دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال ششم، شماره بیست و ششم، مهر و آبان ۱۳۹۹
شماره شاپا: ۲۵۸۸X-۵۸۸

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

$\psi-$ میانگین‌پذیری برخی از جبرهای باناخ

محسن ضیامنش[۱]، بهروز شجاعی[۲]*

[۱] گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، واحد تهران جنوب، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران.
[۲] گروه ریاضی، واحد کرج، دانشگاه آزاد اسلامی، کرج، ایران.

تاریخ ارسال مقاله: ۹۸/۰۱/۰۷ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۸/۰۵/۲۸

چکیده

در این مقاله ثابت می‌کنیم که به ازای $\psi\epsilon Hom(A)$، جبر باناخ A، ψ-میانگین‌پذیر است به شرط این که جبر باناخ ماتریسی $A \otimes \mathbb{M}_n$، $\psi \otimes I$-میانگین‌پذیر باشد. بعلاوه ثابت می‌کنیم ψ-میانگین‌پذیری جبر باناخ A و ϕ-میانگین‌پذیری جبر باناخ B هم ارز با $\psi \otimes \varphi$-میانگین‌پذیری θ-لائو جبر باناخ $A \times_\theta B$ می‌باشد، که به ترتیب ψ ، φ همومورفیسم‌های پیوسته روی B, A و θ یک کارکتر پیوسته روی B می‌باشد.

واژه‌های کلیدی: اشتقاق، میانگین‌پذیری، $\psi-$اشتقاق، $\psi-$درونی، $\psi-$میانگین‌پذیری.

*. عهده دار مکاتبات: Email: shoujaei@kiau.ac.ir

۱- مقدمه

فرض کنیم A یک جبر باناخ و X یک باناخ، A–دومدول باشد. نگاشت خطی پیوسته $D\colon \mathrm{A} \longrightarrow X$ را یک اشتقاق گوئیم اگر برای هر $a, b \in \mathrm{A}$ داشته باشیم:

$$D(ab) = D(a).b + a.D(b) \ .$$

بعلاوه نگاشت D را اشتقاق درونی گوئیم، اگر $x \in X$ وجود داشته باشد که به ازای هر $a \in \mathrm{A}$:

$$D(a) = a.x - x.a \ .$$

جبر باناخ A را میانگین‌پذیر گوئیم، اگر به ازای هر باناخ A–دومدول باناخ X، نگاشت اشتقاق، $D\colon \mathrm{A} \longrightarrow X^*$، درونی باشد[۲].

مفهوم میانگین‌پذیری به اشکال مختلف برای جبرهای باناخ تعمیم پیدا کرده است، از جمله تعمیمی که توسط میرزاوزیری و همکاران در مقالات [۴،۵و۶] انجام گرفته است. بدین صورت است که فرض کنیم $\psi\colon \mathrm{A} \to \mathrm{A}$ یک هومومورفیسم پیوسته باشد. در این صورت نگاشت خطی پیوسته $D\colon \mathrm{A} \longrightarrow X$ را یک $\psi-$ اشتقاق گوئیم اگر به ازای هر $a, b \in \mathrm{A}$ داشته باشیم:

$$D(ab) = D(a).\psi(b) + \psi(a).D(b)$$

بعلاوه D را $\psi-$اشتقاق درونی گوئیم اگر $x \in X$ وجود داشته باشد به‌طوری که برای هر $a \in \mathrm{A}$:

$$D(a) = \psi(a).x - x.\psi(a) \ .$$

لذا جبر باناخ A را $\psi-$ میانگین‌پذیر گوئیم اگر برای هر باناخ A– دومدول X هر $\psi-$ اشتقاق $D\colon \mathrm{A} \longrightarrow X^*$، $\psi-$ درونی باشد.

$\mathrm{H}om(A)$ را مجموعه تمام هومومورفیسم‌های پیوسته از A بتوی A تعریف می‌کنیم.

در این مقاله ثابت می کنیم که به ازای $\psi \epsilon \mathrm{H}om(A)$ ، جبر باناخ A، ψ- میانگین‌پذیر است، به شرط اینکه جبر باناخ ماتریسی $A \otimes \mathbb{M}_n$، $I \otimes \psi$- میانگین‌پذیر باشد. بعلاوه به ازای دو جبر باناخ A و B، $\psi \epsilon \mathrm{H}om(A)$، $\varphi \epsilon \mathrm{H}om(B)$ و کاراکتر $\theta\colon B \to \mathbb{C}$، ثابت می‌کنیم θ-لائو جبر باناخ $A \times_\theta \mathrm{B}$ ، $\varphi \otimes \psi-$ میانگین‌پذیراست، اگر و تنها اگر A، ψ- میانگین‌پذیر و B ، ϕ-میانگین‌پذیر باشد.

۲- $I \otimes \psi-$میانگین‌پذیری جبر باناخ $A \otimes \mathbb{M}_n$

فرض کنیم X یک فضای باناخ و $n \in \mathbb{N}$ باشد. مجموعه ماتریس‌های $n \times n$ با درایه‌های از X را با $\mathbb{M}_n(X)$ و همچنین $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ را با $\mathbb{M}_n$ نمایش می‌دهیم. ماتریس‌های با درایه یک در سطر i ــام، ستون j ــام و بقیه جاها صفر در $\mathbb{M}_n$ را با $\mathcal{E}_{ij}$ نشان خواهیم داد به طوری که

$$\mathcal{E}_{ij}\mathcal{E}_{kl} = \delta_{jk}\mathcal{E}_{ij} \ \ (i, j, k, l \in \mathbb{N}) \ .$$

$\mathbb{M}_n(X)$ را می‌توان به عنوان یک فضای باناخ با نرم زیر در نظر گرفت

$$\|(x_{ij})\| = \textstyle\sum_{i,j=1}^{n}\|x_{ij}\| \ , (x_{ij}) \in \mathbb{M}_n(X)$$

بعلاوه می‌توان فضای دوگان $\mathbb{M}_n(X)^*$ را با $\mathbb{M}_n(X^*)$ توسط نگاشت زیر،یکی در نظر گرفت.

$$< (x_{ij}^*), (x_{ij}) > = \textstyle\sum_{i,j=1}^{\infty} < x_{ij}^* , x_{ij} > ,$$

که $(x_{ij}) \in \mathbb{M}_n(X)$ ، $({x_{ij}}^*) \in \mathbb{M}_n(X^*)$ از طرفی داریم که فضای $\mathbb{M}_n(X)$ ایزومورفیسم با $X \otimes \mathbb{M}_n$ به عنوان فضاهای باناخ است، یعنی: $\mathbb{M}_n(X) \cong X \otimes \mathbb{M}_n$ و اگر A یک جبر باناخ باشد یک ایزومورفیسم جبری از $\mathbb{M}_n(A)$ به $A \otimes \mathbb{M}_n$ وجود دارد، به‌عبارت دیگر

$$\mathbb{M}_n(A) \cong A \otimes \mathbb{M}_n \ .$$

فرض کنیم A یک جبر باناخ و X یک باناخ $A-$ دومدول باشد، در این صورت به‌طور معمول $X \otimes \mathbb{M}_n$ را را می‌توان یک باناخ $A \otimes \mathbb{M}_n-$ دومدول در نظر گرفت. در مرجع [۱] نشان داده شده که نگاشت

$$\mathbb{M}_n \longrightarrow \mathbb{M}_n^* \ : A \mapsto A \ ,$$

ایزومتری است و $\mathbb{M}_n^*$ را می‌توان با اعمال مدولی زیر به عنوان یک $\mathbb{M}_n-$ دومدول در نظر گرفت:

$$A.E = EA^T \ \ , E.A = A^T E \ ,$$

که $E \in \mathbb{M}_n^*$ ، $A \in \mathbb{M}_n$ و A^T ترانهاده A است.

۲-۱- قضیه: فرض کنیم $\psi \in Hom(A)$ و A یک جبرباناخ باشد. اگر $A \otimes \mathbb{M}_n$، $\psi \otimes I$ –میانگین‌پذیر باشد آنگاه A، ψ –میانگین‌پذیر است.

برهان: فرض کنیم $D: A \longrightarrow X^*$ یک ψ –اشتقاق و X یک باناخ A – دومدول باشد. نگاشت

$$J: \mathbb{M}_n \longrightarrow \mathbb{M}_n^* \ : A \mapsto A^T$$

یک ایزومتری است. ابتدا ثابت می‌کنیم تابع

$$D \otimes J: A \otimes M_n \longrightarrow X^* \otimes \mathbb{M}_n^* = (X \otimes \mathbb{M}_n)^*$$

با ضابطه

$$D \otimes J(a \otimes A) = D(a) \otimes A^T ,$$

$\psi \otimes I$ –اشتقاق است. زیرا به ازای هر $a, b \in A$ و $A, B \in \mathbb{M}_n$ داریم:

$$D \otimes J\big((a \otimes A)(b \otimes B)\big) = (D \otimes J)(ab \otimes AB) = D(ab) \otimes (AB)^T$$

از طرفی

$$\begin{aligned}&(D \otimes J)(a \otimes A).\psi \otimes I(b \otimes B) + \psi \otimes I(a \otimes A).(D \otimes J)(b \otimes B)\\ &= (D(a) \otimes A^T).(\psi(b) \otimes B) + (\psi(a) \otimes A).(D(b) \otimes B^T)\\ &= D(a).\psi(b) \otimes B^T A^T + \psi(a).D(b) \otimes B^T A^T\\ &= D(ab) \otimes B^T A^T\end{aligned}$$

بنابراین

$$D \otimes J\big((a \otimes A)(b \otimes B)\big) = (D \otimes J)(a \otimes A).\psi \otimes I(b \otimes B) + \psi \otimes I(a \otimes A).(D \otimes J)(b \otimes B)$$

پس $D \otimes J$ ، ψ –درونی است. لذا وجود دارد

$$\textstyle\sum_{i,j=1}^{n} x_{ij}^* \otimes \varepsilon_{ij} \in X^* \otimes \mathbb{M}_n ,$$

به طوری که به ازای هر $a \otimes \gamma_{ij} \in A \otimes \mathbb{M}_n$ داریم:

$$(D \otimes J)\big(a \otimes (\gamma_{ij})\big) = (a \otimes (\gamma_{ij})) . (\textstyle\sum_{i,j=1}^{n} x_{ij}{}^* \otimes \varepsilon_{ij}) - (\sum_{i,j=1}^{n} x_{ij}{}^* \otimes \varepsilon_{ij}).\big(a \otimes (\gamma_{ij})\big) .$$

اکنون به ازای ماتریس واحد ε_{11} در رابطه فوق داریم:

$$\begin{pmatrix} D(a) & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}_{n\times n} = (D \otimes J)(a \otimes \varepsilon_{11}) = \textstyle\sum_{i,j=1}^{n} \psi(a).x_{ij}{}^* \otimes (\varepsilon_{ij})(\varepsilon_{11})^T - \sum_{i,j=1}^{n} x_{ij}{}^*.\psi(a) \otimes (\varepsilon_{11})^T(\varepsilon_{ij})$$

در نتیجه

$$D(a) = \psi(a).x_{11}^* - x_{11}^*.\psi(a) ,$$

پس D یک ψ–درونی است. بنابراین A ، ψ– میانگین‌پذیر است.

فرض کنیم A و B دو جبر باناخ و θ یک کاراکتر پیوسته روی B باشد. ضرب θ–لائو، A در B را که با نماد $A \times_\theta B$ نمایش می‌دهیم، حاصلضرب دکارتی $A \times B$ با عمل زیر است:

$$(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1a_2 + \theta(b_1)a_2 + \theta(b_2)a_1, b_1b_2)$$

و نرم

$$\|(a_1, b_1)\| = \|a_1\| + \|b_1\| .$$

بدیهی است که A یک ایده‌آل دوطرفه بسته در $A \times_\theta B$ و B ایزومورفیسم جبری با $\frac{A\times_\theta B}{A}$ است. در حالت خاص که $B = \mathbb{C}$ و θ نگاشت همانی روی $\mathbb{C}$ باشد، آنگاه $A \times_\theta B = A^\#$ که $A^\#$ جبر باناخ یکدار شده A است. فرض کنیم:

$\psi \in Hom(A)$ و $\phi \in Hom(B)$

نگاشت

$$\psi \otimes \varphi: A \times_\theta B \to A \times_\theta B ,$$

با ضابطه

$$\psi \otimes \varphi(a, b) = (\psi(a), \varphi(b))$$

یک هومورفیسم است، زیرا

$$\psi \otimes \varphi\big((a_1, b_1)(a_2, b_2)\big)$$

$= \psi \otimes \varphi(a_1 a_2 + \theta(b_1)a_2 + \theta(b_2)a_1, b_1 b_2)$
$= (\psi(a_1)\psi(a_2) + \theta(b_1)\psi(a_2) + \theta(b_2)\psi(a_1), \varphi(b_1)\varphi(b_2)) = (\psi(a_1), \varphi(b_1))(\psi(a_2), \varphi(b_2))$
$= \psi \otimes \varphi(a_1, b_1)\ \psi \otimes \varphi(a_2, b_2)$

۲-۲- قضیه: فرض کنیم A و B دو جبر باناخ، و θ یک کاراکتر پیوسته روی B، $\psi \in \mathrm{Hom}(A)$ و $\phi \in \mathrm{Hom}(B)$ باشد. آنگاه $A \times_\theta B$، $\psi \otimes \varphi$ –میانگین‌پذیر است اگر و تنها اگر A، ψ–میانگین‌پذیر و B، φ –میانگین‌پذیر باشد.

اثبات: فرض کنیم $A \times_\theta B$، $\psi \otimes \varphi$ –میانگین پذیر، X یک باناخ A–دومدول و $D: A \longrightarrow X^*$ یک ψ–اشتقاق باشد. X را می‌توان بعنوان یک باناخ $A \times_\theta B$ -دو مدول با اعمال زیر در نظر گرفت:

$(a,b).x = \psi \otimes \varphi(a,b).x$
$= (\psi(a) + \theta(b)).x$

و

$x.(a,b) = x.\psi \otimes \varphi(a,b)$
$= x.(\psi(a) + \theta(b))$,

که $x \in X$, $(a,b) \in A \times_\theta B$.

اکنون نگاشت $\widetilde{D}: A \times_\theta B \longrightarrow X^*$ با ضابطه $\widetilde{D}(a,b) = D(a)$ را تعریف می‌کنیم. برای هر $(a_1,b_1),(a_2,b_2) \in A \times_\theta B$ داریم:

$\widetilde{D}((a_1,b_1),(a_2,b_2)) = \widetilde{D}(a_1 a_2 + \theta(b_1)a_2 + \theta(b_2)a_1, b_1 b_2)$
$= D(a_1 a_2 + \theta(b_1)a_2 + \theta(b_2)a_1)$
$= D(a_1).a_2 + a_1.D(a_2) + \theta(b_1)D(a_2) + \theta(b_2)D(a_1)$
$= D(a_1).\psi(a_2) + \psi(a_1).D(a_2) + \theta(b_1)D(a_2) + \theta(b_2)D(a_1)$
$= D(a_1)(\psi(a_2) + \theta(b_2)) + (\psi(a_1) + \theta(b_1))D(a_2)$
$= \widetilde{D}(a_1,b_1).\ \psi \otimes \varphi(a_2,b_2) + \psi \otimes \varphi(a_1,b_1).\widetilde{D}(a_2,b_2)$.

بنابراین $\widetilde{D}$ یک $\psi \otimes \varphi$-اشتقاق است. لذا طبق فرض یک $x^* \in X^*$ وجود دارد که:

$D(a) = \widetilde{D}(a,b)$
$= (a,b).x^* - x^*.(a,b)$
$= (\psi(a) + \theta(b)).x^* - x^*.(\psi(a) + \theta(b))$
$= \psi(a).x^* - x^*.\psi(a)$,

در نتیجه A، ψ–میانگین‌پذیر است.

بعلاوه برای اثبات φ– میانگین‌پذیری جبر باناخ B، فرض کنیم X باناخ B–دو مدول و $D: B \longrightarrow X^*$ یک φ–اشتقاق باشد. نگاشت

$\eta: A \times_\theta B \longrightarrow B \quad : \ (a,b) \mapsto b$

را تعریف می‌کنیم. همچنین X را می‌توان بعنوان یک باناخ $A \times_\theta B$ -دو مدول با اعمال زیر در نظر گرفت:

$(a,b).x = \varphi(\eta(a,b)).x = \varphi(b).x$,

و

$x.(a,b) = x.\varphi(\eta(a,b)) = x.\varphi(b)$,

که $x \in X$, $(a,b) \in A \times_\theta B$.

چون η یک هومورفیسم است، بنابراین نگاشت

$D \circ \eta: A \times_\theta B \longrightarrow X^*$

$\psi \otimes \varphi$-اشتقاق است. لذا طبق فرض یک $x^* \in X^*$ وجود دارد که:

$D(b) = D \circ \eta(a,b)$
$= (a,b).x^* - x^*.(a,b)$
$= \varphi(b).x^* - x^*.\varphi(b)$

در نتیجه B، φ–میانگین‌پذیر است.

برعکس. همانند اثبات قضیه ۲.۳.۱۰، [۷] فرض کنیم X یک باناخ $A \times_\theta B$–دو مدول و $D: A \times_\theta B \longrightarrow X^*$ یک $\psi \otimes \varphi$–اشتقاق باشد. چون نگاشت

$D|_{A \times_\theta 0} : A \times_\theta 0 \longrightarrow X^*$

$\psi \otimes 0$–اشتقاق و A، ψ–میانگین‌پذیر است، بنابراین ${x_1}^* \in X^*$ وجود دارد که به ازای هر $a \in A$ داریم:

$D(a,0) = (\psi(a),0).x_1^* - x_1^*.(\psi(a),0).$

قرار دهیم $\widetilde{D} = D - ad_{x_1^*}$. واضح است که $\widetilde{D}$، یک $\varphi \otimes \psi$–اشتقاق و $\widetilde{D}|_{A \times_\theta 0} = 0$ است. مجموعه‌های

$F = \{x^* \in X^* : (\psi(a),0).x^* =$

$x^*.(\psi(a),0) = 0, a \in A\}$,

و

$X_0 = lin\{(\psi(a_1),0).x + y.(\psi(a_2),0): a_1, a_2 \in A , x, y \in X\}$,

را تعریف می‌کنیم. بنابراین $F \cong (X / X_0)^*$ یک باناخ $\mathrm{B} \times_\theta 0$ – دو مدول دوگان است. لذا برای هر $a \in A$ و $b \in \mathrm{B}$ داریم:

$$(\psi(a),0).\widetilde{D}(0,b) = \widetilde{D}\big((a,0)(0,b)\big) - \widetilde{D}(a,0).(0,\varphi(b)) = \widetilde{D}(\theta(b)a,0) - \widetilde{D}(a,0).(0,\varphi(b) = 0 ,$$

چون $\widetilde{D}(a,0) = 0$. به همین ترتیب

$$\widetilde{D}(0,b).(\psi(a),0) = 0 ,$$

بنابراین برای هر $b \in B$ داریم: $\widetilde{D}(0,b)\epsilon F$.

از طرفی چون $B = 0 \times_\theta \mathrm{B}$ ، φ–میانگین‌پذیر است لذا وجود دارد یک ${x_2}^* \in F$ بطوریکه

$$\widetilde{D}(a,b) = \widetilde{D}(0,b) = \big(0,\varphi(b)\big).{x_2}^* - {x_2}^*.\big(0,\varphi(b)\big) = \big(\psi(a),\varphi(b)\big).{x_2}^* - {x_2}^*.\big(\psi(a),\varphi(b)\big) = ad_{{x_2}^*}(a,b)$$

بنابراین

$$D = ad_{{x_1}^*+{x_2}^*} .$$

لذا $\mathrm{A} \times_\theta \mathrm{B}$، $\psi \otimes \varphi$ –میانگین‌پذیر است.

فرض کنیم A یک جبر باناخ و $\psi \in \mathrm{H}om(A)$ باشد. تعریف می‌کنیم $\tilde{\psi} \in \mathrm{H}om(A^\#)$ با ضابطه $\tilde{\psi}(a + \lambda e) = \psi(\mathrm{a}) + \lambda \mathrm{e}$ که $\mathrm{a} \in \mathrm{A}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ و $e \in A^\#$ عضو واحد است. در قضیه فوق اگر $B = \mathbb{C}$ و φ , θ نگاشت همانی روی B باشند دراین صورت $\psi \otimes \varphi$ همان نگاشت $\tilde{\psi}$ روی جبر باناخ یکدار شده A یعنی $A^\# = \mathrm{A} \times_\theta \mathrm{B}$ است و لذا گزاره زیر نتیجه می‌شود.

۳-۲ گزاره: فرض می‌کنیم A یک جبر باناخ و $\psi \in \mathrm{H}om(A)$ باشد. آنگاه A، ψ– میانگین‌پذیر است اگر و تنها اگر $A^\#$، $\tilde{\psi}$– میانگین‌پذیر باشد.

فهرست منابع

[1] F. Ghahramani and R. J. Loy, Generalized notions of amenability, J.Funct. Anal. 208, 229-260 (2004).

[2] B. E. Johnson, Cohomology in Banach algebras, Mem. Amer. Math. Soc. 127 (1972).

[3] E. Kaniuth, A. T. Lau and J. Pym, On $\phi-$amenability of Banach algebras, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 144, 85-96 (2008).

[4] M. Mirzavaziri, σ-Amenability of Banach Algebras, Southeast Asian Bulletin of Mathematics 33:89–99(2009).

[5] M. Mirzavaziri and M. S. Moslehian: σ-Derivations in Banach algebras, Bull. Iranian Math. Soc. 32(1), 65–78 (2006).

[6] M. Mirzavaziri and M.S. Moslehian: Automatic continuity of σ-derivations in C^*-algebras, Proc. Amer. Math. Soc. 134(11), 3319–3327 (2006).

[7] V. Runde, Lectures on Amenability, Lecture Notes in Mathematics, 1774, SpringerVerlage, Berlin, 2002.

[8] M. Sangani Monfared, On certain products of Banach algebras with applications to harmonic analysis, Studia Math. 178, 277-294 (2007).