(t)\| \leq M \quad \text{و} \quad u(t) \in C^2[t_j, t_{j+1}] \end{aligned}$$

به ازای $j=0$ و $j=n$ ، $s_{n,j}(\zeta)$ به صورت زیر می‌باشد

$$s_{n,0}(\zeta) = \begin{cases} \frac{t_1 - \zeta}{t_1 - t_0}, & t_0 \leq \zeta \leq t_1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

و

$$s_{n,n}(\zeta) = \begin{cases} \frac{\zeta - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}}, & t_{n-1} \leq \zeta \leq t_n \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

توابع $\{s_{n,j}\}_{j=0}^n$ توابع پایه‌ای برای فضای کامل اسپلاین‌های دو خطی با نقاط گره‌ای هستند. بنابراین داریم.

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{0,t_n}^\beta u(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^{t_n} s_n(\zeta) (t_n - \zeta)^{-\beta} d\zeta = \sum_{j=0}^n u'(t_j) \int_0^{t_n} \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} (t_n - \zeta)^{-\beta} s_{n,j}(\zeta) d\zeta. \end{aligned} \quad (7)$$

نتایج به‌لم زیر منتهی می‌شود.

لم ۱. فرض کنیم $u(t)$ تابعی متعلق به $\mathbb{L}^2(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ باشد و به ازای هر زیر بازه $u(t) \in C^2[t_j, t_{j+1}], t \in [t_j, t_{j+1}] \subseteq \Lambda$

بنابراین $\frac{1}{2} < \beta \leq 1, j=0,1,\dots,n-1$.

$$\mathcal{D}_{0,t_n}^\beta u(t) \approx \sum_{j=0}^n \frac{h^{1-\beta}}{\Gamma(3-\beta)} a_{n,j} u'(t_j), \quad (8)$$

لازم است این مقادیر را تقریب‌سازی کنیم. در اینجا از روش تفاضلات متناهی پسر استفاده می‌کنیم که در حالت کلی به صورت زیر تعریف می‌شود [۳۷]:

$$u^{(m)}(t) = \frac{1}{h^m} \sum_{s=0}^m (-1)^s \binom{m}{s} u(t - sh) + O(h), \quad (11)$$

که m مرتبه صحیح دلخواه و h معرف طول گام است.

الگوریتم

ورودی: مقادیر h, T, δ, β ; فرایند وینر $W(t)$;

توابع $(f(t, u(t), u(t-\delta)), g(t, u(t)), \psi(t))$.

گام ۱: محاسبه $r = \frac{\delta}{h}$ و $n = \frac{T}{h}$.

گام ۲: تعریف $t_j = jh$

$j = -r, -r+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, n$

گام ۳: محاسبه $\psi(t_j) = u(t_j)$ به ازای

$j = -r, -r+1, \dots, -1, 0$

گام ۴: محاسبه ضرایب بر حسب رابطه (۹) به ازای

$j = 0, 1, \dots, n$

گام ۵: بکارگیری رابطه بازگشتی حاصل از گسسته

سازی شده معادله (۱) بر اساس روابط (۴) و (۸) برای

محاسبه مقادیر تقریبی تابع $u(t)$ در نقاط t_j .

خروجی: مقادیر u_{j+1} به ازای $j = 0, 1, \dots, n$.

۴. نتایج عددی

در این بخش، دو مثال در نظر گرفته شده و با استفاده از روش عددی پیشنهادی آنها را حل می‌کنیم. به منظور

نشان دادن دقت و کارایی محاسباتی روش ارائه شده،

میانگین خطای مطلق مورد انتظار، $\|\bar{\mathcal{E}}_n\|_{ms}$ ، و مرتبه

همگرایی تجربی، ECO_{ms} ، که به صورت زیر تعریف

می‌شوند:

$$\|\bar{\mathcal{E}}_n\|_{ms} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\mathbb{E} \left[\|u_k^n - u_{2k}^{2n}\|^2 \right] \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (12)$$

$j = 0, 1, \dots, n-1$. بنابراین کران خطای برشی عملگر مشتق از مرتبه کسری حاصل از اسپلاین دو خطی در رابطه زیر صدق می‌کند.

$$\mathbb{E} \left[\left| \mathcal{D}_{0,t_n}^\beta u(t) - (\mathcal{D}_{0,t_n}^\beta u(t))_{approx} \right| \right] \leq C_n h^{3-\beta}, \quad (10)$$

$$C_n = \frac{n^{3-\beta} M}{\Gamma(3-\beta)}$$

اثبات - فرض کنیم $s_j(t)$ تقریبی از تابع $u'_j(t)$ در

زیر بازه $[t_j, t_{j+1}] \subseteq [0, t_{n+1}) = [0, T)$

$j = 0, 1, \dots, n$ باشد و

$$e_j(t) = u'_j(t) - s_j(t) = \frac{u''(\varphi_j)}{2!} (t - t_j)(t - t_{j+1}),$$

که φ_j مقدار دلخواه متعلق به (t_j, t_{j+1}) است.

با فرض این که $e(t)$ تابع خطا در بازه $(0, t_n]$ باشد،

بنابراین

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left| \mathcal{D}_{0,t_n}^\beta u(t) - (\mathcal{D}_{0,t_n}^\beta u(t))_{approx} \right| \right] &= \\ \mathbb{E} \left[\frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^{t_n} (t_n - \zeta)^{-\beta} e(\zeta) |d\zeta| \right] &= \\ \mathbb{E} \left[\frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \sum_{j=0}^{n-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} |t_n - \zeta|^{-\beta} e_j(\zeta) |d\zeta| \right] &= \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \times \times \\ \mathbb{E} \left[\sum_{j=0}^{n-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} (t_n - \zeta)^{-\beta} \left| \frac{u''(\varphi_j)}{2!} (t - t_j)(t - t_{j+1}) \right| |d\zeta| \right] &\leq \frac{nt_n^{1-\beta}}{\Gamma(3-\beta)} M h^2 = \\ C_n h^{3-\beta} \end{aligned}$$

بنابراین

$$\mathbb{E} \left[\left| \mathcal{D}_{0,t_n}^\beta u(t) - (\mathcal{D}_{0,t_n}^\beta u(t))_{approx} \right| \right] \leq C_n h^{3-\beta}.$$

لازم به ذکر است که برای حل مسأله (۴)، باید روش ارائه

شده را با روش تفاضلات متناهی ترکیب کنیم، زیرا در عمل مشتقات مرتبه صحیح در دسترس نیستند. بنابراین،

می‌دهد. برابر بودن مقدار میانگین و میانه (چارک دوم) به ازای $\beta = \{0/55, 0/95\}$ نشان‌دهنده آن است که نمودار حاصل از ترسیم ۱۰۰ مسیر شبیه‌سازی شده در $T = 5$ متقارن است. چارک اول معرف نقطه‌ای است که ۲۵٪ جواب‌های این ۱۰۰ مسیر شبیه‌سازی شده کمتر از این مقدار هستند. به طور مشابه، چارک سوم معرف نقطه‌ای است که ۲۵٪ جواب‌های این ۱۰۰ مسیر شبیه‌سازی بیشتر از این مقدار هستند. در این مسأله، کشیدگی به ازای $\beta = \{0/55, 0/75, 0/95\}$ کمتر از ۳ است، یعنی، منحنی حاصل از ۱۰۰ مسیر شبیه‌سازی شده نسبت به منحنی نرمال، یک منحنی کشیده تر است. چولگی به ازای هر سه مقدار β مورد بررسی دارای مقدار منفی است در نتیجه فاصله میان چارک دوم و اول بیشتر از فاصله میان چارک سوم و دوم است. در این مدل با افزایش β به سمت ۱، انحراف استاندارد بزرگتر می‌شود، بنابراین تغییرپذیری جواب‌ها در این ۱۰۰ مسیر شبیه‌سازی شده به ازای $\beta \rightarrow 1$ افزایش می‌یابد. در خاتمه، بازه اطمینان ۹۵٪، معرف بازه‌ای است که ۹۵٪ جواب‌های حاصل از مسیرهای شبیه‌سازی شده در آن بازه قرار دارند. بنابراین، با افزایش انحراف استاندارد به ازای $\beta \rightarrow 1$ ، بازه اطمینان بزرگتر می‌شود. شکل ۱، تأثیر فرایند تصادفی معادله دیفرانسیل تصادفی تأخیری از مرتبه کسری گومبرتز را به ازای مرتبه‌های کسری $\beta = \{0/55, 0/75, 0/95\}$ و طول گام $h = 0/01$ در بازه $[0, 5]$ نشان می‌دهد. شکل ۲ (سمت چپ) نتایج شبیه‌سازی شده عددی ۱۰۰ مسیر شبیه‌سازی شده دینامیک ترافیک خودرو را برای $u(t)$ ارائه می‌دهد. به علاوه، خطوط سیاه در نمودار سمت راست شکل ۲ نشان‌دهنده ناحیه بازه اطمینان ۹۵٪ جواب‌های عددی ۱۰۰ مسیر شبیه‌سازی شدی برای مسأله (۱۴) به ازای $\beta = 0/75$ و $h = 0/01$ هستند. خط میانی خاکستری کم‌رنگ بیانگر میانگین نمونه‌ای نقطه به نقطه مسیرها و خطوط خاکستری پررنگ بیانگر چارک‌های اول و سوم هستند.

$$ECO_{ms} = \log_2 \left(\frac{\|\bar{\mathcal{E}}_{2n}\|_{ms}}{\|\mathcal{E}_n\|_{ms}} \right), \quad (13)$$

بطوریکه u_k^n و u_{2k}^{2n} مقادیر تقریب‌سازی $u(t_k)$ هستند، n معرف تعداد نقاط شبکه داخلی است، و $h = \frac{T}{n}$ معرف طول گام یکنواخت است.

مدل ۱. مسأله تصادفی تأخیری از مرتبه کسری رشد سلول‌های سرطانی گومبرتز را به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\begin{cases} \mathcal{D}_{0,t}^\beta u(t) = \frac{ru(t-\delta) - bu(t-\delta) \ln(u(t))}{+\sigma u(t) \frac{dW(t)}{dt}}, & t \in [0, T] \\ u(t) = 23, & t \in [-\delta, 0] \end{cases}, \quad (14)$$

بطوریکه $\frac{1}{2} < \beta \leq 1$ ، $u(t)$ بیانگر مساحت سلول سرطانی در زمان t ، r نرخ رشد طبیعی سلول سرطانی می باشد که پارامتری از مقدار میتوز اولیه است و b عامل کاهش سرعت رشد است که مرتبط به فرایند آنتی‌آپوپتوز می باشد. همچنین، δ معرف تأخیر زمانی به منظور تنظیم میزان تولید و σ ضریب نفوذ می باشد. مسأله (۱۴) در حالت‌های غیرتصادفی [۳۸] و تصادفی [۳۹] به ازای $\beta = 1$ مورد مطالعه قرار گرفته است. در این مقاله، این مسأله به ازای مقادیر $r = 8/93 \times 10^{-3}$ ، $b = -2/89 \times 10^{-3}$ و $\delta = 1$ و $\sigma = 4/50 \times 10^{-3}$ در نظر گرفته شده است.

در جدول ۱، عملکرد شاخص‌های خطای مطلق مورد انتظار و مرتبه همگرایی تجربی را با طول گام‌های مختلف h به ازای $\beta = \{0/55, 0/75, 0/95\}$ در بازه $[0, 5]$ ارائه می‌شود.

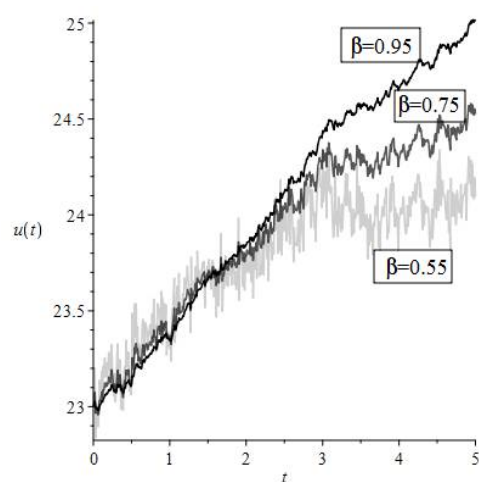
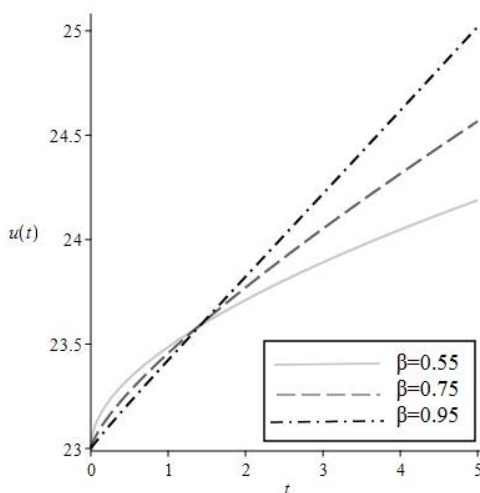
جدول ۲، مقادیر تقریب‌سازی شده میانگین، میانه، چارک اول، چارک سوم، کشیدگی، چولگی، انحراف استاندارد و بازه اطمینان ۹۵٪ را برای ۱۰۰ مسیر شبیه‌سازی به ازای $\beta = \{0/55, 0/75, 0/95\}$ در $T = 5$ ارائه

جدول ۱. مقایسه میانگین خطای مطلق، $\|\bar{\mathcal{E}}_n\|_{ms}$ ، و مقایسه مرتبه همگرایی تجربی، ECO_{ms} ، مسأله (۱۴) به ازای مقادیر مختلف β و طول گام‌های مختلف $h = \{0/02, 0/01, 0/005\}$ در بازه $t \in [0, 5]$.

ECO_{ms}	$\ \bar{\mathcal{E}}_n\ _{ms}$	طول گام	β
1/137	$1/1688 \times 10^{-2}$	$h = 0/02$	$\beta = 0/55$
1/035	$8/5136 \times 10^{-3}$	$h = 0/01$	
0/963	$6/0888 \times 10^{-3}$	$h = 0/005$	
1/356	$4/9682 \times 10^{-3}$	$h = 0/02$	$\beta = 0/75$
1/240	$3/3024 \times 10^{-3}$	$h = 0/01$	
1/160	$2/1408 \times 10^{-3}$	$h = 0/005$	
1/890	$6/1512 \times 10^{-4}$	$h = 0/02$	$\beta = 0/95$
1/702	$3/9388 \times 10^{-4}$	$h = 0/01$	
1/573	$2/4086 \times 10^{-4}$	$h = 0/005$	

جدول ۲. مدل ۱: مقادیر تقریب‌سازی شده شاخص‌های آماری ۱۰۰ مسیر شبیه‌سازی شده به ازای $\beta = \{0/55, 0/75, 0/95\}$ با طول گام $h = 0/01$ در $T = 5$.

$\beta = 0/95$	$\beta = 0/75$	$\beta = 0/55$	شاخص‌های آماری
۲۵/۰۳	۲۴/۵۸	۲۴/۲۰	میانگین
۲۵/۰۳	۲۴/۶۱	۲۴/۲۰	میانه
۲۴/۸۷	۲۴/۴۵	۲۴/۰۵	چارک اول
۲۵/۱۷	۲۴/۶۸	۲۴/۳۱	چارک سوم
۲/۶۴۶	۲/۵۷۳	۲/۳۲۵	کشیدگی
-۰/۲۷۳	-۰/۲۲۵	-۰/۰۵۲	چولگی
-۰/۲۱۷	-۰/۱۶۷	-۰/۱۷۵	انحراف استاندارد
[24 / 601, 24 / 451]	[24 / 245, 24 / 901]	[23 / 850, 24 / 534]	بازه اطمینان ۹۵%



شکل ۱. نتایج عددی مسأله (۱۴) با استفاده الگوریتم ارائه‌شده به ازای $\sigma = 0$ (سمت چپ) و $\sigma = 4/50 \times 10^{-3}$ (سمت راست)، از مرتبه‌های کسری $\beta = \{0/55, 0/75, 0/95\}$ و طول گام $h = 0/01$.

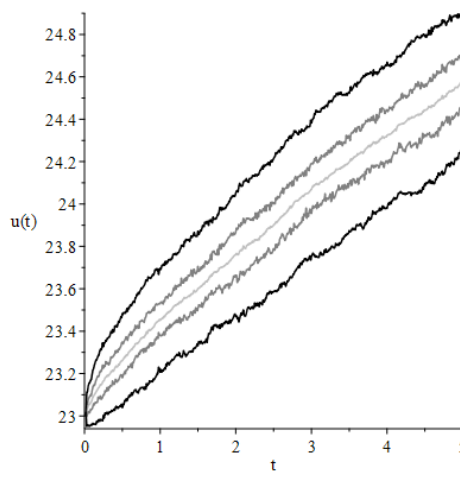
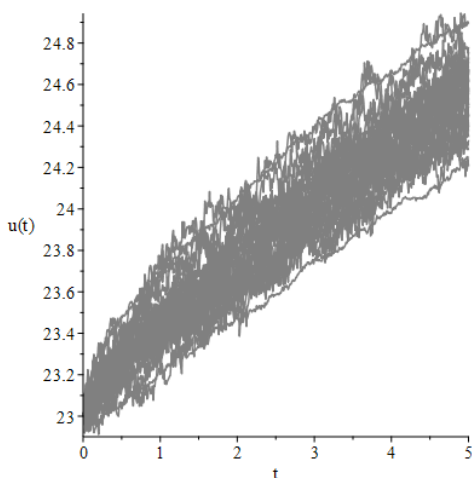
β در بازه $[0, 5]$ ارائه می‌دهد. نتایج عددی نشان می‌دهد که به ازای مقادیر مختلف β ، خطاهای تقریب‌سازی با کاهش طول گام کاهش می‌یابند. علاوه بر این، جدول ۴ مقادیر تقریب‌سازی شده شاخص‌های آماری ۱۰۰ مسیر شبیه‌سازی شده را به ازای مرتبه‌های کسری مختلف در $T = 5$ نشان می‌دهد. شکل ۳، شبیه‌سازی‌های عددی مسأله (۱۵) را به ازای مرتبه‌های کسری مختلف و مقادیر مختلف نویز، $\sigma = 0$ و $\sigma = 0/05$ ، و طول گام $h = 0/01$ را نشان می‌دهد. شکل ۴ (سمت چپ) نتایج شبیه‌سازی شده ۱۰۰ مسیر از (۱۵) را نشان می‌دهد. در نمودار سمت راست شکل ۴، خطوط سیاه بیانگر ناحیه بازه اطمینان ۹۵٪، جواب‌های عددی ۱۰۰ مسیر شبیه‌سازی شده برای مسأله (۱۵) می‌باشند. خط میانی خاکستری کم‌رنگ نشانگر میانگین نمونه‌ای نقطه به نقطه مسیرها و خطوط خاکستری پررنگ بیانگر چارک‌های اول و سوم هستند.

مدل ۲. مسأله تصادفی تأخیری از مرتبه کسری تکثیر حشرات نیکلسون که یکی از معروف‌ترین مدل‌های اکولوژی است، به صورت زیر ارائه می‌شود.

$$\begin{cases} \mathcal{D}_{0,t}^{\beta} u(t) = \frac{ru(t-\delta)e^{-0/25u(t-\delta)}}{-cu(t)+\sigma u(t)\frac{dW(t)}{dt}}, & t \in [0, T] \\ u(t) = 4, & t \in [-\delta, 0] \end{cases} \quad (15)$$

بطوریکه $\frac{1}{2} < \beta \leq 1$ ، $u(t)$ بیانگر اندازه جمعیت در زمان t ، حداکثر تولید تخم در هر روز، r میزان مرگ حشرات بالغ در هر روز، δ زمان تأخیر و σ ضریب نفوذ می‌باشد. مسأله (۱۵) در $[40]$ به ازای $\beta = 1$ مورد مطالعه قرار گرفته است. در این مسأله به ازای $r = 2$ ، $c = 0/175$ و $\delta = 0/15$ ، $\sigma = 0/05$ در نظر گرفته شده است.

جدول ۳، خطای مطلق مورد انتظار و مرتبه همگرایی تجربی را با طول گام‌های مختلف به ازای مقادیر مختلف



شکل ۲. (چپ) جواب عددی مسأله (۳-۳۸) در ۱۰۰ مسیر. (راست) خط میانی به رنگ خاکستری کم‌رنگ، بیانگر میانگین حسابی فرایند، خط سیاه نشان‌دهنده نواحی ۹۵٪ بازه اطمینان و خطوط خاکستری معرف چارک به ازای $\beta = 0/75$ و طول گام $h = 0/01$

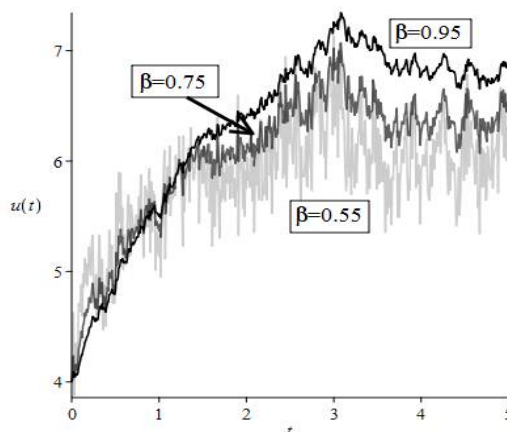
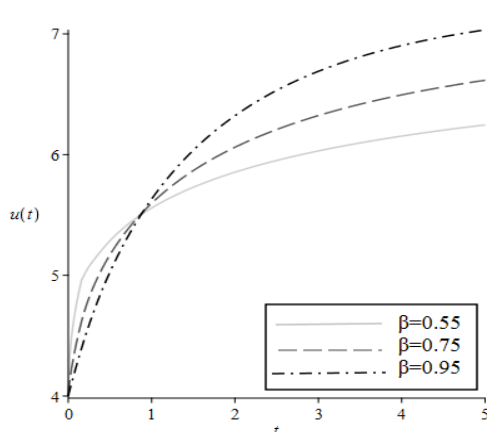
جدول ۳. مقایسه میانگین خطای مطلق، $\|\bar{\varepsilon}_n\|_{ms}$ ، و مقایسه مرتبه همگرایی تجربی، ECO_{ms} ، مسأله (۱۵) به ازای مقادیر

مختلف β و طول گام‌های مختلف $h = \{0/02, 0/01, 0/005\}$ در بازه $t \in [0, 5]$.

ECO_{ms}	$\ \bar{\varepsilon}_n\ _{ms}$	طول گام	β
0/918	$2/7506 \times 10^{-2}$	$h = 0/02$	$\beta = 0/55$
0/850	$1/9929 \times 10^{-2}$	$h = 0/01$	
0/758	$1/5463 \times 10^{-2}$	$h = 0/005$	
1/201	$9/1024 \times 10^{-3}$	$h = 0/02$	$\beta = 0/75$
1/106	$6/1308 \times 10^{-3}$	$h = 0/01$	
0/977	$5/6694 \times 10^{-3}$	$h = 0/005$	
1/673	$1/4335 \times 10^{-3}$	$h = 0/02$	$\beta = 0/95$
1/592	$6/5288 \times 10^{-4}$	$h = 0/01$	
1/576	$2/3781 \times 10^{-4}$	$h = 0/005$	

جدول ۴. مدل ۲: مقادیر تقریب‌سازی شده شاخص‌های آماری ۱۰۰ مسیر شبیه‌سازی شده به ازای $\beta = \{0/55, 0/75, 0/95\}$ با طول گام $h = 0/01$ در $T = 5$.

$\beta = 0/95$	$\beta = 0/75$	$\beta = 0/55$	شاخص‌های آماری
7/048	6/628	6/525	میانگین
7/044	6/646	6/221	میانه
6/849	6/416	5/891	چارک اول
7/229	6/873	6/593	چارک سوم
2/453	2/200	2/435	کشیدگی
-0/021	0/017	0/127	چولگی
0/279	0/289	0/431	انحراف استاندارد
[6/501, 7/595]	[6/062, 7/195]	[5/409, 7/100]	۹۵٪ بازه اطمینان

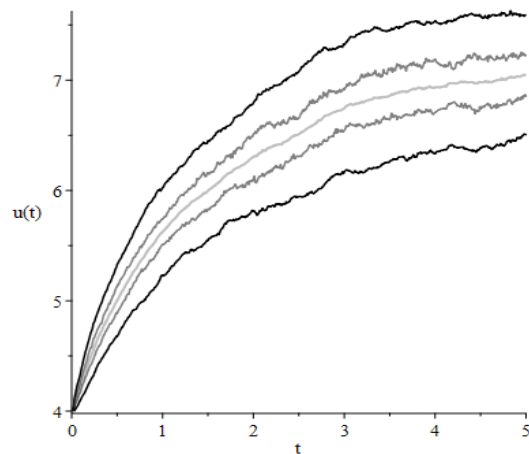
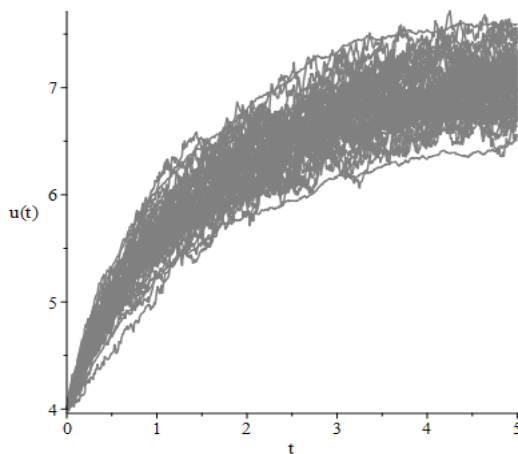


شکل ۳. نتایج عددی مسأله (۱۵) با استفاده الگوریتم ارائه شده به ازای $\sigma = 0$ (سمت چپ) و $\sigma = 0/05$ (سمت راست)، از مرتبه‌های کسری $\beta = \{0/55, 0/75, 0/95\}$ و طول گام $h = 0/01$.

۵. نتیجه‌گیری

در این مقاله، روش عددی برای حل معادلات دیفرانسیل تصادفی تأخیری از مرتبه کسری حاصل از حرکت برآونی مورد بررسی قرار گرفت. با در نظر گرفتن فرمول تقریب‌سازی با بکارگیری درون‌یابی اسپلاین دو خطی، روشی صریح برای حل عددی دسته‌ای از معادلات دیفرانسیل از مرتبه کسری غیرخطی با زمان تأخیری حاصل شد. چندین مدل از مرتبه کسری با دینامیک‌های غیرخطی با روش ارائه شده حل گردیدند و دقت و

همگرایی روش پیشنهادی مورد بررسی قرار گرفت. نتایج نشان می‌دهند با کاهش طول گام، خطا به ازای هر پارامتر و مرتبه‌ای انتخابی کاهش یافته است که تایید کننده دقت و همگرایی روش پیشنهادی است. همچنین، شاخص‌های آماری مورد مطالعه قرار گرفتند و تأثیر تأخیر و فرایند تصادفی در این مدل‌ها آنالیز شدند و بازه‌های اطمینان ۹۵٪ مدل‌های تصادفی تأخیری به طور کارا مورد ارزیابی و گزارش شده‌اند.



شکل ۴. (چپ) جواب عددی مسأله (۱۵) در ۱۰۰ مسیر. (راست) خط میانی به رنگ خاکستری کم‌رنگ، بیانگر میانگین حسابی فرایند، خطوط سیاه نشان‌دهنده نواحی ۹۵٪ بازه اطمینان و خطوط خاکستری معرف چارک به ازای $\beta = 0/95$ و طول گام $h = 0/01$.

of heat, *Annalen der Physik* 17 (1905) 549-560.

[9] M. von Smoluchowski, Zur kinetischen theorie der Brownschen molekularbewegung und der suspensionen, *Annalen der Physik* 326 (14) (1906) 756-780.

[10] P. Langevin, Sur la theorie du mouvement Brownien, *CR Acad. Sci. Paris* 146 (530-533) (1908) 530.

[11] G. E. Uhlenbeck, L. S. Ornstein, On the theory of the Brownian motion, *Physical Review* 36 (5) (1930) 823.

[12] Z. S. Mostaghim, B. P. Moghaddam, and H. S. Haghgozar, Computational technique for simulating variable-order fractional Heston model with application in US stock market, *Mathematical Sciences*, vol. 12, no. 4, pp. 277–283, Oct. 2018.

[13] Z. S. Mostaghim, B. P. Moghaddam, and H. S. Haghgozar, Numerical simulation of fractional-order dynamical systems in noisy environments, *Computational and Applied Mathematics*, vol. 37, no. 5, pp. 6433–6447, Aug. 2018.

[14] G. S. Ladde, L. Wu, Development of modified geometric Brownian motion models by using stock price data and basic statistics, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications* 71 (12) (2009) e1203{e1208. doi:10.1016/ j.na. 2009. 01.151.

[15] D. N. Tien, Fractional stochastic differential equations with applications to finance, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 397 (1) (2013) 334-348.

[16] B. B. Mandelbrot, J. W. V. Ness, Fractional Brownian motions, fractional noises and applications, *SIAM Review* 10

[1] D. Henderson, P. Plaschko, *Stochastic Differential Equations in Science and Engineering*, World Scientific, 2006.

[2] S. Singh, S. S. Ray, Numerical solutions of stochastic Fisher equation to study migration and population behavior in biological invasion, *International Journal of Biomathematics* 10 (07) (2017) 1750103.

[3] K. Hattaf, M. Mahrouf, J. Adnani, N. Yousfi, Qualitative analysis of a stochastic epidemic model with specific functional response and temporary immunity, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 490 (2018) 591-600.

[4] G. I. Zmievskaya, A. L. Bondareva, T. V. Levchenko, G. Maino, *Computational stochastic model of ions implantation*, AIP Publishing LLC, 2015.

[5] N. Gillard, E. Belin, F. Chapeau-Blondeau, Stochastic antiresonance in qubit phase estimation with quantum thermal noise, *Physics Letters A* 381 (32) (2017) 2621-2628.

[6] A. Farhadi, G. H. Erjaee, M. Salehi, Derivation of a new Merton's optimal problem presented by fractional stochastic stock price and its applications, *Computers & Mathematics with Applications* 73 (9) (2017) 2066-2075.

[7] X. Chen, P. Hu, S. Shum, Y. Zhang, Dynamic stochastic inventory management with reference price effects, *Operations Research* 64 (6) (2016) 1529-1536.

[8] A. Einstein, On the motion of small particles suspended in liquids at rest required by the molecular-kinetic theory

- equations in $(d+1)$ dimensions, *Stochastic Processes and their Applications* 127 (4) (2017) 1354-1374.
- [24] X. L. Ding, J. Nieto, Analytical solutions for multi-time scale fractional stochastic differential equations driven by fractional brownian motion and their applications, *Entropy* 20 (1) (2018) 63.
- [25] D. Chowdhury, Statistical physics of vehicular traffic and some related systems, *Physics Reports* 329 (4-6) (2000) 199-329.
- [26] X. Mao, Stochastic differential equations, in: *Stochastic Differential Equations and Applications*, Elsevier, 2011, pp. 47-90.
- [27] X. X. Liao, X. Mao, Exponential stability and instability of stochastic neural networks, *Stochastic Analysis and Applications* 14 (2) (1996) 165-185.
- [28] Z. Yan, F. Lu, Existence of an optimal control for fractional stochastic partial neutral integro-differential equations with infinite delay, *Journal of Nonlinear Sciences and Applications* 08 (05) (2015) 557-577.
- [29] C. Rajivganthi, P. Muthukumar, B. G. Priya, Successive approximation and optimal controls on fractional neutral stochastic differential equations with Poisson jumps, *Optimal Control Applications and Methods* 37 (4) (2015) 627-640.
- [30] C. Chatfield, *Statistics for technology: a course in applied statistics*, Routledge, 2018.
- [31] C. Li, A. Chen, J. Ye, Numerical approaches to fractional calculus and fractional ordinary differential equation, *Journal of Computational Physics* 230 (9) (2011) 3352-3368.
- (4) (1968) 422-437. doi:10.1137/1010093.
- [17] A. Farhadi, G. H. Erjaee, M. Salehi, Derivation of a new Merton's optimal problem presented by fractional stochastic stock price and its applications, *Computers & Mathematics with Applications* 73 (9) (2017) 2066-2075.
- [18] Z.-G. Yu, V. Anh, Y. Wang, D. Mao, J. Wanliss, Modeling and simulation of the horizontal component of the geomagnetic field by fractional stochastic differential equations in conjunction with empirical mode decomposition, *Journal of Geophysical Research: Space Physics* 115 (A10) (2010) n/a-n/a.
- [19] T. H. Thao, On some classes of fractional stochastic dynamical systems. *East-West Journal of Mathematics*, 15 (1) (2013).
- [20] F. Mirzaee, N. Samadyar, Application of hat basis functions for solving two-dimensional stochastic fractional integral equations, *Computational and Applied Mathematics* (2018) 1-18.
- [21] L. Yan, X. Yin, Optimal error estimates for fractional stochastic partial differential equation with fractional Brownian motion. *Discrete & Continuous Dynamical Systems - B*, 22 (11) (2017). 1-21.
- [22] P. Tamilalagan, P. Balasubramaniam, Moment stability via resolvent operators of fractional stochastic differential inclusions driven by fractional Brownian motion, *Applied Mathematics and Computation* 305 (2017) 299-307.
- [23] S. A. Asogwa, E. Nane, Intermittency fronts for space-time fractional stochastic partial differential

[32] E. I. Dureman, C. Boden, Fatigue in simulated car driving, *Ergonomics* 15 (3) (1972) 299-308.

[33] F. M. Atay (Ed.), *Complex Time-Delay Systems*, Springer Berlin Heidelberg, 2010.

[34] B. P. Moghaddam, L. Zhang, A. M. Lopes, J. A. Tenreiro Machado, and Z. S. Mostaghim, Sufficient conditions for existence and uniqueness of fractional stochastic delay differential equations, *Stochastics*, (2019) 1–18.

[35] S. Banerjee, *Mathematical modeling: models, analysis and applications*, Chapman and Hall/CRC, 2014.

[36] S. G. Samko, A. A. Kilbas, O. I. Marichev, *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications*, Gordon & Breach Sci. Publishers, 1993.

[37] Quarteroni, Alfio, and Alberto Valli. *Numerical approximation of partial differential equations*. Vol. 23. Springer Science & Business Media, 2008.

[38] Byrne, H. M. (1997). The effect of time delays on the dynamics of avascular tumor growth. *Mathematical Biosciences*, 144(2), 83–117.

[39] Mazlan, M. S. A., Rosli, N., Azmi, N. S., & Bahar, A. (2015). Modelling the Cervical Cancer Growth Process by Stochastic Delay Differential Equations. *Sains Malaysiana*, 44(8), 1153–1157.

[40] Shaikhet, L. (2013). *Lyapunov Functionals and Stability of Stochastic Functional Differential Equations*.

