دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال ششم، شماره بیست و ششم، مهر و آبان ۱۳۹۹
شماره شاپا: ۵۸۸-۲۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

تکامل اولین مقدار ویژه مساله کمانش روی منیفلدهای ریمانی تحت شار ریچی

شاهرود اعظمی*

گروه ریاضی محض (هندسه)، دانشکده علوم پایه، دانشگاه بین‌المللی امام خمینی (ره)، قزوین، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۷/۱۲/۱۵ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۹/۰۶/۱۸

چکیده

میان مسائل مقدار ویژه از عملگر لاپلاس، مسائل مقدار ویژه عملگر هارمونیک دوگانه از موضوعات جالب و مهم هستند، چون این مسائل ریشه در مباحث فیزیک و آنالیز هندسی دارند. مساله کمانش یکی از مهمترین مسائل فیزیک است و مطالعات زیادی توسط محققان در مورد جواب و تخمین مقدار ویژه آن انجام گرفته است. در این مقاله، ابتدا معادله تکامل اولین مقدار ویژه غیر صفر از مساله کمانش روی منیفلدهای ریمانی بسته (منیفلد ریمانی فشرده و بدون مرز) را در امتداد شار ریچی غیرنرمال و شار ریچی نرمال بدست آورده و با استفاده از آنها ثابت می‌کنیم که اولین مقدار ویژه غیر صفر و بعضی از کمیت‌های وابسته به این مقدار ویژه، تحت بعضی از شرایط هندسی، در امتداد شار ریچی یکنوا هستند. سپس روی منیفلدهای خاصی از قبیل منیفلدهای همگن، دو بعدی، سه بعدی، رفتار تکاملی این مقدار ویژه را بررسی می‌کنیم. بویژه در حالت دو بعدی با توجه به مقدار انحنای اسکالر در امتداد شار ریچی نرمال، کمیت‌هایی وابسته به اولین مقدار ویژه پیدا می‌کنیم که تحت شار ریچی نرمال یکنوا هستند. در نهایت هم مثال‌هایی از قبیل حالت‌های سولیتون و منیفلدهای اینشتین ارائه می‌کنیم و تکامل اولین مقدار ویژه مساله کمانش را تحت شار ریچی روی این مثال‌ها بدست می‌آوریم.

واژه‌های کلیدی: لاپلاسین، منیفلد ریمانی، مقدار ویژه، شار ریچی.

*. عهده‌دار مکاتبات: Email:azami@sci.ikiu.ac.ir

۱- مقدمه

در این مقاله یکنوایی اولین مقدار ویژه مساله کمانش را تحت شار ریچی نرمال و غیر نرمال بررسی می‌کنیم. در چند سال اخیر شار ریچی [1] و دیگر شارهای هندسی از قبیل شار یامابه [2]، شار انحنای میانگین [3,4]، شار بورگویگنون [5]، شار ریچی-هارمونیک [6]، از مهمترین موضوعات تحقیقاتی در علوم ریاضی و فیزیک می‌باشند. یک شار هندسی یک تکامل از یک ساختار هندسی تحت یک معادله دیفرانسیل وابسته به یک تابعک روی منیفلد است که معمولاً همرا با بعضی از انحناها می‌باشد. در واقع شارهای هندسی یک سیستم دینامیکی در فضای نامتناهی‌البعد همه مترهای ریمانی روی یک منیفلد مفروض می‌باشند. از طرف دیگر طیف عملگرهای هندسی از قبیل لاپلاسین و p–لاپلاسین روی منیفلدهای ریمانی فشرده M دارای مفهوم هندسی می‌باشد که بعضی از ریاضیدانان ویژگی‌هایی از لاپلاسین و p– لاپلاسین را بررسی کرده و طیف آنها را برحسب دیگر کمیت‌های هندسی M تخمین زده‌اند [7,8,9,10,11]. همچنین مساله کمانش دارای کاربردهایی در فیزیک و بعضی از علوم وابسته به آن از قبیل مهندسی عمران می‌باشد. طیف این مساله نیز روی منیفلدهای ریمانی در مقاله‌های [12,13] بررسی و تخمین زده شده است. در چند سال اخیر یکنوایی مقدار ویژه بعضی از عملگرهای هندسی وابسته به لاپلاسین تحت شارهای هندسی مورد اهمیت واقع شده است که برای اولین بار پرلمن در [14] نشان داد تابعک

$$F=\int_M (R+|\nabla f|^2)e^{-f}d\mu$$

تحت شار ریچی همراه با معادله عقب گردان نوع گرمایی، صعودی است که در آن R انحنای اسکالر نسبت به متر $g(t)$ و $d\mu$ فرم حجمی وابسته به متر $g(t)$ است. صعودی بودن تابعک F نتیجه می‌دهد که اولین مقدار ویژه عملگر هندسی $-4\Delta+R$ در امتداد شار ریچی صعودی باشد. سپس کاو در [15] ولی در [16] عملگر $-4\Delta+R$ را به عملگر هندسی $-\Delta+cR$ توسیع دادند و ثابت کردند که اولین مقدار ویژه این عملگر به ازای $c\geq\frac{1}{4}$ تحت شار ریچی صعودی است. از طرف دیگر در [17,18,19] تکامل اولین مقدار ویژه p-لاپلاسین به ترتیب در امتداد شار ریچی-هارمونیک، شار ریچی و شار انحنای میانگین بررسی شده است.

فرض کنید M یک منیفلد ریمانی بسته $n-$بعدی باشد. برای هر متر ریمانی g روی M و تابع $u:M\to\mathbb{R}$، در مختصات موضعی عملگر لاپلاس Δ روی M به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Delta u=div\nabla u=g^{ij}(\partial_i\partial_j u-\Gamma_{ij}^k\partial_k u)$$

که ∇ التصاق لوی-چیویتا وابسته به g، Γ_{ij}^k ضرایب کریستوفل وابسته به متر g، $\partial_i=\frac{\partial}{\partial x^i}$ و (g^{ij}) معکوس $g=(g_{ij})$ می‌باشد. فرض کنید M یک منیفلد ریمانی کامل $n-$بعدی و υ میدان برداری نرمال یکه خارجی بر مرز M یعنی ∂M باشد. مساله کمانش روی M به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{cases}\Delta^2 u=-\lambda\Delta u, & \text{in} M\\ u=\frac{\partial u}{\partial \upsilon}=0 & \text{on}\,\partial M.\end{cases} \qquad (۱)$$

مساله کمانش یک مساله مقدار ویژه عملگر هارمونیک دوگانه است و طیف آن حقیقی و گسسته می‌باشد.

مساله کمانش بیشتر در علم مقاومت مصالح رشته عمران مطرح است و کمانش به رفتاری گفته می‌شود که معمولاً از عضو تحت فشار سر می‌زند وقتی که نیروی وارد شده بر سازه مانند یک ستون، افزایش می‌یابد ممکن است به قدری بزرگ باشد که سبب ناپایداری ستون گردد که گویند سازه تحت کمانش قرار گرفته است. مقادیر ویژه مساله کمانش معمولاً برای توصیف بار کمانشی بحرانی سازه‌های سفت برای یک نیروی فشار یکنواخت حول مرز آن استفاده می‌شود. در واقع تجزیه و تحلیل مقادیر ویژه مساله کمانش می‌تواند تخمین‌های مفیدی از اشکال حالت فروپاشی ارائه دهد ([20, 21]).

معادله دیفرانسیل مرتبه چهارم زیر نمایش از دست دادن

ثبات در ستون‌ها، همچنین به عنوان کمانش ستون‌ها می‌باشد:

$$\frac{d^2}{dx^2}(E(x)I(x)\frac{d^2y}{dx^2})+P\frac{d^2y}{dx^2}=0$$

که P بار فشار اعمال شده، x مختصات محوری، I(x) گشتاور اینرسی، E(x) مدل الاستیسیته و y(x) حالت تعادل غیر پیش پا افتاده از ستون خمیده است. یک جواب بدیهی معادله فوق y(x)=0 با بار کمانش متناظر P=0 است و این هیچ کاربرد عملی ندارد. جواب غیر بدیهی $y(x)\neq 0$ توسط مقادیر ویژه مساله فوق بدست می‌آیند. مقادیر ویژه بارهای P هستند که ستون را ناپایدار مسازند و y(x) متناظر شکل حالت مربوط به بار است. کمترین بار P که می‌تواند ستون را در تعادل غیر پیش پا افتاده آن حفظ کند، بار کمانش نامند.

فرض کنید $\Omega\subseteq\mathbb{R}^2$ یک ناحیه کراندار در صفحه افقی اشغال شده توسط سطح میانی یک ورقه نازک باشد. ورقه نازکی که در امتداد مرز مهار شده است را در نظر می‌گیریم. اگر این ورقه تحت یک بار فشار یکنواخت قرار گرفته باشد که به طور جانبی در مرز عمل می‌کند آنگاه تا حدودی ورقه می‌خواهد فقط در صفحه خودش متراکم شود. ورای یک بار بحرانی مطمئن، ورقه می‌خواهد به بیرون صفحه خم شود. در زبان نظریه انشعاب، اگر شدت نیرو توسط پارامتر λ پارامتری شده باشد آنگاه برای همه مقادیر λ جواب بدیهی را داریم مثلاً جابه جایی عمودی صفر. وقتی λ یک مقدار بحرانی می‌گیرد آنگاه جواب‌های غیر بدیهی ظاهر می‌شوند و در یک نقطه انشعابی هستیم. این موقعیت توسط معادلات کارمان مدلسازی شده است که یک مساله غیرخطی است و مقادیر بحرانی هنگام وقوع انشعاب، مقادیر ویژه مساله خطی شده هستند. این مساله مقادیر ویژه به صورت

$$\begin{cases}\Delta^2u=-\lambda\Delta u & in\ \ \Omega\\ u=\dfrac{\partial u}{\partial\nu}=0 & on\ \ \partial\Omega\end{cases}$$

است. اولین مقدار ویژه مساله فوق بار کمانش نامیده می‌شود. با الهام از حدس رایلیق برای لرزش ورق‌ها، پولیا و سزگو حدس زدند که ورقه دایره‌ای دارای بار کمانش مینیمال در میان هم ورقه‌ها با مساحت یکسان است. این حدس به ابعاد بالاتر گسترش یافته است.

حال برای یک منیفلد ریمانی بسته M^n با متر ریمانی g_0 شاری ریچی (غیر نرمال) عبارت است از خانواده ۱-پارامتری از مترهای ریمانی $g(t)$ روی M که روی بازه $[0,T)$ تعریف شده و در معادله

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial t}=-2R_{ij} \qquad (۲)$$

با شرط آغازی $g(0)=g_0$ صدق کند که در آن R_{ij} تانسور ریچی متر g می‌باشد.

این شار حجم منیفلد اولیه را در امتداد شار حفظ نمی‌کند ولی با اضافه کردن یک جمله مناسب به سمت راست معادله (۲) شار جدیدی حاصل می‌شود که حجم منیفلد اولیه را حفظ می‌کند و به آن شار ریچی نرمال گویند که عبارت است از

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial t}=-2R_{ij}+\frac{2}{n}rg_{ij} \qquad (۳)$$

در آن $r=\frac{\int_M Rd\mu}{\int_M d\mu}$، R انحنای اسکالر و $d\mu$ فرم حجمی وابسته به متر $g(t)$ می‌باشد. وجود و یکتایی جواب در زمان کوتاه برای هر دو شار ریچی توسط همیلتون در [22] و دی ترک در [23] ثابت شده است.

با توجه به کارهایی که در این زمینه انجام شده و به آن اشاره کردیم در این مقاله اولین مقدار ویژه غیر صفر از مساله کمانش که متر آن تحت شار ریچی نرمال و غیر نرمال تغییر می‌کند را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

عدد λ که در رابطه (۱) صدق می‌کند را مقدار ویژه مساله کمانش گویند. اگر طرفین رابطه (۱) را در u ضرب کنیم و سپس از آن انتگرال بگیریم، خواهیم داشت:

$$\int_M(\Delta u)^2d\mu=\lambda\int_M|\nabla u|^2d\mu.$$

اولین مقدار ویژه غیر صفر از مساله کمانش به صورت تعریف می‌شود:

$$\lambda=\inf_{u\neq 0}\left\{\int_M(\Delta u)^2 d\mu : u\in C^\infty(M), \int_M|\nabla u|^2 d\mu=1\right\}.$$

uرا تابع ویژه نرمال متناظر با مقدار ویژه λ نامیم هرگاه $\lambda=\int_M(\Delta u)^2 d\mu$ و $\int_M|\nabla u|^2 d\mu=1$. از کلاس C^1-مشتق‌پذیری λ و تابع ویژه متناظر با آن در امتداد شار ریچی مشخص نیست. هر چند که با توجه به نظریه توزیع‌ها به ازای ε به قدر کافی کوچک در زمان $(-\varepsilon,\varepsilon)$، مقدار ویژه λ و تابع ویژه متناظر با آن از کلاس C^1-مشتق‌پذیر هستند ولی روی بازه $[0,T)$ مشخص نیست. بخاطر همین در ادامه روند مقاله، با استفاده از روش مقاله [24] تابع همواری نسبت به زمان در امتداد شار ریچی ارائه می‌کنیم که در یک زمان t_0، مقدار ویژه مساله کمانش نیز باشد. برای این منظور فرض کنید $t_0\in[0,T)$ و $u_0=u(t_0)$ تابع ویژه نرمال متناظر با مقدار ویژه $\lambda(t_0)$ برای مساله کمانش باشد. تابع

$$v(t)=u_0\left[\frac{\det(g_{ij}(t_0))}{\det(g_{ij}(t))}\right]^{\frac{1}{2}}$$

یک تابع هموار در امتداد شار ریچی نرمال و غیر نرمال نسبت به زمان است. تابع

$$u(t)=\frac{v(t)}{\sqrt{\int_M|\nabla v|^2 d\mu}}$$

یک تابع هموار در امتداد شارهای (۲) و (۳) است، $\int_M|\nabla u|^2 d\mu=1$ و در زمان t_0، $u(t_0)$ تابع ویژه متناظر با $\lambda(t_0)$ از مساله کمانش است. حال تابع مقدار ویژه هموار

$$\lambda(u(t),t):=\int_M(\Delta u)^2 d\mu \qquad (۴)$$

را در نظر می‌گیریم که در لحظه t_0 داریم $\lambda(u(t_0),t_0)=\lambda(t_0)$ و $u(t)$ تابع هموار نسبت به زمان و در شرط $\int_M|\nabla u|^2 d\mu=1$ صدق می‌کند.

نتایج اصلی مقاله عبارتند از:

قضیه A. فرض کنید $(M^n,g(t))$، $t\in[0,T)$، یک جواب از شار ریچی (۲) روی منیفلد ریمانی بسته و جهت‌پذیر (M,g_0) با انحنای ریچی مثبت باشد که در امتداد شار ریچی به ازای یک β داشته باشیم $R_{ij}-\beta Rg_{ij}>0$. اگر $\lambda(t)$ اولین مقدار ویژه غیر صفر از مساله کمانش باشد آنگاه $\lim_{t\to T}\lambda(t)=\infty$.

قضیه B: فرض کنید $(M^n,g(t))$، $t\in[0,T)$، یک جواب از شار ریچی (۲) روی منیفلد ریمانی بسته و جهت‌پذیر (M,g_0) با انحنای ریچی مثبت باشد که در امتداد شار ریچی به ازای $\frac{1}{4}\le\varepsilon\le\eta\le\frac{1}{2}$ داشته باشیم $\varepsilon Rg_{ij}\le R_{ij}\le\eta Rg_{ij}$. اگر $\lambda(t)$ اولین مقدار ویژه غیر صفر از مساله کمانش باشد آنگاه کمیت $\lambda(t)e^{-(4\varepsilon-2\eta)\alpha t}$ تحت شار ریچی (۲) صعودی است که $\alpha=R_{\min}(g_0)$.

قضیه C: فرض کنید $(M,g(t))$، $t\in[0,T)$ یک جواب از شار ریچی (۲) روی منیفلد سه بعدی همگن، بسته و جهت‌پذیر با انحنای نامنفی (M,g_0) باشد. فرض کنید به ازای $\eta>0$ در امتداد شار ریچی داشته باشیم $R_{ij}\le\eta Rg_{ij}$. در این‌صورت اگر $\lambda(t)$ اولین مقدار ویژه غیر صفر از مساله کمانش باشد آنگاه کمیت $\lambda(t)e^{2\eta\int_0^t R(\tau)d\tau}$ تحت شار ریچی (۲) صعودی است.

قضیه D: فرض کنید M یک رویه ریمانی بسته و جهت‌پذیر با انحنای اسکالر نامنفی باشد. در این‌صورت اولین مقدار ویژه غیر صفر از مساله کمانش در امتداد شار ریچی غیر نرمال (۲) صعودی است.

قضیه E: فرض کنید $(M^2,g(t))$، $t\in[0,T)$ یک جواب از شار ریچی نرمال (۳) روی رویه ریمانی بسته و جهت‌پذیر (M,g_0) باشد. در این‌صورت

الف) اگر $r<0$ آنگاه کمیت‌های $\ln\lambda(t)+\frac{c}{r}e^{rt}$ و $\ln\lambda(t)-\frac{c}{r}e^{rt}$ در امتداد شار ریچی نرمال به ترتیب

صعودی و نزولی هستند.

ب) اگر $r=0$ آنگاه کمیت‌های $\lambda(t)(1+ct)$ و $\lambda(t)e^{-ct}$ در امتداد شار ریچی نرمال به ترتیب صعودی و نزولی هستند.

ج) اگر $r>0$ آنگاه کمیت‌های $\ln\lambda(t)+\frac{c}{r}e^{rt}+rt$ و $\ln\lambda(t)-\frac{c}{r}e^{rt}$ در امتداد شار ریچی نرمال به ترتیب صعودی و نزولی هستند. که c یک عدد ثابت است.

۲- تغییرات $\lambda(t)$

در این بخش فرمول‌های تکامل برای $\lambda(t)$ در امتداد شار ریچی نرمال و غیر نرمال را ارائه می‌دهیم. از مرجع [1] تحول بعضی از کمیت‌های هندسی وابسته به متر تحت شار ریچی به صورت زیر است.

لم ۱. الف) تحت معادله شار ریچی (۲) داریم:

$$1)\ \frac{\partial}{\partial t}g^{ij}=2R^{ij},$$
$$2)\ \frac{\partial}{\partial t}(d\mu)=-Rd\mu,$$
$$3)\ \frac{\partial}{\partial t}(\Gamma_{ij}^{k})=-\nabla_j R_i^k-\nabla_i R_j^k+\nabla^k R_{ij},$$
$$4)\ \frac{\partial}{\partial t}R=\Delta R+2|Ric|^2,$$
$$5)\ \frac{\partial}{\partial t}(\Delta u)=2R^{ij}\nabla_i\nabla_j u+\Delta u_t.$$

ب) تحت شار ریچی نرمال (۳) داریم:

$$1)\ \frac{\partial}{\partial t}g^{ij}=2R^{ij}-\frac{2}{n}rg^{ij},$$
$$2)\ \frac{\partial}{\partial t}(d\mu)=(r-R)d\mu,$$
$$3)\ \frac{\partial}{\partial t}(\Gamma_{ij}^{k})=-\nabla_j R_i^k-\nabla_i R_j^k+\nabla^k R_{ij},$$
$$4)\ \frac{\partial}{\partial t}(\Delta u)=2R^{ij}\nabla_i\nabla_j u-\frac{2}{n}r\Delta u+\Delta u_t,$$

که در آن $u_t=\frac{\partial u}{\partial t}$ و Ric تانسور ریچی می‌باشد.

گزاره۲. فرض کنید $(M^n,g(t))$، $t\in[0,T)$ یک جواب از شار ریچی (۲) روی منیفلد ریمانی بسته و جهت‌پذیر (M,g_0) باشد. اگر $\lambda(t)$ نمایش اولین مقدار ویژه غیر صفر مساله کمانش (۱) در امتداد شار ریچی (۲) باشد، آنگاه داریم

$$\frac{d}{dt}\lambda(u(t),t)|_{t=t_0}=4\int_M(\Delta u)R^{ij}\nabla_i\nabla_j u d\mu-\int_M R(\Delta u)^2d\mu+\lambda(t_0)\int_M R|\nabla u|^2d\mu-2\lambda(t_0)\int_M R^{ij}\nabla_i u\nabla_j u d\mu, \quad (۵)$$

که در آن u تابع ویژه متناظر با $\lambda(t)$ تحت شار ریچی است.

اثبات: با توجه به مطالب گفته شده $\lambda(u(t),t)$ یک تابع هموار نسبت به t در امتداد شار ریچی است. با استفاده از مشتق‌گیری از آن نسبت به t داریم:

$$\frac{d}{dt}\lambda(u(t),t)=\int_M\frac{\partial(\Delta u)^2}{\partial t}d\mu+\int_M(\Delta u)^2\frac{\partial(d\mu)}{\partial t}. \quad (۶)$$

از طرف دیگر روی منیفلد $(M^n,g(t))$ با توجه به لم ۱ در امتداد شار ریچی (۲) داریم

$$\frac{\partial(d\mu)}{\partial t}=-Rd\mu, \quad (۷)$$

و

$$\frac{\partial(\Delta u)^2}{\partial t}=2(\Delta u)\left(2R^{ij}\nabla_i\nabla_j u+\Delta u_t\right). \quad (۸)$$

با جایگذاری (۷) و (۸) در (۶) نتیجه می‌شود

$$\frac{d}{dt}\lambda(u,t)=2\int_M(\Delta u)\left(2R^{ij}\nabla_i\nabla_j u+\Delta u_t\right)d\mu-\int_M(\Delta u)^2Rd\mu.$$

با مشتق‌گیری از طرفین رابطه $\int_M|\nabla u|^2d\mu=1$ نسبت به زمان داریم

$$2\int_M R^{ij}\nabla_i u\nabla_j u d\mu+\int_M 2g^{ij}\nabla_i u\nabla_j u_t d\mu=\int_M R|\nabla u|^2d\mu. \quad (۱۰)$$

همچنین اگر طرفین رابطه (۱) را در u_t ضرب کنیم و سپس از طرفین آن انتگرال بگیریم. آنگاه خواهیم داشت:

$$\int_M u_t\, \Delta^2 u d\mu = -\lambda \int_M u_t \Delta\, u d\mu = \lambda \int_M g^{ij} \nabla_i\, u \nabla_j u_t d\mu. \qquad (۱۱)$$

حال با انتگرال‌گیری جزء به جزء بدست می‌آید

$$\int_M 2\, \Delta u \Delta u_t d\mu = \int_M 2\, u_t \Delta^2 u d\mu. \qquad (۱۲)$$

روابط (۱۰)، (۱۱) و (۱۲) نتیجه می‌دهند که

$$\int_M 2\, \Delta u \Delta u_t d\mu = \lambda \int_M R |\nabla\, u|^2 d\mu - 2\lambda \int_M R^{ij} \nabla_i u \nabla_j u d\mu, \qquad (۱۳)$$

با جایگذاری (۱۳) در رابطه (۹) رابطه (۵) حاصل می‌شود و اثبات گزاره کامل می‌شود.

گزاره۳. فرض کنید $(M^n, g(t))$، $t \in [0, T)$، یک جواب از شار ریچی (۳) روی منیفلد ریمانی بسته و جهت‌پذیر (M, g_0) باشد. اگر $\lambda(t)$ نمایش اولین مقدار ویژه غیر صفر مساله کمانش (۱) در امتداد شار ریچی (۳) باشد، آنگاه داریم

$$\frac{d}{dt} \lambda(u(t), t)|_{t=t_0} = 4 \int_M (\Delta u) R^{ij} \nabla_i \nabla_j u d\mu - \frac{2}{n} r \lambda(t_0) - \int_M R\, (\Delta u)^2 d\mu + \lambda(t_0) \int_M R\, |\nabla u|^2 d\mu - n\lambda(t_0) \int_M (\Delta u) R^{ij} \nabla_i u \nabla_j u d\mu, \qquad (۱۴)$$

که در آن u تابع ویژه متناظر با $\lambda(t)$ تحت شار ریچی است.

اثبات: در حالت شار ریچی نرمال (۳) با توجه به لم ۱ داریم

$$\frac{\partial (d\mu)}{\partial t} = (r - R) d\mu, \qquad (۱۵)$$

$$\frac{\partial (\Delta u)^2}{\partial t} = 2(\Delta u) \left(2R^{ij} \nabla_i \nabla_j u - \frac{2}{n} r \Delta u + \Delta u_t\right). \qquad (۱۶)$$

پس با توجه به رابطه (۶) داریم

$$\frac{d}{dt} \lambda(u(t), t) = 2 \int_M (\Delta u) \left(2R^{ij} \nabla_i \nabla_j u - \frac{2}{n} r \Delta u + \Delta u_t\right) d\mu \qquad (۱۷)$$

$$+ \int_M (\Delta u)^2 (r - R) d\mu = \int_M 4\, (\Delta u) R^{ij} \nabla_i \nabla_j u d\mu - \int_M R\, (\Delta u)^2 d\mu + \frac{n-4}{n} r\lambda + 2 \int_M \Delta\, u \Delta u_t d\mu.$$

از طرف دیگر

$$2 \int_M \Delta\, u \Delta u_t d\mu = 2 \int_M u_t\, \Delta^2 u d\mu = -2\lambda \int_M u_t \Delta\, u d\mu = 2\lambda \int_M g^{ij} \nabla_i u_t \nabla_j\, u d\mu \qquad (۱۸)$$
$$= \lambda \int_M R |\nabla\, u|^2 d\mu - \frac{2-n}{n} \lambda r - 2\lambda \int_M R^{ij} \nabla_i u \nabla_j\, u d\mu$$

بنابراین با جایگذاری (۱۸) در (۱۷) اثبات گزاره کامل می‌شود.

اثبات قضیه A: روی یک منیفلد ریمانی بسته M^n و هر تابع هموار $u : M \to \square$، فرمول ریلی به‌صورت زیر می‌باشد

$$\int_M |\nabla \nabla u|^2 d\mu + \int_M R\, ic(\nabla u, \nabla u) d\mu = \int_M (\Delta u)^2 d\mu.$$

حال نامساوی $|\nabla \nabla u|^2 \geq \frac{1}{n} (\Delta u)^2$ به همراه فرمول ریلی نتیجه می‌دهند.

$$\frac{n-1}{n} \lambda = \frac{n-1}{n} \int_M (\Delta u)^2 d\mu \geq \int_M R\, ic(\nabla u, \nabla u) d\mu.$$

از اینکه در امتداد شار ریچی داریم $R_{ij} - \beta R g_{ij} > 0$ پس خواهیم داشت:

$$\frac{n-1}{n} \lambda \geq \beta \int_M R\, |\nabla u|^2\, d\mu \geq \beta R_{\min}(t).$$

از مرجع [22] داریم $\lim_{t \to T} R_{\min}(t) = \infty$ در نتیجه $\lim_{t \to T} \lambda(t) = \infty$.

از مرجع [1] لم زیر را داریم.

لم ۴: برای جواب‌های شار ریچی روی $[0, T)$ داریم

$$R_{g(t)} \geq \frac{\alpha}{1 - \frac{2}{n} t\alpha},$$

که $\alpha = R_{\min}(g_0)$.

اثبات قضیه B: با توجه به شرط $\varepsilon R g_{ij} \le R_{ij} \le \eta R g_{ij}$ داریم

$$\int_M (\Delta u) R^{ij}\nabla_i \nabla_j u d\mu \ge \varepsilon \int_M R(\Delta u)^2 d\mu,$$
$$\int_M R^{ij}\nabla_i u \nabla_j u d\mu \le \eta \int_M R|\nabla u|^2 d\mu.$$

با جایگذاری آنها در رابطه (۵) نتیجه می‌شود.

$$\frac{d}{dt}\lambda(u(t),t)|_{t=t_0} \ge 4\int_M (\Delta u)^2 \epsilon R d\mu - \int_M R(\Delta u)^2 d\mu + \lambda(t_0)\int_M R|\nabla u|^2 d\mu - 2\lambda(t_0)\eta \int_M R|\nabla u|^2 d\mu = (4\epsilon - 1)\int_M (\Delta u)^2 R d\mu + (1 - 2\eta)\lambda(t_0)\int_M R|\nabla u|^2 d\mu$$

حال با توجه به لم ۴ داریم

$$\frac{d}{dt}\lambda(u(t),t)|_{t=t_0} \ge (4\epsilon - 1)\alpha\lambda(t_0) + (1-2\eta)\alpha\lambda(t_0) = (4\epsilon - 2\eta)\alpha\lambda(t_0).$$

از اینکه $\lambda(u(t),t)$ نسبت به t تابع همواری است پس در هر همسایگی کوچک از t مانند I_0 داریم

$$\frac{1}{\lambda(u(t),t)}\frac{d}{dt}\lambda(u(t),t) \ge (4\epsilon - 2\eta)\alpha$$

با انتگرال‌گیری از طرفین نامساوی فوق نسبت به t در فاصله $[t_1,t_0] \subseteq I_0$ بدست می‌آید.

$$ln\frac{\lambda(u(t_0),t_0)}{\lambda(u(t_1),t_1)} \ge (4\epsilon - 2\eta)\alpha(t_0 - t_1).$$

چون $\lambda(u(t_0),t_0) = \lambda(t_0)$ و $\lambda(u(t_1),t_1) \ge \lambda(t_1)$ پس

$$ln\frac{\lambda(t_0)}{\lambda(t_1)} \ge ln\frac{\lambda(u(t_0),t_0)}{\lambda(u(t_1),t_1)} \ge (4\epsilon - 2\eta)\alpha(t_0 - t_1)$$

یعنی

$$\lambda(t_0)e^{-(4\epsilon-2\eta)\alpha t_0} \ge \lambda(t_1)e^{-(4\epsilon-2\eta)\alpha t_1}.$$

از اینکه t_0 دلخواه است بنابراین کمیت $\lambda(t)e^{-(4\epsilon-2\eta)\alpha t}$ در امتداد شار ریچی صعودی می‌باشد.

۳-تغییرات $\lambda(t)$ روی منیفلدهای همگن

در این بخش حالت خاصی از منیفلد که منیفلد همگن باشد را در نظر گرفته و تغییرات $\lambda(t)$ را روی این منیفلدها محاسبه می‌کنیم.

گزاره ۵: فرض کنید $(M^n, g(t))$، $t \in [0,T)$، یک جواب از شار ریچی (۲) یا (۳) روی منیفلد ریمانی همگن و بسته و جهت‌پذیر (M, g_0) باشد. اگر $\lambda(t)$ نمایش اولین مقدار ویژه غیر صفر مساله کمانش (۱) در امتداد شار ریچی باشد، آنگاه

الف) در امتداد شار ریچی غیر نرمال (۲) داریم

$$\frac{d}{dt}\lambda(u(t),t)|_{t=t_0} = 4\int_M (\Delta u)R^{ij}\nabla_i\nabla_j u d\mu - 2\lambda(t_0)\int_M R^{ij}\nabla_i u \nabla_j u d\mu, \qquad (۱۹)$$

ب) در امتداد شار ریچی نرمال (۳) داریم

$$\frac{d}{dt}\lambda(u(t),t)|_{t=t_0} = 4\int_M (\Delta u)R^{ij}\nabla_i\nabla_j u d\mu - \frac{2}{n}r\lambda(t_0), - 2\lambda(t_0)\int_M R^{ij}\nabla_i u \nabla_j u d\mu, \qquad (۲۰)$$

که در آن u تابع ویژه متناظر با $\lambda(t)$ تحت شار ریچی است.

اثبات: مترهای همگن تحت شار ریچی حفظ می‌شوند و همچنین منیفلدهای همگن دارای انحنای اسکالر ثابت هستند. بنابراین رابطه (۵) نتیجه می‌دهد که روی منیفلدهای همگن در امتداد شار ریچی غیر نرمال (۲) داشته باشیم

$$\frac{d}{dt}\lambda(u(t),t)|_{t=t_0} = 4\int_M (\Delta u)R^{ij}\nabla_i\nabla_j u d\mu - R\int_M (\Delta u)^2 d\mu + \lambda(t_0)R\int_M |\nabla u|^2 d\mu - 2\lambda(t_0)\int_M R^{ij}\nabla_i u\nabla_j u d\mu = 4\int_M (\Delta u)R^{ij}\nabla_i\nabla_j u d\mu - 2\lambda(t_0)\int_M R^{ij}\nabla_i u\nabla_j u d\mu. \qquad (۲۱)$$

همچنین با توجه به رابطه (۱۴) در امتداد شار ریچی نرمال روی منیفلدهای همگن داریم

$$\frac{d}{dt}\lambda(u(t),t)|_{t=t_0} = 4\int_M(\Delta u)R^{ij}\nabla_i\nabla_j u d\mu - \frac{2}{n}r\lambda(t_0) - R\int_M(\Delta u)^2 d\mu + \lambda(t_0)R\int_M|\nabla u|^2 d\mu - 2\lambda(t_0)\int_M R^{ij}\nabla_i u\nabla_j u d\mu = 4\int_M(\Delta u)R^{ij}\nabla_i\nabla_j u d\mu - \frac{2}{n}r\lambda(t_0) - 2\lambda(t_0)\int_M R^{ij}\nabla_i u\nabla_j u d\mu.$$

۴-تغییرات $\lambda(t)$ روی منیفلدهای سه بعدی

گزاره ۶: فرض کنید $(M^3,g(t))$، $t\in[0,T)$، یک جواب از شار ریچی (۲) روی منیفلد ریمانی و بسته و جهت‌پذیر (M,g_0) با انحنای ریچی مثبت باشد. همچنین فرض کنید که روی (M,g_0) به ازای یک ثابت ε که $0<\varepsilon\le\frac{1}{3}$ داشته باشیم $\varepsilon Rg_{ij}\le R_{ij}$ و انحنای ریچی آن مثبت باشد. در این‌صورت اگر $\lambda(t)$ اولین مقدار ویژه غیر صفر از مساله کمانش باشد آنگاه $\lim_{t\to T}\lambda(t)=\infty$.

اثبات: با توجه به مرجع [22] نامساوی $\varepsilon Rg_{ij}\le R_{ij}$ در امتداد شار ریچی (۲) حفظ می‌شود. پس

$$\varepsilon Rg_{ij}\le R_{ij} \qquad on \quad M\times[0,T)$$

بنابراین، قضیه A نتیجه می‌دهد که حکم گزاره برقرار است.

اثبات قضیه C: در منیفلدهای سه بعدی همگن، نامنفی بودن تانسور ریچی تحت شار ریچی (۲) حفظ می‌شود. بنابراین رابطه (۱۹) نتیجه می‌دهد که

$$\frac{d}{dt}\lambda(u(t),t)|_{t=t_0} \ge -2\lambda(t_0)\eta\int_M R|\nabla u|^2 d\mu.$$

چون انحنای اسکالر در منیفلدهای همگن ثابت است پس

$$\frac{d}{dt}\lambda(u(t),t)|_{t=t_0} \ge -2\lambda(t_0)\eta R.$$

حال مشابه اثبات قضیه B کمیت $\lambda(t)e^{2\eta\int_0^t R(\tau)d\tau}$ صعودی است.

تبصره: فرض کنید $(M,g(t))$، $t\in[0,T)$ یک جواب از شار ریچی (۲) روی منیفلد همگن، بسته و جهت‌پذیر (M,g_0) باشد که در طول شار $\varepsilon Rg_{ij}\le R_{ij}\le\eta Rg_{ij}$. در این‌صورت اگر $\lambda(t)$ اولین مقدار ویژه غیر صفر از مساله کمانش باشد آنگاه تحت شار ریچی داریم

$$\frac{d}{dt}\lambda(u(t),t)|_{t=t_0}\ge(4\varepsilon-2\eta)R\lambda(t_0).$$

پس در یک همسایگی t_0 بدست می‌آید

$$\frac{1}{\lambda(u(t),t)}\frac{d}{dt}\lambda(u(t),t)\ge(4\varepsilon-2\eta)R.$$

پس کمیت $\lambda(t)e^{-(4\varepsilon-2\eta)\int_0^t R(\tau)d\tau}$ تحت شار ریچی (۲) صعودی است و به همین ترتیب $\lambda(t)e^{-(2\eta-4\varepsilon)\int_0^t R(\tau)d\tau}$ تحت شار ریچی (۲) نزولی است.

۵-تغییرات $\lambda(t)$ روی منیفلدهای دو بعدی

در این بخش فرمول‌های (۵) و (۱۴) را روی منیفلدهای دو بعدی نوشته و با استفاده از آنها نتایجی را بدست می‌آوریم.

گزاره ۷: فرض کنید $(M^2,g(t))$، $t\in[0,T)$ یک جواب از شار ریچی (۲) یا (۳) روی رویه‌های ریمانی بسته و جهت‌پذیر (M,g_0) باشد. اگر $\lambda(t)$ نمایش اولین مقدار ویژه غیر صفر مساله کمانش (۱) در امتداد شار ریچی باشد، آنگاه

الف) در امتداد شار ریچی غیر نرمال (۲) داریم

$$\frac{d}{dt}\lambda(u(t),t)|_{t=t_0} = \int_M R(\Delta u)^2 d\mu, \qquad (۲۱)$$

ب) در امتداد شار ریچی نرمال (۳) داریم

$$\frac{d}{dt}\lambda(u(t),t)|_{t=t_0} = \int_M R(\Delta u)^2 d\mu - r\lambda(t_0), \qquad (۲۲)$$

که در آن u تابع ویژه متناظر با $\lambda(t)$ تحت شار ریچی است.

اثبات: الف) روی منیفلدهای دو بعدی داریم $R_{ij}=\frac{1}{2}Rg_{ij}$. پس رابطه (۵) نتیجه می‌دهد

$$\frac{d}{dt}\lambda(u(t),t)|_{t=t_0}=$$
$$4\int_M(\Delta u)R^{ij}\nabla_i\nabla_j u d\mu-\int_M R\,(\Delta u)^2 d\mu$$
$$+\lambda(t_0)\int_M R|\nabla u|^2\,d\mu-$$
$$2\lambda(t_0)\int_M R^{ij}\nabla_i u\nabla_j u d\mu$$
$$=2\int_M R\,(\Delta u)^2 d\mu-\int_M R\,(\Delta u)^2 d\mu$$
$$+\lambda(t_0)\int_M R\,|\nabla u|^2 d\mu-$$
$$\lambda(t_0)\int_M R\,|\nabla u|^2 d\mu$$
$$=\int_M R\,(\Delta u)^2 d\mu.$$

مشابه همین قسمت ب اثبات می‌شود.

اثبات قضیه D: با توجه به لم ۱ در امتداد شار ریچی (۲) داریم

$$\frac{\partial R}{\partial t}=\Delta R+R^2.$$

جواب معادلات دیفرانسیل معمولی $\frac{\partial y}{\partial t}=y^2$ به صورت $y(t)=\frac{1}{y_0-t},t\in[0,T')$ است که $y_0=\inf_M R(0)$ و $T'=\min\{y_0,T\}$. با توجه به اصل ماکزیمم اسکالر، نامنفی بودن انحنای اسکالر روی $[0,T')$ تحت شار ریچی حفظ می‌شود. پس رابطه (۲۱) نتیجه می‌دهد به ازای tهای به قدر کافی نزدیک t_0 داشته باشیم $\frac{d}{dt}\lambda(u,t)\geq 0$. پس در همسایگی به قدر کافی کوچک حول t_0، $\lambda(t)$ صعودی است. چون t_0 دلخواه است پس $\lambda(t)$ در امتداد شار ریچی (۲) صعودی است.

تبصره: اگر برای منیفلد n-بعدی دلخواه M، $n\geq 3$ فرض کنیم که تحت شار ریچی داشته باشیم $R_{ij}=\frac{1}{2}Rg_{ij}$ آنگاه نتیجه می‌شود که منیفلد اینشتینی است و در ادامه تغییرات مقدار ویژه روی چنین منیفلدهایی بحث شده است.

اثبات قضیه E: الف) اگر $r<0$ آنگاه با توجه به مرجع [1] در امتداد شار ریچی نرمال به ازای یک ثابت c داریم

$$r-ce^{rt}\leq R\leq r+ce^{rt}.$$

رابطه (۲۲) نتیجه می‌دهد که برای tهای به قدر کافی نزدیک به t_0 داشته باشیم

$$-ce^{rt}\leq\frac{1}{\lambda(u,t)}\frac{d}{dt}\lambda(u,t)\leq ce^{rt},$$

بنابراین اگر t_1 به قدر کافی نزدیک t_0 باشد آنگاه روی $[t_1,t_0]$ داریم

$$\ln\frac{\lambda(t_0)}{\lambda(t_1)}\geq\ln\frac{\lambda(u(t_0),t_0)}{\lambda(u(t_1),t_1)}\geq-\frac{c}{r}(e^{rt_0}-e^{rt_1}),$$

یعنی

$$\ln\lambda(t_0)+\frac{c}{r}e^{rt_0}\geq\ln\lambda(t_1)+\frac{c}{r}e^{rt_1}.$$

پس کمیت $\ln\lambda(t)+\frac{c}{r}e^{rt}$ در امتداد شار ریچی نرمال صعودی است. به همین ترتیب برای t_2 به قدر کافی نزدیک به t_0 روی $[t_0,t_2]$ داریم:

$$\ln\frac{\lambda(t_2)}{\lambda(t_0)}\leq\ln\frac{\lambda(u(t_2),t_2)}{\lambda(u(t_0),t_0)}\leq\frac{c}{r}(e^{rt_2}-e^{rt_0}),$$

یعنی $\ln\lambda(t_2)-\frac{c}{r}e^{rt_2}\leq\ln\lambda(t_0)-\frac{c}{r}e^{rt_0}$. پس کمیت $\ln\lambda(t)-\frac{c}{r}e^{rt}$ در امتداد شار ریچی نرمال صعودی است. قسمت‌های ب و ج با توجه به اینکه اگر $r=0$ آنگاه در امتداد شار ریچی نرمال داریم $-\frac{c}{1+ct}\leq R\leq c$ و اگر $r>0$ آنگاه در امتداد شار ریچی نرمال داریم $-ce^{rt}\leq R\leq r+ce^{rt}$، مشابه قسمت الف ثابت می‌شوند.

۶- مثال‌ها

در این بخش سه مثال ارائه می‌کنیم. در مثال اول فرض می‌کنیم جواب‌های شار ریچی به صورت سولیتون ریچی باشند و سپس تکامل مقدار ویژه مساله کمانش را در این حالت بررسی می‌کنیم و در مثال دوم وسوم فرض می‌کنیم منیفلد اولیه به ترتیب بصورت ریچی تخت و اینشتین باشد. سپس تکامل مقدار ویژه مساله کمانش را روی چنین منیفلدهایی تحت شار ریچی بررسی می‌کنیم.

مثال ۸: جواب‌های $(M^n, g(t))$ از شار ریچی، سولیتون ریچی نامیده می‌شوند هرگاه یک تابع هموار $c(t)$ و خانواده ۱- پارامتری از دیفئومورفیسم‌های $\{\phi_t\}$ از M^n چنان موجود باشند که $g(t)=c(t)\phi_t^*(g_0)$، $c(0)=1$ و $\phi_0 = id_M$. با توجه به مرجع [1]، هر سولیتون ریچی را می‌توان به ازای یک ثابت حقیقی a بصورت $g(t)=(1-2at)\phi_t^*(g_0)$ نوشت. از طرفی برای یک دیفئومورفیسم $\phi : M^n \to M^n$ نگاشت $\phi : (M^n, \phi^* g) \to (M^n, g)$ یک ایزومتری است. بنابراین تساوی‌های $\Delta_{\phi^* g} \circ \phi^* = \phi^* \circ \Delta_g$ و $\Delta^2_{\phi^* g} \circ \phi^* = \phi^* \circ \Delta^2_g$ نتیجه می‌دهند که طیف مساله کمانش روی $(M^n, \phi^* g)$ برابر طیف مساله کمانش روی (M^n, g) است. پس اگر $g(t)$ سولیتون ریچی روی (M^n, g_0) باشد آنگاه $\lambda(t) = \frac{\lambda(0)}{c^2(t)}$.

مثال ۹: فرض کنید (M, g_0) یک منیفلد ریمانی فشرده دلخواه باشد. اگر متر آغازی g_0 ریچی تخت باشد یعنی $R_{ij}(0,x)=0$ آنگاه $g_{ij}(t,x)=g_{ij}(0,x)$ یک جواب برای معادله شار ریچی خواهد شد لذا مقادیر ویژه هم هیچ تغییراتی نخواهد داشت.

مثال ۱۰: منیفلد (M^n, g_0) را یک منیفلد اینشتینی نامیم هرگاه به ازای یک ثابت a داشته باشیم $Ric(g_0) = ag_0$.

جواب‌های شار ریچی (۲) روی منیفلد اینشتینی (M^n, g_0) با $Ric(g_0)=ag_0$ به صورت $g(t)=(1-2at)g_0$ است که نشان می‌دهد $(M^n, g(t))$ نیز یک منیفلد اینشتینی است. پس منیفلدهای اینشتینی تحت شار ریچی حفظ می‌شوند. روی این منیفلد اینشتینی داریم

$$Ric(g(t)) = Ric(g_0) = ag_0 = \frac{a}{1-2at} g(t)$$

و

$$R_{g(t)} = \frac{an}{1-2at}.$$

رابطه (۵) نتیجه می‌دهد

$$\frac{d}{dt}\lambda(u(t),t)|_{t=t_0} = \int_M \frac{4a}{1-2at_0}(\Delta u)^2 d\mu - \int_M \frac{an}{1-2at_0}(\Delta u)^2 d\mu + \lambda(t_0)\int_M \frac{an}{1-2at_0}|\nabla u|^2 d\mu - 2\lambda(t_0)\int_M \frac{an}{1-2at_0}|\nabla u|^2 d\mu = \frac{2a}{1-2at_0}\lambda(t_0).$$

پس برای tهای به قدر کافی نزدیک t_0 همواری تابع $\lambda(u(t),t)$ نسبت به t نتیجه می‌دهد

$$\frac{1}{\lambda(u,t)}\frac{d\lambda(u,t)}{dt} = \frac{2a}{1-2at}.$$

فرض کنید t_1 به اندازه کافی نزدیک به t_0 که $t_1 < t_0$ باشد. با انتگرال از طرفین رابطه فوق نسبت به t در فاصله $[t_1, t_0]$ داریم

$$ln\frac{\lambda(t_0)}{\lambda(t_1)} \geq ln\frac{\lambda(u(t_0),t_0)}{\lambda(u(t_1),t_1)} = ln(\frac{1-2at_1}{1-2at_0})$$

یعنی

$$\lambda(t_0)(1-2at_0) \geq \lambda(t_1)(1-2at_1).$$

چون t_0 دلخواه است پس کمیت $\lambda(t)(1-2at)$ در امتداد شار ریچی (۲) صعودی است.

فهرست منابع

[1] B. Chow, D. Knopf, The Ricci flow: An introduction, Mathematical surveys and monographs, Vol. 110, AMS, New York, (2004)

[2] R. Ye, Global existence and convergence of Yamabe flow, *J. Differential Geom.*, 39:35–50(1994)

[3] Y.G. Chen, Y. Giga, S. Goto, Uniqueness and existence of viscosity solutions of generalized mean curvature flow equations. J. Differential Geom. 33:749–786(1991)

[4] G. Huisken, A. Polden, Geometric evolution equations for hypersurfaces, In: Calculus of variations and geometric evolution problems. Springer, Berlin, 45–84 (1999)

[5] G. Catino, L. Cremaschi, Z. D jadli, C. Mantegazza and L. Mazzieri, *The Ricci-Bourguignon flow*, Pacific J. Math. 287(2), 337-370 (2017)

[6] R. Müller, The Ricci flow coupled with harmonic map heat flow, Ann. Sci. Ec. Norm, Sup 45: 101- 142(2012)

[7] S.Y. Cheng, Eigenfunctions and eigenvalues of Laplacian. In: Chern SS, Osserman R (eds) Proceedings of the symposium of pure mathematics, vol 27 no. part 2, differential geometry. American Mathematical Society, Providence, 185–193(1975)

[8] Q-M. Cheng, H.C. Yang, Estimates on eigenvalues of Laplacian, Math. Ann. 331: 445–460(2005)

[9] E.M. Harrell, P.L. Michel, Commutator bounds for eigenvalues with applications to spectral geometry, Commun. Partial Differ. Equ. 19: 2037–2055(1994)

[10] P.F. Leung, On the consecutive eigenvalues of the Laplacian of a compact minimal submanifold in a sphere, J. Aust. Math.Soc. 50: 409–426(1991)

[11] J. Mao, Eigenvalue inequalities for the *p*-Laplacian on a Riemannian manifold and estimates for the heat kernel**,** Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 101(3), 372-393(2014)

[12] Q. Wang, C. Cia, Universal inequalities for eigenvalues of the buckling problem on spherical domains, Community. Math. Physical. 270: 759-775 (2007)

[13] Q.-M. Cheng, H. Yang, Universal bounds for eigenvalues of a buckling problem I I, Amer. Math. Soc. 364 (11), 6139-6158 (2012)

[14] Q. S. Zhang, Sobolev inequalities, heat kernels under Ricci flow, and the Poincare conjecture, Taylor and Francis group, (2011)

[15] X-D. Cao, First eigenvalues of geometric operators under the Ricci flow, Proc. Amer. Math. Soc. 136: 4075–4078(2008)

[16] J. F. Li, Eigenvalues and energy functionals with monotonicity formula under Ricci flow, Math. Ann. 338: 927-946(2007)

[17] A. Abolarinwa, Evolution and monotonicity of the first eigenvalue of *p*-Laplacian under the Ricci-harmonic flow, J. Appl. Anal. 21: 147-160(2015)

[18] J. Y. Wu, First eigenvalue monotonicity for the *p*-Laplace operator under the Ricci flow, Acta. mathematica sinica, English series, 27(8), 591-1598(2011)

[19] L. Zhao The first eigenvalue of the p-Laplacian operator under powers of the m-th mean curvature flow, Results Math, 63: 937–948(2012)

[20] I. Elishakoff, Inverse buckling problem for inhomogeneous columns, International Journal of Solids and Structures 38: 457-464(2001)

[21] C.C. Ike, C.U. Nwoji, E.U. Ikwueze, I.O. Ofondu, Solution of the Generalised Elastic Column Buckling Problem by the Galerkin Variational Method, International Journal for Research in Applied Science & Engineering Technology, 5(1), 468-475(2017)

[22] R. S. Hamilton, Three-manifolds with positive Ricci curvature, J. Differential Geom., 17: 255-306(1982)

[23] D. M. De Turk, Deforming metrics in the direction of their Ricci tensor, J. Differential Geom., 18: 157-162(1983)

[24] X.-D, Cao, Eigenvalues of $(-\Delta+\frac{R}{2})$ on manifolds with nonnegative curvature operator, Math. Ann. 337(2),435-441(2007)