

ساختار توپولوژیک فضای تقریب تعمیم یافته وابسته به یک رابطه n -تایی

سیدبابا حسینی*

گروه ریاضی، دانشکده ریاضی، واحد ساری، دانشگاه آزاد اسلامی، ساری، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۷/۱۱/۱۲ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۸/۰۲/۲۸

چکیده

نظریه کلاسیک مجموعه‌های نادقیق نخستین بار بوسیله پائولاک در [6] معرفی و تعریف شد. اساس این تئوری روی یک رابطه دوتایی هم ارزی و کلاس‌های هم ارزی مرتبط با آن است. در این مقاله، رابطه n -تایی انعکاسی، متقارن، قویا متقارن، شبه متعدی و n -تایی هم ارزی تعریف می‌شود. روش توپولوژیک مجموعه نادقیق بررسی و رابطه بین فضای توپولوژیک القا شده بوسیله یک رابطه n -تایی و مجموعه نادقیق مورد مطالعه قرار می‌گیرد. تعریف جدیدی از توپولوژی نادقیق روی فضای تقریب با استفاده از مجموعه نادقیق تعمیم یافته در فضای تقریب تعمیم یافته معرفی می‌شود. سپس یک توپولوژی نادقیق روی فضای تقریب تعمیم یافته وابسته به یک رابطه n -تایی قویا تحمل‌پذیر و شبه متعدی، بیان و تعریف می‌گردد. در پایان، خواص شبه گسستگی، همبندی، فشردگی، متریک‌پذیری و جدایی‌پذیری در این فضا به اثبات می‌رسد.

واژه‌های کلیدی: مجموعه نادقیق تعمیم یافته، فضای تقریب، توپولوژی نادقیق، رابطه قویا تحمل‌پذیر.

۱- مقدمه

مستقل، پس زمینه و گسترده است. بعضی محققان به عنوان مثال، کاندو ثابت نمودند که هر رابطه بازتابی در یک مجموعه می‌تواند یک توپولوژی را القا کند که در این توپولوژی می‌توان شرط فشردگی، جدایی‌پذیری، همبندی و شبه گسستگی را بیان و اثبات کرد [4]. برای مطالعه بیشتر در ارتباط با مجموعه‌های نادقیق تعمیم یافته و فضای تقریب و توپولوژی القا شده بوسیله رابطه دوتایی انعکاسی و متعدی، می‌توان به مقالات [3, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18] مراجعه نمود.

در این مقاله در تعمیم نتایج بدست آمده، بجای استفاده از یک رابطه دوتایی، یک رابطه n -تایی روی مجموعه مرجع را در نظر گرفته و خواص انعکاسی، متقارن بودن، قویا متقارن بودن و n -متعدی بودن رابطه n -تایی را تعریف کرده و مثال‌هایی از آن ارائه می‌گردد و فضای تقریب متناظر با این رابطه معرفی می‌شود و توپولوژی نادقیق در این فضای تقریب تعریف شده است و قضایا و نتایج بدست آمده بیان و اثبات می‌گردد. بخش دوم را که عمدتاً از [6, 7, 8, 9] اخذ شده است، اشاره به مجموعه نادقیق داشته و تقریب بالا و پایین یک زیر مجموعه را تعریف و روابط بدست آمده، بیان می‌گردد. بخش سوم اختصاص به رابطه‌های n -تایی داشته و خواص آن مورد بررسی قرار می‌گیرد و بالاخره در بخش چهارم و نتیجه، به تعریف توپولوژی القا شده بوسیله رابطه n -تایی اشاره می‌شود و قضایای اصلی به اثبات می‌رسد.

۲- فضای تقریب و مجموعه نادقیق

فرض کنید U یک مجموعه ناتهی و $R \subseteq U \times U$ یک رابطه هم ارزی باشد. می‌دانیم هر رابطه هم ارزی روی یک مجموعه، آن را به زیر مجموعه ناتهی جدا از هم افراز می‌کند. حال اگر $x \in U$ عضو دلخواه باشد، کلاس هم ارزی شامل آن را با $[x]_R$ نشان می‌دهیم. همچنین اگر $A \subseteq U$ ، تقریب پایین و بالای آن را به ترتیب با $\underline{R}(A)$ و $\overline{R}(A)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\underline{R}(A) = \{x \mid [x]_R \subseteq A\}.$$

نظریه مجموعه‌های نادقیق در سال ۱۹۸۲ نخستین بار توسط ریاضی دان لهستانی طی مقاله‌ای در [6] ارائه شده بود. او یک رابطه هم ارزی R را روی مجموعه ناتهی U در نظر گرفت و زوج (U, R) را یک فضای تقریب نامید. بنیان نظریه مجموعه نادقیق برحسب دو عملگر بنام‌های تقریب پایینی و بالایی یک زیر مجموعه A از U پایه‌گذاری شده است. تقریب پایین زیر مجموعه A اجتماع کلاس‌های هم ارزی مشمول در A است و تقریب بالایی، اجتماع کلاس‌های هم ارزی است که با A اشتراک ناتهی دارند. تقریب پایین A را با $\underline{R}(A)$ و تقریب بالای آن را با $\overline{R}(A)$ نشان می‌دهیم. برای یک فضای تقریب (U, R) یک زوج (A, B) از زیر مجموعه‌های U را مجموعه نادقیق می‌نامند هرگاه برای یک زیر مجموعه X از U ، داشته باشیم $(\underline{R}(X), \overline{R}(X)) = (A, B)$ و $\underline{R}(X) \neq \overline{R}(X)$ اگر برای یک زیر مجموعه X از U داشته باشیم $\underline{R}(X) = \overline{R}(X)$ ، آنگاه X را مجموعه دقیق یا تعریف‌پذیر می‌نامند. اگر $X \subseteq U$ و P پیش فرضی باشد که X با این پیش فرض مشخص شده باشد، در این صورت:

۱. $x \in \underline{R}(X)$ به این معنی است که x مطمئناً خاصیت P را دارد.
۲. $x \in \overline{R}(X)$ به این معنی است که x احتمالاً خاصیت P را دارد.
۳. $x \in U \setminus \overline{R}(X)$ به این معنی است که x مطمئناً خاصیت P را ندارد.

مجموعه نادقیق، ابزاری برای توسعه مجموعه‌های کلاسیک و روشی برای کاهش داده‌ها و مطالعه سیستم‌هایی که شامل داده‌های ناکافی و ناقص و هوشمند دارند، بوده و در این راستا نقش موثری ایفا می‌کند. یکی از کاربردهای مجموعه نادقیق، ارتباط آن با فضای توپولوژیک است. در سال‌های اخیر محققان زیادی ارتباط بین فضای تقریب و توپولوژی ساخته شده بوسیله رابطه دوتایی را مطالعه کرده و قضایا و نتایج جالبی را از این رابطه بدست آوردند. بی‌تردید این مسئله از اهمیت عمیق نظری و کاربردی برخوردار است. توپولوژی یک شاخه مهم ریاضیات است که دارای چارچوب نظری

واضح است که توپولوژی گسسته، شبه گسسته است. ولی عکس آن برقرار نیست.

تعریف ۲.۳. فرض کنید U مجموعه ناتهی باشد. آنگاه $d : U \times U \rightarrow [0, \infty)$ تابع شبه متر روی U می نامند هرگاه برای هر $x, y, z \in U$ ، داشته باشیم

1. $d(x, x) = 0$,
2. $d(x, y) = d(y, x)$,
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

برای هر $x \in U$ و $A \subseteq U$ و $r > 0$ قرار دهید $B(x, r) = \{y \in U \mid d(x, y) < r\}$,
 $d(x, A) = \inf\{d(x, y) \mid y \in A\}$.

فضای توپولوژیک U را **شبه متریک پذیر** می نامند هرگاه یک تابع شبه متر چون d روی U تعریف شود بطوری که $B(x, r)$ پایه این فضا باشند.

مثال ۲.۴. فرض کنید (U, τ_R) فضای توپولوژیک نادقیق باشد. در نظر بگیرید:

$$d : U \times U \rightarrow [0, \infty)$$

برای هر $x, y \in U$

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & [x]_R = [y]_R \\ 1, & [x]_R \neq [y]_R. \end{cases}$$

به سادگی می توان نشان داد که d یک تابع شبه متر است و برای هر $x \in U, r > 0$

$$B(x, r) = \begin{cases} [x]_R, & r \leq 1 \\ U, & r > 1. \end{cases}$$

قضیه ۲.۵. فرض کنید U یک مجموعه ناتهی و $R \subseteq U \times U$ یک رابطه هم ارزی باشد. همچنین فرض کنید τ_R توپولوژی القایی این رابطه هم ارزی باشد. در این صورت

(الف) توپولوژی τ_R شبه گسسته است.

(ب) برای هر $x \in U$ ، $[x]_R$ فشرده است.

$$\bar{R}(A) = \{x \mid [x]_R \cap A \neq \emptyset\}.$$

همان گونه که در بخش مقدمه اشاره گردید، اگر $\underline{R}(A) = \bar{R}(A)$ ، آنگاه A را **مجموعه دقیق** یا **تعریف پذیر** می نامند و اگر نه A را **مجموعه نادقیق** می نامند.

گزاره ۲.۱. فرض کنید U یک مجموعه ناتهی و $R \subseteq U \times U$ یک رابطه هم ارزی باشد و $A, B \subseteq U$ آنگاه

1. $A \subseteq B \Rightarrow \bar{R}(A) \subseteq \bar{R}(B), \underline{R}(A) \subseteq \underline{R}(B)$.
2. $\underline{R}(A) \subseteq A, A \subseteq \bar{R}(A)$.
3. $\bar{R}(A) \cup \bar{R}(B) = \bar{R}(A \cup B)$,
 $\underline{R}(A) \cap \underline{R}(B) = \underline{R}(A \cap B)$.
4. $\underline{R}(\underline{R}(A)) = \underline{R}(A) = \bar{R}(\bar{R}(A))$,
 $\bar{R}(\bar{R}(A)) = \bar{R}(A) = \underline{R}(\underline{R}(A))$.
5. $\bar{R}(A) \cap \bar{R}(B) \subseteq \bar{R}(A \cap B)$,
 $\underline{R}(A) \cup \underline{R}(B) \supseteq \underline{R}(A \cup B)$.
6. $\underline{R}([x]_R) = [x]_R = \bar{R}([x]_R)$

برهان. به [6] مراجعه شود.

اکنون فرض کنید $\tau_R = \{A \mid \underline{R}(A) = A\}$ با توجه به گزاره قبل،
 (الف) $U, \emptyset \in \tau_R$.

(ب) برای هر $\alpha \in \Lambda$ و $A_\alpha \in \tau_R$ داریم $\cup_\alpha A_\alpha \in \tau_R$.

(پ) اگر $A, B \in \tau_R$ آنگاه $A \cap B \in \tau_R$.

با توجه به تعریف توپولوژی عمومی در [2] و گزاره بالا، (U, τ_R) یک توپولوژی است. این توپولوژی را

توپولوژی فضای تقریب یا توپولوژی نادقیق القائی از رابطه هم ارزی R می نامند. می توان نشان داد که $B_R = \{[x]_R \mid x \in U\}$ پایه این توپولوژی است.

تعریف ۲.۲. توپولوژی τ در U را **شبه گسسته** می نامند هرگاه هر مجموعه باز آن بسته و هر مجموعه بسته آن باز باشد.

۶. تحمل‌پذیر می‌نامند هرگاه انعکاسی و قویا متقارن باشد.

۷. n -هم ارزی است هرگاه انعکاسی و قویا متقارن و n -متعدی باشد.

مثال ۳.۲. (۱) برای $n = 2$ ، یک رابطه ۲-تایی متعدی است اگر و تنها اگر متعدی در حالت معمول باشد و ۲-هم ارزی است اگر و تنها اگر هم ارزی در حالت معمول باشد.

(۲) فرض کنید $n = 3$ در این صورت رابطه ۳-تایی R ، ۳-متعدی است اگر فقط اگر در شرایط زیر صدق کند:

الف) اگر $(x, y, z) \in R, (y, u, v) \in R \Rightarrow (x, u, v) \in R$.

ب) اگر $(x, y, z) \in R, (z, u, v) \in R \Rightarrow (x, u, v), (y, u, v), (x, y, u), (x, y, v) \in R$.

پ) اگر $(x, y, z) \in R, (u, z, v) \in R \Rightarrow (x, y, v) \in R$.

مثال ۳.۳. فرض کنید $U = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ و $R = \{(a_i, a_i, \dots, a_i) \mid 1 \leq i \leq n\}$ آنگاه R را رابطه قطری می‌نامند. واضح است که رابطه n -تایی R هم ارزی است [1].

مثال ۳.۴. فرض کنید $U = C$ مجموعه اعداد مختلط باشد و رابطه n -تایی R را بصورت زیر در نظر بگیرید:

$$(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in R \Leftrightarrow |x_1| = |x_2| = |x_3| = \dots = |x_n|$$

آنگاه R یک رابطه n -هم ارزی است.

مثال ۳.۵. فرض کنید $U = N$ مجموعه اعداد طبیعی باشد و رابطه n -تایی R را بصورت زیر در نظر بگیرید:

$$x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n \Leftrightarrow (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in R$$

آنگاه R یک رابطه n -تایی متعدی است ولی انعکاسی و متقارن قوی نیست.

(پ) (U, τ_R) همبند موضعی است.

(ت) (U, τ_R) موضعاً جدایی‌پذیر است.

(ث) (U, τ_R) فضای منتظم است.

(ج) (U, τ_R) فضای نرمال است.

(چ) (U, τ_R) شبه متریک‌پذیر است.

برهان. برهان ساده است و می‌توان این برهان را در [3] مشاهده نمود.

۳- رابطه‌های n -تایی و خواص آنها

در این بخش بعضی نتایج اساسی در باره رابطه n -تایی را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. فرض کنید U یک مجموعه ناتهی باشد. در این صورت هر زیر مجموعه از $U^n = U \times U \times \dots \times U$

را یک رابطه n -تایی روی U می‌نامند.

تعریف ۳.۱. رابطه n -تایی R روی U را

۱. انعکاسی می‌نامند هرگاه برای هر $x \in U$ داشته باشیم $(x, x, x, \dots, x) \in R$.

۲. n -متعدی می‌نامند هر گاه اگر $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in R$ و $(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) \in R$ و برای یک $i_0 > j_0 > 1 \leq j_0 < n$ داشته باشیم $x_{i_0} = y_{j_0}$ و $1 \leq k < n$ هر $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k < i_0$ و $j_0 < j_1 < j_2 < \dots \leq n$ داشته باشیم $(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}, x_{j_1}, \dots, x_{j_k}) \in R$.

۳. متقارن است هرگاه اگر $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in R$ آنگاه $(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_1) \in R$.

۴. قویا متقارن است هر گاه اگر $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in R$ آنگاه، برای هر جایگشت $\sigma \in S_n$ داشته باشیم $(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, \dots, x_{\sigma(n)}) \in R$.

۵. پیش‌ترتیب n -تایی است اگر انعکاسی و n -متعدی باشد.

مثال ۳.۹. فرض کنید $U = \{1, 2, \dots, 7\}$ و $R \subset U \times U \times U$ بطوری که $R = \{(1, 1, 1), (2, 2, 2), \dots, (7, 7, 7), (1, 1, 2), (1, 3, 3), (2, 2, 1), (5, 4, 5), (6, 7, 7), (7, 6, 7), (6, 6, 7), (4, 4, 5)\}$.

حال اگر $A = \{1, 3, 6\}$ ، آنگاه

$$\underline{R}_r(A) = \{3\}, \overline{R}_r(A) = \{1, 2, 3, 6, 7\}$$

$$\underline{R}_l(A) = \{3, 6\}, \overline{R}_l(A) = \{1, 2, 3, 5, 6, 7\}.$$

لم ۳.۱۰. فرض کنید R یک رابطه n -تایی روی U باشد. گزاره‌های زیر برقرارند:

برای هر $x, y \in U$ $y \in L_i(x) \Leftrightarrow x \in R_i(y)$ (1)

$i = \{1, 2, \dots, n-1\}$
 (2) $L_i(U) = \bigcup_{x \in U} L_i(x) \neq U$ اگر و فقط اگر $R_i(y) = \emptyset$ $\exists y \in U$

(3) $R_i(U) = \bigcup_{x \in U} R_i(x) \neq U$ اگر و فقط اگر $L_i(y) = \emptyset$ $\exists y \in U$

(4) $R_i(x) = \emptyset$ اگر و فقط اگر $x \notin L_i(U)$

(5) $L_i(x) = \emptyset$ اگر و فقط اگر $x \notin R_i(U)$

یک برهان کوتاه برای همه موارد داده شده ارائه می‌شود.

برهان.

$L_i(U) = \bigcup_{x \in U} L_i(x) \neq U$ اگر و فقط اگر $y \in U$ وجود داشته باشد که $y \notin \bigcup_{x \in U} L_i(x)$ و $x \in U$ فقط اگر $y \in U$ وجود داشته باشد که برای هر $x \in U$ ، $y \notin L_i(x)$ به این معنی است که $y \in U$ وجود دارد بطوری که $R_i(y) = \emptyset$.

حال اگر R رابطه دو تایی دلخواه در U باشد، زوج (U, R) فضای تقریب تعمیم یافته می‌نامند. در تعمیم فضای تقریب در [6]، کاندو در [4] ساختار توپولوژیک فضای تعمیم یافته را در حالی که R فقط رابطه دو تایی انعکاسی باشد، مورد تحقیق قرار داد و قضایا و نتایج مهمی را به اثبات رسانید. اساس مجموعه پائولاک در فضای تقریب کلاس‌های هم ارزی بودند. کاندو به جای کلاس‌های هم ارزی کلاس‌هایی را در نظر گرفت که با

مثال ۳.۶. فرض کنید $U = \{1, 2, 3\}$ و $R = \{(1, 1, 1), (1, 1, 3), (3, 3, 3), (2, 2, 2), (1, 3, 3)\}$ آنگاه R ، ۳-پیش ترتیب است ولی ۳-هم ارزی نیست زیرا متقارن قوی نیست. توجه داشته باشید که $(1, 3, 3) \in R$ ولی $(3, 1, 3) \notin R$.

تعریف ۳.۷. فرض کنید R یک رابطه n -تایی روی U باشد. برای هر $x \in U$ و $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ $k \in \{1, 2, \dots, n-(i-1)\}$ تعریف می‌کنیم

$$(1) L_i(x) = \{y \in U \mid \exists u_1, \dots, u_{n-2} \in U : (y, u_1, \dots, u_{i-1}, x, u_i, \dots, u_{n-2}) \in R \text{ or } (u_1, \dots, u_k, y, u_{k+1}, \dots, u_{k+i-1}, x, u_{k+i}, \dots, u_{n-2}) \in R\}.$$

$$(2) R_i(x) = \{y \in U \mid \exists u_1, \dots, u_{n-2} \in U : (x, u_1, \dots, u_{i-1}, y, u_i, \dots, u_{n-2}) \in R \text{ or } (u_1, \dots, u_k, x, u_{k+1}, \dots, u_{k+i-1}, y, u_{k+i}, \dots, u_{n-2}) \in R\}.$$

تعریف ۳.۸. اگر R رابطه n -تایی روی مجموعه ناتهی U باشد و $A \subseteq U$ ، آنگاه تقریب بالای چپ A را با $\overline{R}_l(A)$ نشان می‌دهیم که در آن

$$\overline{R}_l(A) = \{x \in U \mid \exists i \in \{1, 2, \dots, n-1\} : L_i(x) \cap A \neq \emptyset\}.$$

و تقریب پایین چپ A را با $\underline{R}_l(A)$ نشان می‌دهیم که در آن

$$\underline{R}_l(A) = \{x \in U \mid \exists i \in \{1, 2, \dots, n-1\} : L_i(x) \subseteq A\}.$$

متشابهاً تقریب بالای راست A را با $\overline{R}_r(A)$ می‌دهیم که در آن

$$\overline{R}_r(A) = \{x \in U \mid \exists i \in \{1, 2, \dots, n-1\} : R_i(x) \cap A \neq \emptyset\}.$$

و تقریب پایین راست A را با $\underline{R}_r(A)$ نشان می‌دهیم که در آن

$$\underline{R}_r(A) = \{x \in U \mid \exists i \in \{1, 2, \dots, n-1\} : R_i(x) \subseteq A\}.$$

متشابهها می‌توان تساوی $L_i(x) = R_i(x) = R_j(x)$ را با انتخاب یک σ مناسب از S_n ثابت کرد.

بنابراین با توجه به لم قبل، برای رابطه تحمل‌پذیر n تایی R در U ، برای هر $x \in U$ ، $L_i(x) = R_j(x)$ ، مستقل از اندیس‌های $\{1, 2, \dots, n-1\}$ است. از این به بعد آنها را فقط با $L(x)$ نشان خواهیم داد. با توجه به آن نتیجه زیر را خواهیم داشت که نتیجه مستقیم از لم ۳.۱۰ و ۳.۱۱ است.

نتیجه ۳.۱۲. برای رابطه تحمل‌پذیر n -تایی R در

U ، برای هر $x, y \in U$ ، گزاره‌های زیر برقرارند:

$$(1) \text{ برای هر } x \in U, x \in L(x)$$

$$(2) L(U) = \bigcup_{x \in U} L(x) = U$$

$$(3) y \in L(x) \Leftrightarrow x \in L(y)$$

تعریف ۳.۱۳. فرض کنید R رابطه n -تایی تحمل

پذیر (انعکاسی و قویا متقارن) روی مجموعه ناتهی U

باشد و $A \subseteq U$ ، $\underline{R}(A)$ تقریب پایین A و $\overline{R}(A)$

تقریب بالای A به ترتیب به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\overline{R}(A) = \{x \in U \mid L(x) \cap A \neq \emptyset\}$$

$$\underline{R}(A) = \{x \in U \mid L(x) \subseteq A\};$$

که در آن

$$L(x) = \{y \in U \mid \exists u_1, \dots, u_{n-2} \in U :$$

$$(y, u_1, \dots, u_{i-1}, x, u_i, \dots, u_{n-2}) \in R\}.$$

تعریف ۳.۱۴. رابطه n -تایی R روی مجموعه ناتهی

U را **شبه متعددی** می‌نامند هر گاه

$$x \in L(y) \wedge y \in L(z) \Rightarrow x \in L(z).$$

در حالتی که $n = 2$ باشد شبه متعددی بودن هم ارز

متعددی بودن است ولی در حالت $n > 2$ ، شبه متعددی

بودن، n -متعددی بودن R را نتیجه نمی‌دهد.

مثال ۳.۱۵. فرض کنید $U = \{1, 2, 3\}$ و

$$R = \left\{ (1, 1, 1), (2, 2, 2), (3, 3, 3), (2, 3, 3), (3, 3, 2), (3, 2, 3) \right\}$$

عضو خاصی از مجموعه اصلی از راست یا چپ رابطه دارند. برای این که این مجموعه ناتهی باشد، او فرض کرد که R فقط یک رابطه انعکاسی باشد. در این راستا و در تعمیم نتایج بدست آمده در [4] فضای تقریب تعمیم یافته وابسته به رابطه n تایی روی U را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

لم ۳.۱۱. فرض کنید R رابطه n -تایی تحمل‌پذیر

(انعکاسی و قویا متقارن) روی مجموعه ناتهی U باشد،

در این صورت برای هر $i, j \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ و

برای هر $x \in U$ ،

$$L_i(x) = \{y \in U \mid \exists u_1, \dots, u_{n-2} \in U :$$

$$(y, u_1, \dots, u_{i-1}, x, u_i, \dots, u_{n-2}) \in R$$

$$\text{or } (u_1, \dots, u_k, y, u_{k+1}, \dots, u_{n-2}) \in R\}$$

$$= L_j(x) = R_i(x) = R_j(x).$$

برهان. فرض کنید $y \in L_i(x)$ در این صورت با

توجه به تعریف،

$$\exists u_1, \dots, u_{n-2} \in U :$$

$$(y, u_1, \dots, u_{i-1}, x, u_i, \dots, u_{n-2}) \in R$$

or

$$(u_1, \dots, u_k, y, u_{k+1}, \dots, u_{k+i-1}, x, u_{k+i}, \dots, u_{n-2})$$

حال اگر $j < i$ با توجه به این که R قویا متقارن است،

می‌توان جایگشت σ از S_n را طوری انتخاب کرد که

$$\left(y = y_{\sigma(1)}, u_{\sigma(2)}, \dots, u_{\sigma(i+2)}, \right.$$

$$\left. x, u_{\sigma(i+3)}, \dots, u_{\sigma(n)} \right)$$

$$= (y, u_1, \dots, u_{j-1}, x, u_j, \dots, u_{n-2})$$

$$\text{یا } (u_1, \dots, u_k, y, u_{k+1}, \dots, u_{k+i-1}, x, u_{k+i}, \dots, u_{n-2}) \in R$$

متشابهها، می‌توان جایگشت σ از S_n را طوری انتخاب

کرد که

$$(u_{\sigma(1)}, u_{\sigma(2)}, \dots, u_{\sigma(k)}, y = y_{\sigma(k+1)},$$

$$\dots, x = x_{\sigma(k+i)}, \dots, u_{\sigma(n)})$$

$$= (u_1, \dots, u_k, y, u_{k+1}, \dots, u_{k+j-1}, x, \dots, u_{n-2})$$

که در هر حال، $y \in L_j(x)$.

(3) اگر برای یک x ای در U داشته باشیم $L(x) = \{x\}$ آنگاه بدیهی است که $\{x\} = \underline{R}(\{x\})$ وگرنه $\emptyset = \underline{R}(\{x\})$ برهان تساوی دوم هم مشابه است.

حال اگر $u \in L(x)$ باید نشان دهیم $L(u) \subseteq L(x)$ فرض کنید $y \in L(u)$ دلخواه باشد. در این صورت با توجه به شبه متعدی بودن R و این که $y \in L(u) \wedge u \in L(x) \Rightarrow y \in L(x)$.

بنابراین $L(u) \subseteq L(x)$ لذا با توجه به تعریف تقریب پایین، $L(x) \subseteq \underline{R}(L(x))$. همچنین فرض کنید که $u \in \overline{R}(L(x))$ بنابراین $L(u) \cap L(x) \neq \emptyset$ حال فرض کنید $z \in L(u) \cap L(x)$ متعدی بودن و نتیجه ۱۲.۳، $z \in L(u), z \in L(x) \Rightarrow u \in L(z), z \in L(x)$

در نتیجه $u \in L(x)$ حال چون $u \in \overline{R}(L(x))$ دلخواه بوده است در نتیجه $\overline{R}(L(x)) \subseteq L(x)$ بنابراین $\overline{R}(L(x)) = L(x)$ برای اثبات قسمت پایانی، کافی است نشان دهیم که برای هر، $x, y \in U$ یا $L(x) = L(y)$ یا $L(x) \cap L(y) = \emptyset$ بدین منظور فرض کنید $z \in L(x) \cap L(y)$ در این صورت با توجه به شبه متعدی بودن R و نتیجه ۱۲.۳، داریم $z \in L(u), z \in L(x) \Rightarrow u \in L(z), z \in L(x) \Rightarrow u \in L(x)$.

حال اگر $u \in L(y)$ دلخواه باشد، آنگاه $u \in L(y) \wedge y \in L(z) \wedge z \in L(x) \Rightarrow u \in L(x) \wedge z \in L(x)$

در نتیجه $z \in L(x)$ بنابراین، $L(y) \subseteq L(x)$ متشابهها. $L(x) \subseteq L(y)$ در نتیجه $L(y) = L(x)$.

در این صورت R رابطه ۳-تایی متقارن قوی و انعکاسی و شبه متعدی است ولی 3-متعدی نیست زیرا $(2,2,3) \in R \wedge (3,2,3) \in R$ ولی $(2,2,3) \notin R$.

۴- توپولوژی فضای تقریب وابسته به رابطه - n تایی تحمل پذیر و شبه متعدی

در این بخش ویژگی‌های توپولوژی القا شده توسط رابطه n -تایی تحمل پذیر و شبه متعدی R روی مجموعه ناتهی U را تحقیق می‌کنیم. اکنون فرض کنید $\tau_R = \{A \mid \underline{R}(A) = A\}$ (گزاره ۴.۱) و تعریف توپولوژی عمومی [2]، (U, τ_R) یک توپولوژی است. این توپولوژی را توپولوژی فضای تقریب یا توپولوژی نادقیق القائی از رابطه n -تایی شبه متعدی و تحمل پذیر R می‌نامند.

گزاره ۴.۱. فرض کنید R رابطه n -تایی شبه متعدی و تحمل پذیر روی مجموعه ناتهی U باشد و $A, B \subseteq U$

- $A \subseteq B \Rightarrow \overline{R}(A) \subseteq \overline{R}(B), \underline{R}(A) \subseteq \underline{R}(B)$.
- $\underline{R}(A) \subseteq A \subseteq \overline{R}(A)$.
- $\underline{R}(\{x\}) = \emptyset \vee \{x\}; \overline{R}(\{x\}) = L(x)$;
- $\underline{R}(L(x)) = L(x) = \overline{R}(L(x))$.
- $\overline{R}(A) \cup \overline{R}(B) = \overline{R}(A \cup B); \underline{R}(A) \cap \underline{R}(B) = \underline{R}(A \cap B)$.
- $\underline{R}(\underline{R}(A)) = \underline{R}(A) = \overline{R}(\overline{R}(A)); \overline{R}(\overline{R}(A)) = \overline{R}(A) = \underline{R}(\underline{R}(A))$.
- $\overline{R}(A) \cap \overline{R}(B) \subseteq \overline{R}(A \cap B); \underline{R}(A) \cup \underline{R}(B) \supseteq \underline{R}(A \cup B)$.
- $\overline{R}(U) = U = \underline{R}(U); \underline{R}(\emptyset) = \emptyset = \overline{R}(\emptyset)$.

و $B = \{L(x) \mid x \in U\}$ یک رده از کلاس‌های هم ارزی است.

برهان. (1), (2), (4), (5), (6) و (7) واضح است.

لذا $x \in A^c$ کنید فرض $A^c \subseteq \underline{R}(A^c)$
 $L(x) \cap A = \emptyset$ در نتیجه $x \notin A = \overline{R}(A)$
 بنابراین $L(x) \subseteq A^c$ که با توجه تعریف تقریب پایین،
 $A^c \subseteq \underline{R}(A^c)$ پس $x \in \underline{R}(A^c)$
 حال اگر A در (U, τ_R) باز باشد. انگاه طبق گزاره
 (۴.۱) $\overline{R}(A) = \overline{R}(\underline{R}(A)) = \underline{R}(A) = A$ و طبق
 لم قبل، A بسته است. بنابراین در فضای توپولوژیک
 تعمیم یافته (U, τ_R) ، هر زیرمجموعه باز، بسته است و
 برعکس. لذا نتیجه زیر را خواهیم داشت:

نتیجه ۴.۴. (U, τ_R) شبه گسسته است.

اکنون فرض کنید (U, τ_R) فضای توپولوژیک نادقیق
 القایی وابسته به رابطه n -تایی شبه متعدی و تحمل
 پذیر R روی U باشد. در نظر بگیرید:
 $d : U \times U \rightarrow [0, \infty)$

برای هر $x, y \in U$

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & L(x) = L(y) \\ 1, & L(x) \neq L(y). \end{cases}$$

به سادگی می‌توان نشان داد که d یک تابع شبه متر
 است و برای هر $x \in U, r > 0$

$$B(x, y) = \begin{cases} L(x), & r \leq 1 \\ U, & r > 1. \end{cases}$$

نتیجه ۴.۵. فرض کنید R یک رابطه n -تایی تحمل
 پذیر و شبه متعدی باشد. در این صورت
 الف) (U, τ_R) شبه متریک پذیر است.
 ب) (U, τ_R) همبند موضعی است.
 پ) (U, τ_R) موضعاً جدایی پذیر است.
 ت) (U, τ_R) فضای منتظم است.
 ث) (U, τ_R) فضای نرمال است.

نتیجه‌گیری

در این مقاله یک رابطه n -تایی تحمل‌پذیر و شبه
 متعدی روی مجموعه ناتهی U تعریف شده است. فضای
 تقریب تعریف شده در [6] و قضایای اثبات شده در

قضیه ۴.۲. فرض کنید R رابطه n -تایی تحمل‌پذیر و
 شبه متعدی روی مجموعه ناتهی U باشد و $x \in U$ و
 $L(x) = \{y \in U \mid \exists u_1, \dots, u_{n-2} \in U:$
 $(y, u_1, \dots, u_{i-1}, x, u_i, \dots, u_{n-2}) \in R\}$

انگاه

1. $L(x) \in \tau_R$.
2. $A \in \tau_R \Leftrightarrow A = \bigcup_{L(x) \subseteq A} L(x)$.
3. $L(x)$ فشرده است.
4. $B_R = \{L(x) \mid x \in U\}$.

پایه این توپولوژی است.

برهان

(۱) طبق گزاره ۱.۴، $\underline{R}(L(x)) = L(x)$ در نتیجه
 $L(x) \in \tau_R$

(۲) چون برای هر $x \in U$ ، $L(x) \in \tau_R$ و طبق
 تعریف توپولوژی، اجتماع هر تعداد از مجموعه‌های باز، باز
 است. پس $A \in \tau$ برعکس، اگر $A \in \tau$ ، طبق تعریف،
 $\bigcup_{L(x) \subseteq A} L(x) = \underline{R}(A) = A$

(۳) فرض کنید $\{O_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ پوشش بازی برای
 $L(x)$ باشد. چون $x \in L(x)$ پس یک $\lambda \in \Lambda$ وجود
 دارد به طوری که $x \in O_\lambda = \bigcup_{L(x) \subseteq O_\lambda} L(x)$ لذا
 $L(x) \subseteq O_\lambda$ بنابراین $L(x)$ فشرده است.

(۴) طبق نتیجه ۳.۱۲، $U = L(U) = \bigcup_{x \in U} L(x)$ ،
 همچنین طبق قسمت (۲)، اگر A باز باشد،
 $A = \bigcup_{L(x) \subseteq A} L(x)$ لذا B_R پایه این توپولوژی
 می‌باشد.

لم ۴.۳. فرض کنید R رابطه n -تایی تحمل‌پذیر و
 شبه متعدی روی مجموعه ناتهی U و $A \subseteq U$ باشد.
 اگر $\overline{R}(A) = A$ ، انگاه A بسته است.

برهان. نشان می‌دهیم متمم A باز است. بدین منظور
 نشان می‌دهیم که $\underline{R}(A^c) = A^c$ طبق گزاره (۲) ۴.۱
 $\underline{R}(A^c) \subseteq A^c$ بنابراین کافی است نشان دهیم

[4, 10, 15, 16] مورد بازبینی قرار گرفته و تعمیم یافته است. تحقیق آینده می تواند این باشد که نتایج و قضایای بیان شده این مقاله را در شرایط ضعیف تر برای یک رابطه n -تایی بتوان بیان و اثبات کرد.

قدردانی. از داوران و همکاران دانشگاهی در گروه ریاضی واحد ساری که در ارتقا این مقاله نقش ارزنده ایفا کرده اند صمیمانه سپاسگزارم.

approximation spaces, International Journal of advanced research in computer science, Vo. 8, No. 9, 2017, 379-384.

[12] Slowinski, D. Vanderpooten, *Similarity relation as a basis for rough approximations*, ICS Research Report 53 (1995) 249-250.

[13] R. Slowinski, D. Vanderpooten, *A generalized definition of rough approximations based on similarity*, IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering 12 (2000) 331-336.

[14] Skowron, J. Stepaniuk, *Tolerance approximation spaces*, Fundamenta Informaticae 27 (1996) 245-253.

[15] Zhang, Y. Ouyang, Z. Wang, Note on “*Generalized rough sets based on reflexive and transitive relations*”, Information Sciences 179 (2009) 471-473.

[16] W. Zhu, *Generalized rough sets based on relations*, Information Sciences 177 (2007) 4997-5011.

[17] W. Zhu, *Relationship between generalized rough sets based on binary relation and covering*, Information Sciences 179 (2009) 210-225.

[18] W. Zhu, *Topological approaches to covering generalized rough sets*, Information Sciences 177 (2007) 1499-1508.

فهرست منابع

[1] Cristea and M. Stefanescu, *Hypergroup and n-ary relations*, European J. Combin. 31 (2010), no. 3, 780-789

[2] R. Engelking, *General Topology*, Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1977.

[3] Z. Li, *Topological properties of generalized rough sets*, in: 2010 Seventh International Conference on Fuzzy Systems and Knowledge Discovery, vol. 5, 2010, pp. 2067-2070.

[4] M. Kondo, *On the structure of generalized rough sets*, Information Science 176 (2006) 589-600.

[5] M. Novotny, *Ternary structures and groupoids*, Czech. Math. J. 41 (116) (1991) 90-98.

[6] Z. Pawlak, *Rough sets*, International Journal of Computing and Information Sciences 11 (1982) 341-356.

[7] Z. Pawlak, *Rough Sets: Theoretical Aspects of Reasoning About Data*, Kluwer Academic Publishers, Boston, 1991.

[8] Z. Pawlak, A. Skowron, *Rough sets: some extensions*, Information Sciences 177 (2007) 28-40.

[9] Z. Pawlak, A. Skowron, *Rudiments of rough sets*, Information Sciences 177 (2007) 3-27.

[10] K. Qin, J. Yang, Z. Pei, *Generalized rough sets based on reflexive and transitive relations*, Information Sciences 178 (2008) 4138-4141.

[11] T. K. Sheeja, T. M. Jacob, A. Sunny Kuriakose, *Rough topology on*