دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال ششم، شماره بیست و ششم، مهر و آبان ۱۳۹۹
شماره شاپا: ۵۸۸-۲۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

# آرنز-منظم بودن جبرهای مثلثی وابسته به همریختی‌ها

سارا بهنامیان[۱]، امین محمودی[۲*]، محمدرضا مردان‌بیگی[۳]

(۱و۳) گروه ریاضی محض (آنالیز)، دانشکده علوم پایه، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات، تهران، ایران.
(۲) دانشیار گروه ریاضی (آنالیز)، دانشکده علوم پایه، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد تهران مرکزی، ایران.

تاریخ ارسال مقاله: ۹۷/۱۲/۱۴ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۸/۱۰/۰۲

**چکیده**

در این مقاله ابتدا یک ضرب جدید روی جبرهای باناخ مثلثی تعریف می‌کنیم، پس از آن آرنز- منظم بودن این جبرها را بررسی و در آخر هسته توپولوژیک آن‌ها را تعیین می‌کنیم.

**واژه‌های کلیدی:** جبرهای مثلثی، آرنز-منظم‌بودن، ضرب آرنز، هسته توپولوژیکی.

*. عهده‌دار مکاتبات: a_mahmoodi@iauctb.ac.ir

## ۱- مقدمه

فرض کنیم $\mathcal{A}, B$ دو جبر باناخ باشند و $\mathcal{X}$ یک $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$–مدول باناخ باشد. به این معنا که $\mathcal{X}$ یک فضای باناخ، یک $\mathcal{A}$–مدول چپ و یک $\mathcal{B}$–مدول راست است که برای هر $a \in \mathcal{A}$، $x \in \mathcal{X}$ و $b \in \mathcal{B}$،

$$\| a.x.b\| \leq \|a\|\,\|x\|\,\|b\|$$

برقرار است. واضح است که در این صورت اعمال مدولی جبرهای باناخ $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ روی $\mathcal{X}$ پیوسته هستند. حال جبر باناخ

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{X} \\ 0 & \mathcal{B} \end{pmatrix} = \{\begin{pmatrix} a & x \\ 0 & b \end{pmatrix} : a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}, x \in x\}$$

را با ضرب معمولی ماتریس‌های ۲×۲ به همراه ضرب مدولی روی درایه‌های آن‌ها و نرم

$$\left\|\begin{pmatrix} a & x \\ 0 & b \end{pmatrix}\right\| = \|a\| + \|x\| + \|b\|$$

برای هر

$a \in \mathcal{A}$، $x \in \mathcal{X}$ و $b \in \mathcal{B}$

در نظر می‌گیریم و آن را جبر باناخ مثلثی می‌نامیم. فارست[1] و مارکوکس[2] در مقاله خود آرنز- منظم بودن جبرهای باناخ مثلثی $\mathcal{T}$ را بررسی کردند [۵].
در این مقاله، ما با در نظر گرفتن دو همریختی مدولی $\sigma \in \mathrm{Hom}(\mathcal{A})$ و $\tau \in \mathrm{Hom}(\mathcal{B})$

که $\mathrm{Hom}(\mathcal{A})$ مجموعه همه هم‌ریختی‌هایی از $\mathcal{A}$ به $\mathcal{A}$ است، یک عمل ضرب جدید روی $\mathcal{T}$ تعریف نموده و آرنز- منظم بودن را برای جبرهای مثلثی حاصل از این عمل ضرب جدید وابسته به همریختی‌ها تحقیق می‌کنیم.
پس از آن چند مثال را بررسی نموده و در آخر هسته توپولوژیکی جبر باناخ مثلثی جدید را تعیین می‌کنیم.

## ۲- آرنز- منظم بودن برای جبرهای باناخ مثلثی

آرنز[3] برای هر جبر باناخ، دو ضرب روی دوگان دوم آن جبر تعریف کرد [۱]. هر یک از این ضرب‌ها، ضرب معمول روی جبر را وقتی که آن را به طور کانونی در دوگان دوم خود می‌نشانیم، توسیع می‌دهند. به طور دقیق ضرب اول و دوم آرنز روی $\mathcal{A}^{**}$ یعنی دوگان دوم جبر باناخ $\mathcal{A}$ چنین تعریف می‌شوند:
فرض کنیم $\Gamma_1$ و $\Gamma_2$ در $\mathcal{A}^{**}$ باشند. بنابر قضیه گلدشتاین[4] [۷] نت‌های $\{a_i\}$ و $\{a_j\}$ در $\mathcal{A}$ وجود دارند به طوری که

$$\Gamma_1 = w^* - lim_i a_i \quad و$$
$$\Gamma_2 = w^* - lim_j a_j$$

قرار دهیم،

$$\Gamma_1 \square \Gamma_2 := w^* - lim_i lim_j a_i a_j.$$

با تعویض ترتیب حدگیری در تعریف فوق قرار می‌دهیم:

$$\Gamma_1 \lozenge \Gamma_2 = w^* - Lim_j Lim_i a_i a_j$$

که $\square$ و $\lozenge$ به ترتیب نشان‌دهنده ضرب‌های اول و دوم آرنز هستند. آرنز در مقاله خود نشان داد که ضرب‌های فوق مستقل از نحوه انتخاب نت‌های $\{a_i\}$ و $\{a_j\}$ می‌باشند و $\mathcal{A}^{**}$ با هر یک از ضرب‌های فوق به یک جبر باناخ مبدل می‌گردد. اگر این دو ضرب بر هم منطبق باشند، آنگاه $\mathcal{A}$ را آرنز-منظم می‌خوانیم. در [۵]، فارست و مارکوکس آرنز-منظم بودن را برای جبرهای باناخ مثلثی بررسی کردند. ما در این مقاله، آن را برای جبرهای باناخ مثلثی با ضربی که تعریف می‌کنیم، بررسی می‌نماییم.

**تعریف ۲-۱:** فرض کنیم $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ دو جبر باناخ و $\mathcal{X}$ یک $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-مدول باناخ باشند. فرض کنیم $\sigma \in \mathrm{Hom}(\mathcal{A})$ و $\tau \in \mathrm{Hom}(\mathcal{B})$. برای هر $a, \acute{a} \in \mathcal{A}$ و $x, \acute{x} \in \mathcal{X}$، ضرب جدیدی روی $\mathcal{T}$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

1. Forrest
2. Marcoux
3. Arens
4. Goldstine

$$\begin{pmatrix} a & x \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \acute{a} & \acute{x} \\ 0 & \acute{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\acute{a} & \sigma(a).\acute{x} + x.\tau(b') \\ 0 & b\acute{b} \end{pmatrix}$$

$\mathcal{T}$ را با این ضرب جدید با $\mathcal{T}_{\sigma,\tau}$ نمایش می‌دهیم. به وضوح $\mathcal{T}_{\sigma,\tau}$ یک جبر باناخ است.

این ضرب جدید در واقع، تعمیمی از ضرب اصلی روی جبرهای باناخ مثلثی است. در حالت خاص اگر σ و $\tau$ را نگاشت‌های همانی روی جبرهای باناخ $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ در نظر بگیریم، آنگاه عمل ضرب روی این دو جبر باناخ بر هم منطبق می‌شود و از این نظر حائز اهمیت است که می‌توان به کمک آن مفاهیم و نتایجی مثل آرنز-منظم بودن جبرهای باناخ مثلثی را تعمیم داد.

برای بررسی آرنز- منظم بودن $\mathcal{T}_{\sigma,\tau}$ فرض می‌کنیم

$$\begin{pmatrix} \Gamma_1 & \Pi_1 \\ 0 & \psi_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Gamma_2 & \Pi_2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{T}_{\sigma,\tau}^{**}$$

که منظور از $\mathcal{T}_{\sigma,\tau}^{**}$، جبر $\begin{pmatrix} \mathcal{A}^{**} & \mathcal{X}^{**} \\ 0 & \mathcal{B}^{**} \end{pmatrix}$ است. بنا به قضیه گلدشتاین نت‌های $\{a_i\}$و$\{a_j\}$ در $\mathcal{A}$ و نت $\{b_i\}$و$\{b_i\}$ در $\mathcal{B}$ و نت $\{a_j\}$ در $\mathcal{X}$ وجود دارند به طوری که

$\Gamma_1 = w^* - Lim_i a_i$ و

$\Gamma_2 = w^* - Lim_j a_j$و

$\psi_1 = w^* - Lim_i b_i$و

$\psi_2 = w^* - Lim_j b_j$و

$\Pi_1 = w^* - Lim_i x_i$ و

$\Pi_2 = w^* - Lim_j x_j$.

فرض کنیم $\sigma^{**}$ و $\tau^{**}$ به ترتیب دوگان‌های دوم $\sigma \in \mathrm{Hom}(\mathcal{A})$ و $\tau \in \mathrm{Hom}(\mathcal{B})$ باشند، در این صورت ضرب اول آرنز روی $\mathcal{T}_{\sigma,\tau}^{**}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{pmatrix} \Gamma_1 & \Pi_1 \\ 0 & \psi_1 \end{pmatrix} \square \begin{pmatrix} \Gamma_2 & \Pi_2 \\ 0 & \psi_2 \end{pmatrix} = w^*{-}Lim_i Lim_j \begin{pmatrix} a_i & x_i \\ 0 & b_i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_j & x_j \\ 0 & b_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & R \\ 0 & Q \end{pmatrix}$$

که

$P = w^*{-}Lim_i Lim_j a_i x_j$ و

$Q = w^*{-}Lim_i Lim_j b_i b_j$ و

$R = w^*{-}Lim_i Lim_j (\sigma^{**}(a_i).x_j + x_i.\tau^{**}(b_j))$.

در واقع می‌توان گفت ضرب فوق برابر است با:

$$\begin{pmatrix} \Gamma_1 \square \Gamma_2 & \sigma^{**}(\Gamma_1)\square\Pi_2 + \Pi_1\square\tau^{**}(\psi_2) \\ 0 & \psi_1\square\psi_2 \end{pmatrix}.$$

زیرا $w^*$ - توپولوژی روی $\mathcal{T}_{\sigma,\tau}^{**}$ در حقیقت همان توپولوژی حاصل ضربی $w^*$-توپولوژی‌های روی $\mathcal{A}^{**}$، $\mathcal{B}^{**}$ و $\mathcal{X}^{**}$ می‌باشد. به همین ترتیب ضرب دوم آرنز روی $\mathcal{T}_{\sigma,\tau}^{**}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{pmatrix} \Gamma_1 & \Pi_1 \\ 0 & \psi_1 \end{pmatrix} \Diamond \begin{pmatrix} \Gamma_2 & \Pi_2 \\ 0 & \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & R \\ 0 & Q \end{pmatrix}$$

که

$= w^*{-}Lim_j Lim_i a_i a_j \ \ P$ و

$Q = w^*{-}Lim_j Lim_i b_i b_j$ و

$R = w^*{-}Lim_j Lim_i \left(\sigma^{**}(a_i).x_j + x_i.\tau^{**}(b_j)\right)$

در واقع می توان گفت ضرب فوق برابر است با:

$$\begin{pmatrix} \Gamma_1 \Diamond \Gamma_2 & \sigma^{**}(\Gamma_1)\Diamond \Pi_2 + \Pi_1 \Diamond \tau^{**}(\psi_2) \\ 0 & \psi_1 \Diamond \psi_2 \end{pmatrix}.$$

$\mathcal{T}_{\sigma,\tau}^{**}$ را می‌توان با هر یک از ضرب‌های اول یا دوم آرنز به یک جبر باناخ تبدیل کرد.

**تعریف ۲-۲:** فرض کنیم $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ جبر باناخ و $\mathcal{X}$ یک $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$– مدول باناخ باشند. به علاوه فرض کنیم $\sigma \in \mathrm{Hom}(\mathcal{A})$ و $\tau \in \mathrm{Hom}(\mathcal{B})$. در این صورت گوییم $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ به صورت $(\sigma,\tau)$- منظم روی $\mathcal{X}$ اثر می‌کنند، هرگاه به ازای هر $\Gamma \in \mathcal{A}^{**}$، $\Pi \in \mathcal{X}^{**}$ و $\psi \in \mathcal{B}^{**}$ داشته باشیم:

$\sigma^{**}(\Gamma) \Diamond \Pi = \sigma^{**}(\Gamma)\square \Pi$ و

$\Pi \Diamond \tau^{**}(\psi) = \Pi \square \tau^{**}(\psi)$

بالاخص اگر $\sigma = I_{\mathcal{A}}$ و $\tau = I_{\mathcal{B}}$، آن‌گاه $\mathcal{A},\mathcal{B}$ به صورت $(I_{\mathcal{A}}, I_{\mathcal{B}})$ اثر می‌کنند هرگاه به ازای هر $\Gamma \in \mathcal{A}^{**}$ ، $\Pi \in \mathcal{X}^{**}$ و $\psi \in \mathcal{B}^{**}$ داشته باشیم:

$\Gamma \lozenge \Pi = \Gamma \square \Pi$ و $\Pi \lozenge \psi = \Pi \square \psi.$

در این حالت گوییم $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ به صورت منظم روی $\mathcal{X}$ اثر می‌کنند. حال بدیهی است $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ به صورت منظم روی $\mathcal{X}$ اثر می‌کنند اگر و تنها اگر برای هر $\sigma \in \mathrm{Hom}(\mathcal{A})$ و $\tau \in Hom(\mathcal{B})$، $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ به صورت $(\sigma,\tau)$-منظم روی $\mathcal{X}$ اثر کنند.

**قضیه ۲-۳:** فرض کنیم $\mathcal{A}\,,\mathcal{B}$ دو جبر باناخ و $\mathcal{X}$ یک $(\mathcal{A}\,,\mathcal{B})$-مدول باناخ باشد. جبر باناخ مثلثی $\mathcal{T}_{\sigma,\tau} = \begin{pmatrix}\mathcal{A} & \mathcal{X}\\ 0 & \mathcal{B}\end{pmatrix}$ آرنز- منظم است اگر و تنها اگر هر دوی $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ آرنز- منظم باشند و به صورت $(\sigma,\tau)$- منظم روی $\mathcal{X}$ اثر کنند.

**برهان.** برای هر دو عضو

$$\Lambda_i = \begin{pmatrix}\Gamma_i & \Pi_i\\ 0 & \psi_i\end{pmatrix} \in \mathcal{T}^{**}_{\sigma,\tau}, i = 1, 2$$

داریم:

$$\Lambda_1 \lozenge \Lambda_2 = \begin{pmatrix}\Gamma_1 \lozenge \Gamma_2 & \sigma^{**}(\Gamma_1)\lozenge\Pi_2 + \Pi_1 \lozenge \tau^{**}(\psi_2)\\ 0 & \psi_1 \lozenge \psi_2\end{pmatrix}$$

و

$$\Lambda_1 \square \Lambda_2 = \begin{pmatrix}\Gamma_1 \square \Gamma_2 & \sigma^{**}(\Gamma_1)\square\Pi_2 + \Pi_1 \square \tau^{**}(\psi_2)\\ 0 & \psi_1 \square \psi_2\end{pmatrix}$$

لذا حکم بدیهی است.

قضیه قبل را می‌توان به جبرهای $\mathcal{T}^{(4)}_{\sigma,\tau}$ و $\mathcal{T}^{(6)}_{\sigma,\tau}$ و برای هر $n \geq 2$، به $\mathcal{T}^{(2)}_{\sigma,\tau}$ تعمیم داد.

## ۳- چند جبر باناخ مثلثی آرنز-منظم

فرض کنیم $\mathcal{X}$ یک فضای نرمدار باشد. نگاشت کانونی $x \mapsto \hat{x}$ که برای هر $f \in x^*$ به صورت $\hat{x}(f) = f(x)$ تعریف می‌شود، یک نشاننده طولپا از $\mathcal{X}$ به توی $\mathcal{X}^{**}$ است. فضای $\mathcal{X}$ را بازتابی نامیم، اگر این نگاشت پوشا باشد. این مفهوم اولین بار توسط هان[1] در [۶] بیان گردید. در این بخش نکاتی را متذکر و سپس یک مثال چند بخشی را بررسی می‌کنیم.

**ملاحظه۳-۱:** فرض کنیم $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ دو جبر باناخ $\mathcal{X}$ یک $(\mathcal{B},\mathcal{A})$-مدول باناخ باشد. اگر $\mathcal{A}$ به عنوان یک فضای باناخ بازتابی باشد، آنگاه به وضوح آرنز-منظم است [۸]. حال اگر $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ دو جبر باناخ بازتابی باشند، $\mathcal{X}$ یک $(\mathcal{A},\mathcal{B})$-مدول باناخ باشد و $\sigma \in \mathrm{Hom}(\mathcal{A})$ و $\tau \in \mathrm{Hom}(\mathcal{B})$، همچنین $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ به صورت $(\sigma,\tau)$-منظم روی $\mathcal{X}$ اثر کنند، آنگاه جبر باناخ مثلثی $\mathcal{T}_{\sigma,\tau} = \begin{pmatrix}\mathcal{A} & \mathcal{X}\\ 0 & \mathcal{B}\end{pmatrix}$ به وضوح آرنز-منظم است.

**مثال ۳-۲:**

(الف) فضای $l^1(\mathbb{Z})$ را با ضرب پیچشی[2] روی آن در نظر بگیرید. این جبر آرنز- منظم نیست [۹]. بنابراین جبر باناخ مثلثی

$$\mathcal{T}_{\sigma,\tau} = \begin{pmatrix} l^1(\mathbb{Z}) & x\\ 0 & l^1(\mathbb{Z})\end{pmatrix}$$

با در نظر گرفتن ضرب پیچشی روی $l^1(\mathbb{Z})$ آرنز- منظم نیست.

(ب) فضای $l^1(\mathbb{Z})$ را با ضرب نقطه‌ای در نظر بگیرید. این جبر آرنز- منظم است [۲]. بنابراین به ازای هر $\sigma \in Hom\ (\mathcal{A})$ و $\tau \in Hom(\mathcal{B})$، $\mathcal{T}_{\sigma,\tau} = \begin{pmatrix} l^1(\mathbb{Z}) & \mathcal{X}\\ 0 & l^1(\mathbb{Z})\end{pmatrix}$ آرنز-منظم است اگر و تنها اگر $l^1(\mathbb{Z})$ و $l^1(\mathbb{Z})$ به صورت $(\sigma,\tau)$- منظم روی $\mathcal{X}$ اثر کند.

(پ) می‌دانیم هر $C^*$-جبر آرنز-منظم است [۲]. حال فرض کنیم $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ دو $C^*$-جبر باشند و $\mathcal{X}$ یک $(A,\mathcal{B})$-مدول باشد. فرض کنیم $\sigma \in \mathrm{Hom}(\mathcal{A})$ و $\tau \in \mathrm{Hom}(\mathcal{B})$. در این صورت $\mathcal{T}_{\sigma,\tau} = \begin{pmatrix}\mathcal{A} & \mathcal{X}\\ 0 & \mathcal{B}\end{pmatrix}$ آرنز-منظم است اگر $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ دو $C^*$-جبر باشند که به صورت $(\sigma,\tau)$-منظم روی $\mathcal{X}$ اثر کنند.

1. Hahn
2. convolution

(ت) نشان داده شده است که $L^1(G)$ آرنز- منظم است اگر و فقط اگر G گروهی متناهی باشد [۲]. پس به ازای هر $\sigma \in \mathrm{Hom}(\mathcal{A})$ و $\tau \in \mathrm{Hom}(\mathcal{B})$ $\mathcal{T}_{\sigma,\tau} =$ $\begin{pmatrix} L^1(G) & \mathcal{X} \\ 0 & L^1(G) \end{pmatrix}$ آرنز-منظم است هرگاه $L^1(G)$ به صورت $(\sigma,\tau)$-منظم روی $\mathcal{X}$ اثر کند.

(ث) فرض کنیم E یک فضای باناخ باشد. جبر باناخ همه عملگرها روی E را با $\mathcal{B}(E)$ نمایش می‌دهند. در [۳] نشان داده شده است که اگر برای $p \in (1,\infty)$، $l^p(E)$ بازتابی قوی باشد، یعنی فضای باناخ که هیچ فضای نابازتابی‌ای در آن به صورت متناهی قرار نگیرد، آنگاه $\mathcal{B}(E)$ آرنز- منظم است. بنابراین در این صورت $\begin{pmatrix} \mathcal{B}(E) & \mathcal{X} \\ 0 & \mathcal{B}(E) \end{pmatrix}$ آرنز- منظم خواهد بود.

## ۴- هسته توپولوژیکی یک جبر باناخ مثلثی

در این قسمت، پس از مرور چند تعریف و بیانی دیگر برای آرنز- منظم بودن یک جبر باناخ، هسته‌های توپولوژیکی جبر باناخ مثلثی $\mathcal{T}_{\sigma,\tau}$ که $\sigma \in Hom(A)$ و $\tau \in Hom(B)$ را بررسی می‌نماییم. ضرب‌های اول و دوم آرنز روی $\mathcal{A}^{**}$ را که به ترتیب با $\square$ و $\Diamond$ آن‌ها را نشان می‌دهیم، در این بیان طی چند مرحله زیر تعریف می‌شوند[۴]:

**تعریف ۴-۱:** فرض کنیم $X, Y, Z$ فضاهای نرم دار باشند. همچنین فرض کنیم $f: X \times Y \to Z$ یک نگاشت دو خطی پیوسته باشد. در این صورت الحاقی $f$ برای هر $y \in Y$، $x \in X$ و $\acute{z} \in Z^*$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f^*: Z^* \times X \to Y^*,$$
$$\langle f^*(\acute{z}, x), y\rangle = \langle \acute{z}, f(x,y)\rangle$$

به وضوح برای هر $x \in X$، نگاشت

$$\acute{z} \to f^*(\acute{z}, x): Z^* \to Y^*$$

$w^* - w^*$ پیوسته است. چون $f^*$ یک نگاشت دو خطی پیوسته است، این روند را می‌توان برای

$$f^{**} = (f^*)^*: Y^{**} \times Z^* \to X^*$$

و همچنین $f^{***} = (f^{**})^*: X^{**} \times Y^{**} \to Z^{**}$ نیز بیان کرد. نگاشت $f^{***}$ توسیع یکتای نگاشت $f$ است به طوری که:

$$x'' \to f^{***}(x'', y''): X^{**} \to Z^{**}$$

برای هر $y'' \in Y$ و $y'' \to f^{***}(x, y''): y^{**} \to z^{**}$ برای هر $x \in X$، $w^* - w^*$ پیوسته باشند.

اولین مرکز توپولوژیکی $f$ که آن را با $Z(f)$ نمایش می‌دهیم برابر با همه عضوهای $x'' \in X^{**}$ است که برای آن نگاشت $y'' \to f^{***}(x'', y''): Y^{**} \to Z^{**}$ $w^* - w^*$ پیوسته باشد .

**تعریف ۴-۲:** فرض کنیم $X$و$Y$و $Z$ فضاهای نرم دار باشند. همچنین فرض کنیم $f^t: Y \times X \to Z$ ترانهاده نگاشت $f$ باشد که برای هر $x \in X$ و $y \in Y$ به صورت $f^t(y,x) = f(x,y)$ تعریف می‌شود. در این صورت $f^t$ یک نگاشت دو خطی پیوسته از $Y \times X$ به $Z$ است و بنابر آنچه در تعریف قبل گفتیم می‌توان آن را به $f^{t***}: X^{**} \times Y^{**} \to Z^{**}$ توسیع داد.

نگاشت $f^{t***t}: X^{**} \times Y^{**} \to Z^{**}$ را در نظر بگیرید که $y'' \to f^{t***t}(x'', y''): Y^{**} \to Z^{**}$ برای هر $x'' \in X^{**}$ و $x'' \to f^{t***t}(x'', y''): X^{**} \to Z^{**}$ برای هر $y \in Y$، $w^* - w^*$ پیوسته هستند.

مرکز توپولوژی دوم $f$ که آن را با $Z^{(t)}(f)$ نمایش می دهیم برابر با همه عضوهای $y'' \in Y^{**}$ است که برای آن نگاشت $x'' \to f^{t***t}(y'', x''): X^{**} \to Z^{**}$ $w^* - w^*$ پیوسته باشد که این مجموعه برابر است با مجموعه همه عضوهای $y'' \in Y^{**}$ است که برای آن نگاشت $x'' \to f^{t***t}(x'', y''): X^{**} \to Z^{**}$ $w^* - w^*$ پیوسته باشد.

به وضوح $X \subseteq Z(f)$ و $Y \subseteq Z^t(f)$ نگاشت $f$ را آرنز- منظم گوییم، اگر $f^{***} = f^{t***t}$، این شرط با این که $y'' \to f^{t***t}(x'', y''): Y^{**} \to Z^{**}$ برای هر $x'' \in X^{**}$، $w^* - w^*$ پیوسته باشد یعنی $Z(f) = X^{**}$ و نگاشت

$$x'' \to f^{t***t}(x'', y''): \mathcal{X}^{**} \to Z^{**}$$

برای هر $y'' \in Y^{**}$، $w^* - w^*$ پیوسته باشد یعنی $Z(f^t) = Y^{**}$، معادل است.

نگاشت $f$ را آرنز-نامنظم قوی چپ گوییم اگر $Z(f) = X$ و آن را آرنز-نامنظم قوی راست گوییم اگر $Z(f^t) = Y$. همچنین آن را آرنز-نامنظم قوی گوییم اگر $Z(f) = X$ و $Z(f^t) = Y$.

اکنون فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ و $\mathcal{X}$ یک $\mathcal{A}-$دو مدول باناخ باشد و فرض کنیم

$\pi_r: \mathcal{X} \times A \to \mathcal{X}$ و
$\pi_r: \mathcal{A} \times \mathcal{X} \to \mathcal{X}$

اعمال مدولی چپ و راست $\mathcal{A}$ روی $\mathcal{X}$ باشند. در این صورت $\mathcal{X}^{**}$ یک $\mathcal{A}^{**}-$دو مدول باناخ با اعمال مدولی زیر است.

$\pi_r{}^{***}: \mathcal{X}^{**} \times \mathcal{A}^{**} \to \mathcal{X}^{**}$ و $\pi_r{}^{***}: \mathcal{A}^{**} \times \mathcal{X}^{**} \to \mathcal{X}^{**}$

به طور مشابه $\mathcal{X}^{**}$ با اعمال مدولی زیر یک $\mathcal{A}^{**}-$دو مدول باناخ است.

$\pi_r{}^{t***t}: \mathcal{X}^{**} \times \mathcal{A}^{**} \to$ و
$\mathcal{X}^{**}\ \pi_L{}^{t***t}: \mathcal{A}^{**} \times \mathcal{X}^{**} \to \mathcal{X}^{**}$.

اکنون مرکزهای توپولوژیکی اعمال مدولی چپ و راست $\mathcal{A}$ روی $\mathcal{X}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

نیز $Z(\pi_r)$ که با $Z_{\mathcal{A}}(X^{**})$ نشان داده می‌شود عبارت است ها $x'' \in \mathcal{X}^{**}$ از مجموعه همه به طوری که $a'' \mapsto \pi_r{}^{***}(x'', a''): \mathcal{A}^{**} \to \mathcal{X}^{**}$ $w^* - w^*$ پیوسته باشد.

$Z_{\mathcal{X}}(\mathcal{A}^{**})$ که با $Z(\pi_l)$ نیز نشان داده می‌شود عبارت است از مجموعه همه $a'' \in \mathcal{A}^{**}$ ها به طوری که نگاشت $x'' \mapsto \pi_l{}^{***}(a'', x''): \mathcal{X}^{**} \to \mathcal{X}^{**}$ $w^* - w^*$ پیوسته باشد.

توجه کنید که اگر $x$ یک $\mathcal{A}-$ مدول باناخ چپ (راست) باشد و $\pi_L: \mathcal{X} \times \mathcal{A} \to \mathcal{X}$ یک عمل مدولی چپ (راست) $\mathcal{A}$ روی $\mathcal{X}$ باشد، آن‌گاه $\mathcal{X}^*$ یک $\mathcal{A}$-مدول باناخ راست (چپ) است. عمل مدولی راست برای هر $a \in \mathcal{A}$، $x \in \mathcal{X}$ و $\acute{x} \in \mathcal{X}^*$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$\pi_l^*: \mathcal{X}^* \times \mathcal{A} \to \mathcal{X}^*$
$\langle \pi_l^*(x, \acute{a}), x \rangle = \langle \acute{x}, \pi_l(a, x) \rangle$

که می‌توان آن را به صورت خلاصه $\langle \acute{x}a, x \rangle = \langle \acute{x}, ax \rangle$ نوشت. عمل مدولی چپ نیز به صورت زیر تعریف می‌شود:

$\pi_r^{t*t}: \mathcal{A} \times \mathcal{X}^* \to \mathcal{X}^*$
$=\langle \pi_r^{t*t}(a, \acute{x}), x \rangle =$
$\langle \pi_r^{t*}(\acute{x}, a), x \rangle \langle \acute{x}, \pi_r^t(a, x) \rangle =$
$\langle \acute{x}, \pi_r(x, a) \rangle$

برای هر $a \in \mathcal{A}$، $x \in \mathcal{X}$ و $\acute{x} \in \mathcal{X}^*$ که می‌توان آن را به صورت $\langle a\acute{x}, x \rangle = \langle \acute{x}, xa \rangle$ نوشت. به طور مشابه می‌توان عمل $\pi: \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ را با در نظر گرفتن $\mathcal{A}^{**}$ به عنوان $\mathcal{A}-$ دو مدول در نظر گرفت.

با در نظر گرفتن $\mathcal{A}$، به عنوان یک $\mathcal{A}-$دو مدول باناخ، عمل $\pi: \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ را می‌توان به $\pi^{***}$ و $\pi^{t***t}$ روی $\mathcal{A}^{**} \times \mathcal{A}^{**}$ توسیع داد. این توسیع‌ها به ترتیب، ضرب آرنز اول (چپ) و ضرب آرنز دوم (راست) نام دارد که با فضای $\mathcal{A}^{**}$، یک جبر باناخ می‌شود. بنابراین ضرب آرنز اول (چپ) $b''$ و $a''$ از $\mathcal{A}^{**}$، در سه مرحله زیر تعریف می‌شود.

$\langle \acute{a} \lozenge a, b \rangle = \langle \acute{a}, a \lozenge b \rangle$و
$\langle b'' \lozenge \acute{a}, a \rangle = \langle b'', \acute{a} \lozenge a \rangle$و
$\langle a'' \lozenge b'', \acute{a} \rangle = \langle a'', b'' \lozenge \acute{a} \rangle$

برای هر $\acute{a} \in \mathcal{A}^*$ و $a, b \in \mathcal{A}$. به طور مشابه، ضرب آرنز دوم $a'', b''$ از $\mathcal{A}^{**}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$\langle a \square \acute{a}, b \rangle = \langle \acute{a}, b \square a \rangle$و
$\langle \acute{a} \square a'', a \rangle = \langle a'', a \square \acute{a} \rangle$و
$\langle a'' \square b'', \acute{a} \rangle = \langle b'', \acute{a} \square a'' \rangle$.

برای هر $\acute{a} \in \mathcal{A}^*$ و $a, b \in \mathcal{A}$.

مرکز توپولوژیکی‌های اول و دوم معمولی $\mathcal{A}^{**}$، نیز به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$Z(\mathcal{A}^{**})$ مجموعه همه $a'' \in \mathcal{A}^{**}$هایی است که برای آن نگاشت $b'' \to a'' \lozenge b''$، $w^* - w^*$ پیوسته باشد.

$Z^t(\mathcal{A}^{**})$ مجموعه همه $b'' \in \mathcal{A}^{**}$ هایی است که برای آن نگاشت $a'' \to a''.b''$ ، $w^* - w^*$ پیوسته باشد .

با نمادگذاری‌هایی که داشتیم،

$Z(\mathcal{A}^{**}) = Z(\pi) = Z_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}^{**})$ و

$Z^t(\mathcal{A}^{**}) = Z^t(\pi) = Z_A^t(\mathcal{A}^{**}).$

جبر باناخ $\mathcal{A}$ را آرنز منظم گوییم اگر $Z(\mathcal{A}^{**}) = \mathcal{A}^{**}$ یا به طور معادل، $Z^t(\mathcal{A}^{**}) = \mathcal{A}^{**}$. همچنین $\mathcal{A}$ را آرنز منظم قوی گوییم اگر

$Z(\mathcal{A}^{**}) = Z^t(\mathcal{A}^{**}) = \mathcal{A}.$

**قضیه۴-۳:** فرض کنیم $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ دو جبر باناخ و $\mathcal{X}$ یک $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$–مدول باشد. فرض کنیم $\sigma: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ و $\tau: \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ دو همریختی باشند. اعمال مدولی $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ روی $\mathcal{X}$ را به اعمال $\mathcal{A}^{**}$ و $\mathcal{B}^{**}$ روی $\mathcal{X}^{**}$ برای هر $x'' \in \mathcal{X}^{**}$ و $a'' \in A^{**}$ توسیع می‌دهیم:

$x''a'' = \pi_r^{***}(x'', a'')$،

$a''x'' = \pi_l^{***}(a'', x'').$

جبر باناخ مثلثی

$$\mathcal{T}_{\sigma,\tau} = \begin{pmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{X} \\ 0 & \mathcal{B} \end{pmatrix}$$

را با ضرب جدید که در بخش دوم تعریف کردیم در نظر می‌گیریم. در این صورت

$$Z^{t(l)}(\mathcal{T}_{\sigma,\tau}^{**}) = \begin{pmatrix} Z^t(\mathcal{A}^{**}) & Z_{\mathcal{A}}^t(\mathcal{X}^{**}) \\ 0 & Z^t(\mathcal{B}^{**}) \cap Z_{\mathcal{X}}^t(\mathcal{B}^{**}) \end{pmatrix}$$

**برهان:** فرض کنیم:

$\Lambda_1, \Lambda_2 \in \mathcal{T}_{\sigma,\tau}^{**}$، $\Gamma_1, \Gamma_2 \in \mathcal{A}^{**}$، $\Pi_1$ و $\Pi_2 \in \mathcal{X}^{**}$ و $\Psi_1, \Psi_2 \in \mathcal{B}^{**}$

جبرهای باناخ $\mathcal{B}$ و $\mathcal{A}$ به طوری یکدار باشند و $\mathcal{X}$ یک $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$– مدول باشد. در این صورت بنابر تعریف هسته توپولوژی

$$Z^{t(l)}(\mathcal{T}_{\sigma,\tau}^{**}) = \{\Lambda_1 \in \mathcal{T}_{\sigma,\tau}^{**}: \Lambda_1 \Box \Lambda_2 = \Lambda_1 \Diamond \Lambda_2, \Lambda_2 \in \mathcal{T}_{\sigma,\tau}^{**}\}$$

$$Z^{t(r)}(\mathcal{T}_{\sigma,\tau}^{**}) = \{\Lambda_1 \in \mathcal{T}_{\sigma,\tau}^{**}: \Lambda_2 \Box \Lambda_1 = \Lambda_2 \Diamond \Lambda_1, \Lambda_2 \in \mathcal{T}_{\sigma,\tau}^{**}\}$$

از سویی دیگر

$$\Lambda_1 \Box \Lambda_2 = \begin{pmatrix} \Gamma_1\Gamma_2 & \sigma^{**}(\Gamma_1)\Box \Pi_2 + \Pi_1 \Box \tau^{**}(\psi_2) \\ 0 & \psi_1 \Box \psi_2 \end{pmatrix}$$

و

$$\Lambda_1 \Diamond \Lambda_2 = \begin{pmatrix} \Gamma_1 \Diamond \Gamma_2 & \sigma^{**}(\Gamma_1) \Diamond \Pi_2 + \Pi_1 \Diamond \tau^{**}(\psi_2) \\ 0 & \psi_1 \Diamond \psi_2 \end{pmatrix}$$

بنابراین

$$Z_t^{(l)}(\mathcal{T}_{\sigma,\tau}^{**}) = \{\mathcal{T}_{1\sigma,\tau} \in \mathcal{T}_{\sigma,\tau}^{**}: \Gamma_1 \Box \Gamma_2 = \Gamma_1 \Diamond \Gamma_2, \psi_1 \Box \psi_2 = \psi_1 \Diamond \psi_2, \sigma^{**}(\Gamma_1)\Box \Pi_2 + \Pi_1 \Box \tau^{**}(\psi_2) = \sigma^{**}(\Gamma_1) \Diamond \Pi_2 + \Pi_1 \Diamond \tau^{**}(\psi_2), \Lambda_2 \in \mathcal{T}_{\sigma,\tau}^{**}\}$$

در نتیجه

$$Z^{t(l)}(\mathcal{T}_{\sigma,\tau}^{**}) = \begin{pmatrix} Z^t(\mathcal{A}^{**}) & Z^t(\mathcal{X}^{**}) \\ 0 & Z^t(\mathcal{B}^{**}) \cap Z^t(\mathcal{B}^{**}) \end{pmatrix}.$$

پیدا کردن $Z^{t(l)}(\mathcal{T}_{\sigma,\tau}^{**})$ و $Z(\mathcal{T}_{\sigma,\tau}^{**})$ به طور مشابه است.

**ملاحظه ۴-۴:** بنابر قضیه**۴-۳**، می‌توانیم قضیه **۲-۳** را به این صورت دوباره نویسی کنیم:

جبر باناخ $\mathcal{T}_{\sigma,\tau} = \begin{pmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{X} \\ 0 & \mathcal{B} \end{pmatrix}$ آرنز- منظم است اگر و تنها اگر $Z_\sigma^t(\mathcal{A}^{**}) = \mathcal{A}^{**}$ و $Z_\sigma^t(\mathcal{B}^{**}) = \mathcal{B}^{**}$ و $\mathcal{A}$ به صورت $(\sigma, \tau)$- منظم روی $\mathcal{X}$ اثر کنند.

**ملاحظه۴-۵:** اگر $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ آرنز- منظم باشند، آنگاه $\mathrm{Z}_t(\mathcal{A}^{**}) = \mathcal{A}^{**}$ و $\mathrm{Z}_t(\mathcal{B}^{**}) = \mathcal{B}^{**}$. بنابراین می‌توان نوشت

$$\mathrm{Z}_t(\mathcal{T}_{\sigma,\tau}^{**}) = \begin{pmatrix} \mathcal{A}^{**} & \mathcal{A}^{**} \cap \mathcal{B}^{**} \\ 0 & \mathcal{B}^{**} \end{pmatrix}$$

دقت کنید اگر $\mathcal{T}_{\sigma,\tau}$ آرنز-منظم باشد آنگاه نمی‌توان گفت که $Z(\mathcal{T}_{\sigma,\tau}^{**}) = \mathcal{T}_{\sigma,\tau}^{**}$ (مشابه آن‌چه که برای $\mathcal{A}$ یا $\mathcal{B}$

گفته بودیم.) زیرا اگر $Z(\mathcal{T}_{\sigma,\tau}^{**}) = \mathcal{T}_{\sigma,\tau}^{**}$ آنگاه $Z(\mathcal{A}^{**}) = \mathcal{A}^{**}$ و $Z(\mathcal{B}^{**}) = \mathcal{B}^{**}$ و $\mathcal{X}^{**} = \mathcal{A}^{**} \cap \mathcal{B}^{**}$. اما به عنوان مثال $\mathcal{T}_{\sigma,\tau} = \begin{pmatrix} L^P & 0 \\ 0 & L^P \end{pmatrix}$ یک جبر باناخ آرنز- منظم است و

$$(L^P)^{**} \cap (L^P)^{**} = L^P \neq 0.$$

## فهرست منابع

[1] R. Arens, Operations induced in function classes, Monatsh. Math. 55 (1951), 1-19. MR 0044109, https:// doi.org/ 10.1007/ BF01300644.

[2] H. Dales, Banach algebras and automatic contiouity, London Mathematical Society Monogrpahs, New series, 24. Oxford University press, New York, 2000.

[3] M. Daws, Banach algebras of operators, The University of Leeds, December 2004.

[4] M. Eshaghi Gordji and M. Filali, Arens regularity of module actions, Studia Mathematica 181 (2007), 237-254.

[5] B. Forrest and L. Marcoux, Weak amenablility of triangular Banach algebras, Trans, Amer. Soc. 354(4) (2002), 1435-1452.

[6] H. Hahn, U¨ber lineare Gleichungs systeme in linearen Ra¨umen. J. reineangew. Math. 157, 214-229, 1927 H.

[7] Th. Shlumprecht, Course notes for functional analysis 1, Math 655-601, 2011.

[8] T. yazdanpanah and R. Gharibi, Arens-irrengularity of tensor product of Banach algebras, Volume 5, 1 (Special Issue), 2014, Page 1-8 10.22075/ IJNAA. 2014.110.