دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال ششم، شماره بیست و ششم، مهر و آبان ۱۳۹۹
شماره شاپا: ۲۵۸۸X-۵۸۸

پژوهش‌های نوین در ریاضی

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

کاربرد نقشه‌ی مفهومی و نمودار Vee در تعیین حجم با استفاده از انتگرال

مریم عطاری دزفولی[۱*]، هوشنگ اکبری[۲]، اسماعیل یوسفی[۳]

[۱و۲و۳] گروه ریاضی، واحد کرج، دانشگاه آزاد اسلامی، کرج، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۷/۱۱/۰۹ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۸/۰۲/۱۱

چکیده

نقشه‌ی مفهومی و نمودار Vee از ابزارهای با اهمیت در ارتقای سطح یادگیری مفهومی رِیاضی در تمام مقاطع تحصیلی هستند که می‌توانند نقش مهمی در پیشرفت یادگیرندگان ایفا کنند. هدف از این مقاله، استفاده از نقشه‌ی مفهومی و ترسیم نمودار Vee برای محاسبه‌ی حجم یک جسم با استفاده از انتگرال است که بازتاب آنچه را یاددهنده به صورت واقعی می‌داند، نحوه‌ی بیان آن‌ها، معرفی زمان استفاده از دانسته‌ها و توانایی توجیه آن‌ها را شامل می‌شود. همچنین نشان می‌دهد آشنایی با تعاریف رسمی و اصول ریاضی، دلیلی بر شناخت کامل مفاهیم، پیچیدگی‌های درونی و فرایند آموزش آن‌ها نیست. با توجه به این که یادگیری مفهومی، تأثیری متقابل روی یاددهنده و یادگیرنده دارد، پس نقشه‌ی مفهومی و نمودار Vee می‌توانند نقشی مهم در آموزش، یادگیری و ارزشیابی داشته باشند.

واژه‌های کلیدی: نقشه-ی مفهومی، نمودار Vee، روش قرص‌های استوانه‌ای، روش غشاءهای استوانه‌ای.

---

*. عهده‌دار مکاتبات: Email: maryam.attari@kiau.ac.ir

۱- مقدمه

نقشه‌های مفهومی اولین بار توسط تیم تحقیقاتی نواک در دانشگاه کرنل و در دهه‌ی ۱۹۷۰ مورداستفاده قرار گرفتند. انگیزه‌ی بوجود آمدن ایده‌ی این نقشه‌ها، پیدا کردن روشی مناسب‌تر برای بازنمایی دانسته‌های مفهومی یادگیرندگان و مشاهده‌ی آشکار تغییرات در ساختار مفهومی و گزاره‌ای بود که باعث ساختن آن دانسته‌ها شده است[۲]. اختلاف میان مهارت‌های الگوریتمی و شناخت ادراکی عمیق از فرایند آموزش، جای خالی روش‌هایی برای ایجاد روابط درونی برنامه‌ریزی شده بین مفاهیم و الگوریتم‌ها را برجسته می‌کند. به عنوان مثال، در محاسبه‌ی $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x}$ و $\lim\limits_{x\to 0}\frac{[x]}{[x]}$، یادگیرنده‌ای قادر است به پاسخ صحیح دست یابد که به تفاوت بین مفهوم حد و حدگیری به‌طور کامل اشراف داشته باشد. به بیان دیگر، تفاوت میان انجام ریاضی و یادگیری مفهومی آن باعث می‌شود تا یادگیرندگان توانایی شناخت مفاهیم و کاربرد آن‌ها در موقعیت های مختلف را داشته باشند. نقشه‌های مفهومی و نمودارهای Vee، می‌توانند یادگیرندگان را برای رسیدن به این هدف یاری کنند.

نقشه‌های مفهومی طبقه‌بندی شده، نمودارهایی برای ایجاد رابطه‌ی درونی بین مفاهیم هستند که به صورت شهودی مسیر مناسب برای حرکت به سوی هدف را مرحله به مرحله مشخص می کنند. در واقع به وسیله‌ی این نمودارها، ابتدا ساختار ادراکی یادگیرندگان به صورت طبقاتی با مفاهیم کلی‌تر سازمان‌دهی شده، سپس زمینه‌ی این سازمان‌دهی ذهنی و تشکیل طرحواره‌های مناسب را در ذهن یادگیرندگان فراهم می‌کند. هدف از کاربرد نقشه‌های مفهومی در امر آموزش، نشان دادن آشکار روابط درونی مفاهیم یک حوزه از دانش و همچنین روابط آن حوزه با حوزه‌های دیگر است. استفاده از این نقشه‌ها می‌تواند فضای ذهنی یادگیرندگان را به خوبی منظم و سازمان‌دهی کند. این نظم ذهنی، یادداری مطالب درسی به مدت طولانی و استفاده‌ی بهینه از آنها را در حل مسائل تسهیل می‌کند. به عبارتی طرح‌ریزی نقشه‌های مفهومی، درک روابط و اتصالات بین مفاهیم و درک مفاهیم به صورت شبکه‌ای، که به گفته‌ی آزوبل یکی از زمینه‌های یادگیری معنادار است را فراهم می‌آورد. اساس طرح ریزی این نقشه‌ها بر مبنای نظریه‌ی جذب آزوبل در مورد یادگیری معنادار است. در این نظریه، ساخت شناختی به عنوان یک هرم فرضی در نظر گرفته می‌شود که در آن کلی‌ترین مسائل و مفاهیم در رأس و جزئی‌ترین مطالب در قاعده‌ی این هرم قرار می‌گیرند[۱].

برای توضیح هر گام در نقشه‌ی مفهومی می‌توان از نمودار Vee استفاده کرد. نمودار Vee، یک V است که رأس آن مسأله‌ای است که باید حل شود. سمت چپ V، محتوای مفهومی (ساختاری) شامل نظریه‌ها، اصول، تعاریف و مفاهیم و سمت راست V، محتوای روش شناسی شامل روش کلی و راه حل ویژه برای مسأله‌ی مورد نظر می‌باشد. تأثیر متقابل دو طرف V بر یکدیگر باعث می‌شود تا با تغییر اطلاعات، یادگیرنده برای پاسخ دادن به مسأله‌ی جدید، راهنمایی شود.

یک نمودار Vee دست کم باید بتواند به سؤالات زیر پاسخ دهد:

۱- چه نظریه‌ها و اصول کلی برای حل مسأله مورد استفاده قرار می‌گیرند؟

۲- مفاهیم چگونه به یکدیگر مرتبط می‌شوند؟

۳- مفاهیم اصلی و مفاهیم مرتبط برای حل یک مسأله چه هستند؟

۴- مسأله و فرض‌های ارائه شده در مسأله چه هستند؟

۵- چگونه می‌توان از نظریه ها، اصول، مفاهیم و فرض‌ها برای تعیین روش مناسب حل مسأله استفاده کرد؟

۶- پاسخ مسأله (نتیجه) چیست؟

اخیراً، مطالعاتی در زمینه‌های گوناگون روی نقشه‌ی مفهومی و نمودار Vee و ارتباط آن با آموزش مفاهیم ریاضی در مقاطع مختلف صورت گرفته است که برای مطالعه بیشتر می‌توان به [۴،۳] مراجعه کرد.

در این مقاله، ابتدا به بررسی نقشه‌ی مفهومی برای آموزش مفهومی تعیین حجم یک جسم با استفاده از انتگرال پرداخته شده است. سپس با استفاده از نمودار Vee مراحل مشخص شده در نقشه‌ی ذکر شده، مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته است. در بخش آخر، به بیان نتیجه‌ی کلی و کارهای آتی پرداخته شده است.

۲- نقشه‌ی مفهومی برای بیان انتگرال

کاردمن، چگونگی بازنمایی ایده‌های اصلی در یک درس ریاضیات دانشگاهی را به وسیله‌ی نقشه های مفهومی نشان داد. او دریافت که استفاده از نقشه‌های مفهومی می‌تواند به یاددهندگان کمک کند تا ترتیب و توالی موضوعی بهتری را طراحی کنند. همچنین به دانشجویان کمک می‌کند تا روابط بین موضوعات را ببینند. ماینیمیر، دریافت که وقتی دانشجویان نقشه‌های مفهومی را از موضوعات می‌سازند، نه تنها در آزمون‌های حل مسأله عملکرد بهتری دارند، بلکه باور و اعتماد کلی آنها نسبت به توانایی‌هایشان برای یادگیری ریاضی نیز بالا خواهد رفت. ماس، سه کاربرد اصلی برای نقشه‌های مفهومی را به عنوان ابزار های یادگیری-یاددهی، ارزیابی و برنامه‌ریزی درسی بیان می‌کند[۵].

نقشه‌های مفهومی یک بازنمایی گرافیکی از دانش هستند که شامل مفاهیم و روابط بین آن‌ها می‌شوند. این نقشه‌ها به شکل نموداری از جعبه‌هایی متصل با برچسب‌ها تشکیل شده‌اند و دانش را درباره‌ی یک موضوع خاص بازنمایی می‌کنند. یکی از بد فهمی‌های یادگیرندگان در تعیین حجم یک جسم با استفاده از انتگرال، عدم درک کامل تفاوت‌های موجود بین روش قرص‌های استوانه‌ای و روش غشاءهای استوانه‌ای و در نتیجه استفاده‌ی غیر اصولی از آن‌ها است. دلیل اصلی بروز این مشکل، استفاده‌ی نامناسب از مستطیل نمونه‌ی قائم یا موازی با محور دوران برای دوران حول این محور می‌باشد.

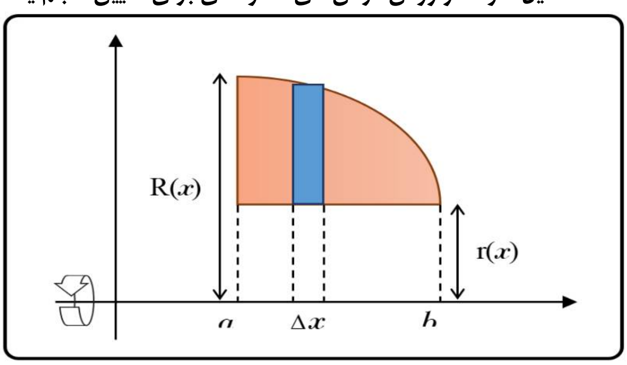
۱-۲- روش قرص‌های استوانه‌ای

در این روش، مطابق شکل‌های ۱و۲، مستطیل نمونه، بر محور دوران، عمود است.

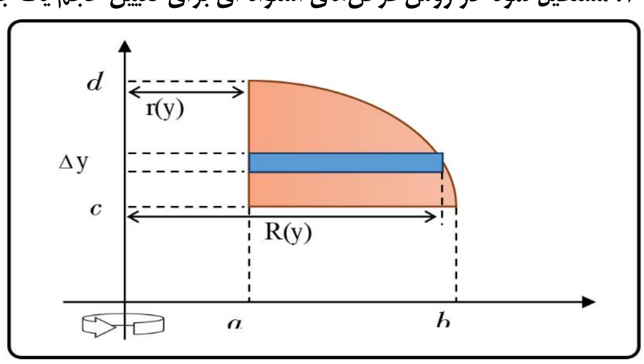
۲-۲- روش غشاءهای استوانه‌ای

در این روش، مطابق شکل‌های ۳و۴، مستطیل نمونه، موازی محور دوران است.

شکل ۱. مستطیل نمونه در روش قرص‌های استوانه‌ای برای تعیین حجم یک جسم



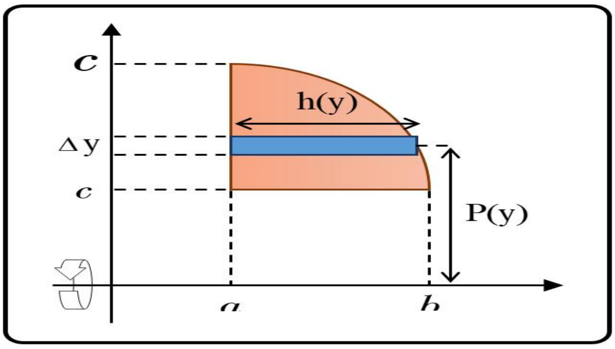
شکل ۲. مستطیل نمونه در روش قرص‌های استوانه‌ای برای تعیین حجم یک جسم



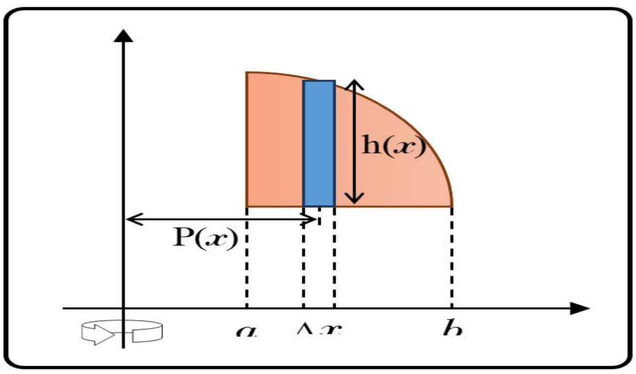
در شکل ۵، جسم حاصل از دوران ناحیه‌ی محدود به توابع $f(x)=x^{2}$ و $g(x)=\sqrt{x}$، در بازه‌ی $[0,1]$، حول محور x، نشان داده شده است.

در شکل‌های ۶ و۷، برای درک بهتر مفهوم روش قرص‌های استوانه‌ای و روش غشاءهای استوانه‌ای، نقشه‌ی مفهومی آن‌ها ارائه شده است.

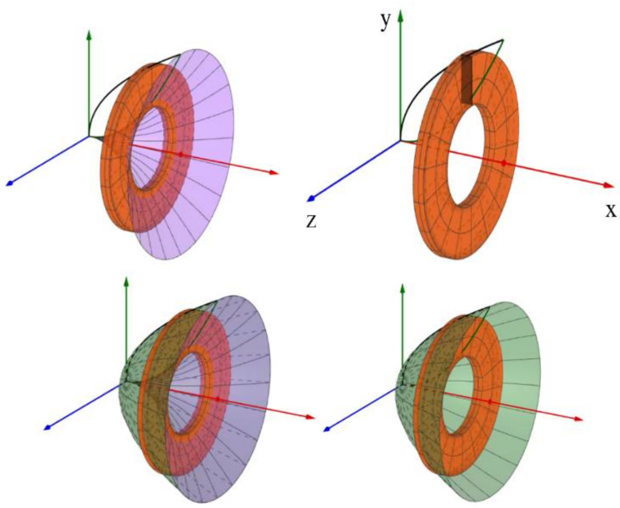
شکل ۳. مستطیل نمونه در روش غشاءهای استوانه‌ای برای تعیین حجم یک جسم



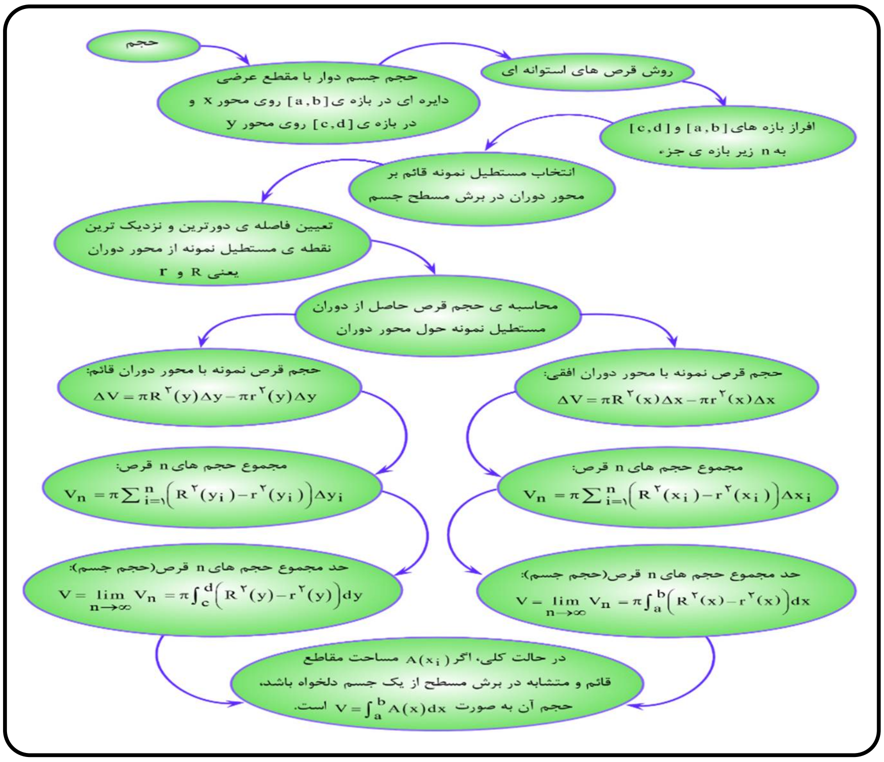
شکل۴. مستطیل نمونه در روش غشاءهای استوانه‌ای برای تعیین حجم یک جسم



شکل ۵. جسم حاصل از دوران یک ناحیه حول محور طول با مستطیل نمونه‌ی عمود بر محور دوران



شکل ۶. نقشه‌ی مفهومی تعیین حجم یک جسم با استفاده از روش قرص‌های استوانه‌ای



شکل ۷. نقشه‌ی مفهومی تعیین حجم یک جسم با استفاده از روش غشاءهای استوانه‌ای

۳- نمودار Vee برای نقشه‌ی مفهومی انتگرال

ساختار نمودار Vee و سؤالات ذکر شده‌ی مربوط به این نمودار، در بخش مقدمه، یک راهنمای منظم برای یادگیرندگان به عنوان موضوع مسأله برای استخراج اطلاعات داده شده و شناسایی اصول، قضیه‌ها، تعاریف رسمی و قوانین عمده (اصول) را فراهم می‌آورد و مفاهیمی را که می‌توانند توسعه ی روش‌ها و رویه‌های مناسب (تغییرات) برای یافتن پاسخ به سؤالات مربوطه را ارائه دهند، بررسی می‌کند. برای تبیین هر یک از گام‌های مفهومی هر نقشه‌ی مفهومی می‌توان از نمودار Vee استفاده کرد. در شکل‌های ۸ و ۹، نمودارهای Vee به عنوان نمونه و به منظور تبیین مراحل مشخص شده در نقشه‌ی مفهومی تعیین حجم یک جسم با استفاده از انتگرال برای هر دو روش قرص‌های استوانه‌ای و غشاءهای استوانه‌ای رسم شده است.

شکل ۸. نمودار Vee برای تعیین حجم یک جسم با استفاده از روش قرص‌های استوانه‌ای

سؤال: حجم جسم حاصل از دوران ناحیه ی محدود به نمودارهای $y=f(x)$ ، محور x و خطوط $x=a$ و $x=b$ حول محور y چیست؟

مفهوم شناسی

نظریه ها:

– مساحت ناحیه ی محدود به تابع پیوسته ی $y=f(x)$، محور x و خطوط $x=a$ و $x=b$.

– روش قرص های استوانه ای.

اصول:

۱ – افراز برد تابع، محدود به خطوط $x=a$ و $x=b$ یعنی بازه ی $[c,d]$ به n زیر بازه ی جزء $[y_{i-1}, y_i]$ با طول مساوی $\Delta y_i = \frac{d-c}{n}$.

۲ – انتخاب مستطیل نمونه ی قائم بر محور دوران در برش مسطح از جسم.

۳ – محاسبه ی حجم قرص نمونه ی حاصل از دوران مستطیل نمونه حول محور دوران:

$$\Delta V = \pi\left(R^2(y) - r^2(y)\right)\Delta y.$$

۴ – تعیین مجموع حجم های n قرص به وجود آمده:

$$V_n = \sum_{i=1}^{n} \pi\left(R^2(y_i) - r^2(y_i)\right)\Delta y_i.$$

۵–

$$V = \lim_{n\to\infty} V_n = \int_c^d \pi\left(R^2(y) - r^2(y)\right)dy.$$

مفاهیم: دقت، بازه، افراز، سیگما، حد دنباله و انتگرال معین.

روش شناسی

راه حل عمومی:

$$(1)\ \Delta y_i = \frac{f(4)-f(0)}{n} = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}.$$

$$(2)\ y_0 = 0 < y_1 < y_2 < \dots < y_n = 2.$$

$$(3)\ y = \sqrt{x} \longrightarrow x = y^2.$$

$$(4)\ \Delta V = \pi\left(4^2 - \left(y^2\right)^2\right)\Delta y = \pi\left(16 - y^4\right)\Delta y.$$

$$(5)\ V_n = \sum_{i=1}^{n} \pi\left(16 - y^4\right)\Delta y_i.$$

$$(6)\ V = \lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} \pi\left(16 - y^4\right)\Delta y_i\right) = \int_0^2 \pi\left(16 - y^4\right)dy = \pi\left(16y - \frac{1}{5}y^5\right)\Big]_0^2 = \pi\left(16(2-0) - \frac{1}{5}\left(2^5 - 0\right)\right) = \frac{128\pi}{5}.$$

مسأله: تعیین حجم جسم حاصل از دوران ناحیه ی محدود به نمودارهای $y=\sqrt{x}$ ، محور x و خط $x=4$ حول محور y.

شکل ۹. نمودار Vee برای تعیین حجم یک جسم با استفاده از روش غشاءهای استوانه‌ای

سؤال: حجم جسم حاصل از دوران ناحیه ی محدود به نمودارهای $y=f(x)$ ، محور x و خطوط $x=a$ و $x=b$ حول محور y چیست؟

مفهوم شناسی

نظریه ها:

– مساحت ناحیه ی محدود به تابع پیوسته ی $y=f(x)$، محور x و خطوط $x=a$ و $x=b$.

– روش غشاء های استوانه ای.

اصول:

۱ – افراز بازه ی $[a,b]$ به n زیر بازه ی جزء $[x_{i-۱},x_i]$ با طول مساوی $\Delta x_i=\frac{b-a}{n}$.

۲ – انتخاب مستطیل نمونه ی موازی با محور دوران در برش مسطح از جسم.

۳ – محاسبه ی حجم غشاء نمونه ی حاصل از دوران مستطیل نمونه حول محور دوران:

$$\Delta V=۲\pi\, p(x)\, h(x)\, \Delta x.$$

۴ – تعیین مجموع حجم های n غشاء به وجود آمده:

$$V_n=\sum_{i=۱}^{n}۲\pi\, p(x_i)h(x_i)\Delta x_i .$$

۵ –

$$V=\lim_{n\to\infty}V_n=\int_a^b ۲\pi\, p(x)\, h(x)\, dx.$$

مفاهیم:

دقت، بازه، افراز، سیگما، حد دنباله و انتگرال معین.

روش شناسی

راه حل عمومی:

$$(۱)\ \Delta x_i=\frac{۴-۰}{n}=\frac{۴}{n}.$$

$$(۲)\ x_۰=۰<x_۱<x_۲<\cdots<x_n=۴.$$

$$(۳)\ \Delta V=۲\pi\,(x)\left(\sqrt{x}\right)\Delta x.$$

$$(۴)\ V_n=\sum_{i=۱}^{n}۲\pi\left(x\sqrt{x}\right)\Delta x_i .$$

$$(۵)\ V=\lim_{n\to\infty}V_n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=۱}^{n}۲\pi\left(x\sqrt{x}\right)\Delta x_i\right)$$

$$=\int_۰^۴ ۲\pi\left(x\sqrt{x}\right)dx=\int_۰^۴ ۲\pi\left(x^{\frac{۳}{۲}}\right)dx$$

$$=۲\pi\left[\left(\frac{x^{\frac{۵}{۲}}}{\frac{۵}{۲}}\right)\right]_۰^۴=\frac{۴\pi}{۵}\left(۴^{\frac{۵}{۲}}-۰\right)$$

$$=\frac{۴\pi}{۵}\times ۳۲=\frac{۱۲۸\pi}{۵}.$$

مسأله: تعیین حجم جسم حاصل از دوران ناحیه ی محدود به نمودارهای $y=\sqrt{x}$ ، محور x و خط $x=۴$ حول محور y.

۴- نتایج

کاربرد روش‌های معمول تدریس در آموزش محاسبه‌ی حجم یک جسم با استفاده از انتگرال و مباحث مربوط به آن در بسیاری از موارد با مشکل عدم تمایز فراگیران، بین مفاهیمی مانند مفهوم روش قرص‌های استوانه‌ای و روش غشاءهای استوانه‌ای روبرو بوده است. در این پژوهش سعی شده تا از نقشه ی مفهومی و نمودار Vee، به عنوان ابزارهایی که در عین نظم بخشی به ذهن یادگیرندگان نحوه‌ی ارتباط بین مفاهیم را برای آنها مشخص کند، استفاده شود. استفاده از این ابزارهای آموزشی می‌تواند تأثیر مثبتی درارتقاء درک مفهومی یادگیرندگان در مفهوم حجم و مفاهیم وابسته به آن داشته باشد. نقشه‌ی مفهومی و نمودار Vee ابزارهای کمک آموزشی هستند که با تأکید برتشخیص نحوه‌ی اتصال و ارتباط مفاهیم ریاضی با یکدیگر، زمینه‌ی سازمان‌دهی ذهنی و تشکیل طرحواره های مناسب در ذهن یادگیرندگان را فراهم می‌کنند. در واقع با طرح نقشه‌ی مفهومی، یادگیرندگان ساختار اطلاعات ریاضی خود را به صورت منظم و گام به گام مشاهده می‌کنند. در آینده، برای بررسی تأثیر نقشه‌ی مفهومی و نمودار Vee بر یادگیری مفهوم روش قرص‌های استوانه‌ای و روش غشاءهای استوانه‌ای، با تهیه‌ی پرسش نامه‌ای مناسب، بازخورد این روش مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

فهرست منابع

[۱] ع. ا. سیف، روانشناسی پرورشی نوین، ویرایش ششم، تهران، انتشارات دوران. **۱۳۸۸**.

[2] J. D. Nova, J. C. Alberto, "*The universality and ubiquitousness of Concept Maps"*, Proc. of Fourth Int. Conference on Concept Mapping, Vina del Mar, Chile. **2010**.

[3] K. Afamasaga-Fuata'i, *"Analysing the "Measurment" Strand Using Concept Maps and Vee Diagrams", Concept Mapping in Mathematics*, Springer. **2009**, 19-46.

[4] J. Schmittau, J. J. Vagliardo, "*Concept Mapping as a Means to Develop and Assess Conceptual"*, Understanding in Primary Mathematics Teacher Education, Springer. **2009**, 47-58.

[5] J. D. Novak, J. C. Alberto, "*The Development and Evolution of the Concept Mapping Tool Leading to a New Model for Mathematics Education"*, In Afamasaga-Fuata'I, Karoline, Concept Mapping in Mathematics Research into Practice, Springer. **2009**, 3-18.

[6] R. E. Larson, R. P. Hostetler, B. H. Edwards, "*Calculus with Analytic Geometry"*, Lexington, Mass D.C. Heath 3th ed. **1986**.