دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال ششم، شماره بیست و ششم، مهر و آبان ۱۳۹۹
شماره شاپا: ۵۸۸-۲۵۸۸X

پژوهش‌های نوین در ریاضی

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

گراف‌های همبند صحیح تطابقی با مرتبه کوچک

سمیه خلاشی قزل احمد *

استادیار، گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات، تهران، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۸/۰۱/۱۹ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۸/۱۱/۰۲

چکیده

منظور از یک تطابق در یک گراف مجموعه‌ای از یال‌های مستقل است. چندجمله‌ای تطابقی یک گراف، چندجمله‌ای است که ضرایب آن تعداد تطابق‌ها در گراف را مشخص می‌کند. یک گراف را **صحیح تطابقی** گوییم هرگاه تمام ریشه‌های چندجمله‌ای تطابقی آن صحیح باشند. در این مقاله ابتدا نشان می‌دهیم دقیقاً هشت گراف همبند صحیح تطابقی از مرتبه حداکثر هفت وجود دارد. سپس ثابت می‌کنیم اگر G یک گراف همبند صحیح تطابقی هشت راسی باشد، آن‌گاه G دارای تطابق سه یالی بوده و اندازه G برابر چهارده است. در پایان تمام گراف‌های همبند صحیح تطابقی با ماکزیمم درجه حداکثر سه را شناسایی می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: تطابق، چندجمله‌ای تطابقی، گراف صحیح تطابقی.

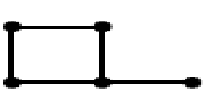
*. عهده‌دار مکاتبات:
Email:S.ghezelahmad@srbiau.ac.ir

۱- مقدمه

تمام گراف‌هایی که در این مقاله در نظر می‌گیریم، متناهی، ساده و غیر جهت دار هستند. فرض کنید G یک گراف باشد. مجموعه رئوس و مجموعه یال‌های G را به ترتیب با نمادهای $V(G)$ و $E(G)$ نشان می‌دهیم. منظور از **مرتبه** G، تعداد رئوس G و منظور از **اندازه** G، تعداد یال‌های G است. اندازه گراف G را با نماد $|E(G)|$ نشان می‌دهیم. ماکزیمم درجه رئوس G با $\Delta(G)$ نشان داده می‌شود. گراف کامل، مسیر و دور از مرتبه n، $n \geq 1$، را به ترتیب با نمادهای K_n، P_n و C_n نشان می‌دهیم. گراف ستاره از مرتبه $n+1$ با نماد $K_{1,n}$ نشان داده می‌شود. یک گراف را **قابل ردیابی** گوییم هرگاه دارای مسیر همیلتونی باشد. یک r-**تطابق** در گراف G، مجموعه‌ای از r یال است که هیچ دو تایی با یکدیگر تلاقی ندارند. تعداد r-تطابق‌ها در G را با نماد $p(G,r)$ نشان می‌دهیم. چندجمله‌ای تطابقی گراف G به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu(G,x)=\sum_{r=0}^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor}(-1)^r p(G,r)x^{n-2r},$$

که در آن n مرتبه G است و $p(G,0)$ برابر ۱ در نظر گرفته می‌شود. با توجه به این‌که $p(G,1)$ تعداد یال‌های گراف G است، ضریب x^{n-2} در $\mu(G,x)$ همان اندازه G است. برای مطالعه بیشتر در زمینه چندجمله‌ای تطابقی یک گراف مراجع [۱، ۲، ۳، ۴، ۵] را ببینید. به‌عنوان مثال چندجمله‌ای تطابقی گراف زیر



$\mu(G,x)=x^5-5x^3+4x$ است. تکرر θ به عنوان یک ریشه $\mu(G,x)$ با نماد $\mathrm{mult}(\theta,G)$ نشان داده می‌شود. گادزیل ثابت نمود اگر $\theta=0$ آن‌گاه $\mathrm{mult}(\theta,G)$ برابر تعداد رئوسی از G است که توسط یک تطابق ماکزیمم پوشانده نمی‌شود[۲]. سیستم ریشه‌های G به‌صورت

$$R(G)=\{\theta_1^{m_1},\theta_2^{m_2},\dots,\theta_k^{m_k}\}$$

تعریف می‌شود که در آن θ_i یک ریشه $\mu(G,x)$ و m_i تکرر ریشه θ_i است.

اگر G یک درخت باشد، آن‌گاه چندجمله‌ای تطابقی G و چندجمله‌ای مشخصه آن که به‌صورت چندجمله‌ای مشخصه ماتریس مجاورت G تعریف می‌شود، یکسان هستند. به‌علاوه چندجمله‌ای تطابقی هر گراف همبند، عاملی از چندجمله‌ای مشخصه یک درخت است. برای یک گراف مولکولی یعنی گرافی که مولکول‌ها را شبیه‌سازی می‌کند و در آن رئوس بیانگر اتم‌ها و یال‌ها بیان‌گر پیوند بین اتم‌ها هستند، **انرژی گراف** که به صورت مجموع قدر مطلق ریشه‌های چندجمله‌ای مشخصه تعریف می‌شود، بیانگر تخمین بسیار نزدیکی از انرژی پیوند π-الکترونی در آن مولکول است. انرژی پیوند π-الکترونی با نماد E_π و انرژی گراف با نماد $E(G)$ نشان داده می‌شود. بنابراین $E_\pi \equiv E(G)$. در شیمی نظری ثابت شده است که بخش عمده‌ای از این انرژی مربوط به وجود دور در اتم‌های کربن موجود در مولکول مزدوج مرجع است. این دورها عامل پایداری یا عدم پایداری مولکول هستند. به منظور استخراج نمودن انرژی ناشی از این دورها، یک مرجع غیر حلقوی مورد نیاز است. به تفاضل E_π و انرژی این مرجع غیر حلقوی، انرژی رزونانس یا انرژی عدم استقرار گفته می‌شود. انرژی رزونانس توپولوژیکی با نماد TRE[1] نشان داده می‌شود. برای محاسبه TRE، بدین صورت عمل می‌شود که انرژی مرجع با در نظر نگرفتن اثر تمام دورها در چندجمله‌ای مشخصه گراف وابسته به مولکول، محاسبه می‌شود. بدین ترتیب چندجمله‌ای مشخصه به چندجمله‌ای تطابقی و انرژی مرجع به دو برابر مجموع ریشه‌های مثبت چندجمله‌ای تطابقی تقلیل می‌یابد. به دلیل تقارن ریشه‌های چندجمله‌ای تطابقی، مجموع فوق در واقع همان مجموع قدر مطلق ریشه‌های چندجمله‌ای تطابقی است که در نظریه گراف به آن **انرژی تطابقی** گفته می‌شود و با نماد $ME(G)$ نشان داده می‌شود. بنابراین داریم

$$TRE(G)=E(G)-ME(G).$$

برای مطالعه بیشتر در این زمینه مرجع [۶] را بینید. از

1. Topological resonance energy

این‌رو ملاحظه می‌شود که مطالعه ریشه‌های چندجمله‌ای تطابقی حایز اهمیت است. از کاربرهای چندجمله‌ای تطابقی در نظریه گراف، می‌توان به محاسبه تعداد تطابق‌های کامل مکمل گراف G با استفاده از $\mu(G,x)$ اشاره نمود[۱]. همچنین ثابت می‌شود هر چند جمله‌ای را می‌توان به صورت ترکیب خطی چندجمله‌ای تطابقی گراف‌های کامل نوشت. به‌علاوه چندجمله‌ای‌های تطابقی گراف‌های کامل یک خانواده متعامد از چندجمله‌ای‌ها را تشکیل می‌دهند [۱].

یک گراف را **صحیح** می‌نامند، هرگاه تمام مقادیر ویژه ماتریس مجاورت آن صحیح باشند. مساله شناسایی گراف‌های صحیح برای اولین بار در ۱۹۷۴ توسط هرری مطرح شد. از آن زمان به بعد این گراف‌ها به طور وسیع مورد مطالعه قرار گرفته‌اند [۷، ۸]. یک گراف را **صحیح تطابقی** می‌نامیم هرگاه تمام ریشه‌های چندجمله‌ای تطابقی آن صحیح باشند.

به‌وضوح انرژی تطابقی یک گراف صحیح تطابقی مقداری صحیح است. گراف‌های صحیح تطابقی برای اولین بار توسط اکبری و همکاران مورد مطالعه قرار گرفتند [۹]. آن‌ها تمام گراف‌های قابل ردیابی که صحیح تطابقی هستند را شناسایی نمودند. به‌علاوه ثابت کردند برای $k \geq 2$، تنها گراف k–منظم صحیح تطابقی، گراف $K_7\backslash(E(C_3)\cup E(C_4))$ است. همچنین نشان دادند هیچ گراف فاقد پنجه‌ای وجود ندارد که صحیح تطابقی باشد و K_2 تنها گراف همبندی است که دارای تطابق کامل بوده و صحیح تطابقی است.

قربانی در ۲۰۱۳ خانواده‌ای از گراف‌ها را شناسایی نمود که چندجمله‌ای تطابقی آن‌ها دارای دقیقا پنج ریشه متمایز است [۱۱]. در این مقاله با استفاده از این رده از گراف‌ها، تمام گراف‌های همبند صحیح تطابقی با حداکثر هفت راس را شناسایی می‌کنیم. نشان می‌دهیم فقط هشت گراف همبند صحیح تطابقی با مرتبه حداکثر هفت وجود دارد. همچنین ثابت می‌کنیم اگر گراف همبند G هشت راسی بوده و صحیح تطابقی باشد، آن‌گاه اندازه G برابر چهارده است. در انتها گراف‌های صحیح تطابقی با ماکزیمم درجه حداکثر سه را مطالعه می‌کنیم. برای این منظور لم‌ها و قضایای زیر مورد نیاز است:

قضیه ۱–۱:[۱۰] در هر گراف G تمام ریشه‌های $\mu(G,x)$ حقیقی هستند. اگر $\Delta > 1$، آن‌گاه ریشه‌ها در بازه $(-2\sqrt{\Delta-1}, 2\sqrt{\Delta-1})$ قرار می‌گیرند.

توجه کنید از تعریف $\mu(G,x)$ نتیجه می‌شود اگر θ یک ریشه چندجمله‌ای تطابقی گراف G باشد، آن‌گاه $-\theta$ نیز یک ریشه آن است. به‌علاوه اگر G گرافی از مرتبه فرد باشد، آن‌گاه چون تطابق کامل ندارد صفر یک ریشه چندجمله‌ای تطابقی آن است.اکنون فرض کنید θ_1، ...، θ_k تمام ریشه‌های مثبت و نه لزوما متمایز $\mu(G,x)$ باشند. اگر صفر یک ریشه $\mu(G,x)$ نباشد، آن‌گاه

$$\mu(G,x)=\prod_{i=1}^{k}(x^2-\theta_i^2)$$
$$=x^{2k}-(\theta_1^2+\cdots+\theta_k^2)x^{2k-2}+\cdots+(-1)^k\theta_1^2\ldots\theta_k^2$$

و اگر صفر یک ریشه $\mu(G,x)$ با تکرر t باشد، آن‌گاه

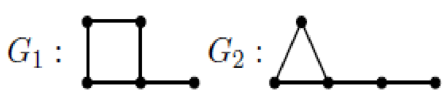
$$\mu(G,x)=x^t\prod_{i=1}^{k}(x^2-\theta_i^2)$$
$$=x^{2k+t}-(\theta_1^2+\cdots+\theta_k^2)x^{2k+t-2}+\cdots+(-1)^k\theta_1^2\ldots\theta_k^2x^t.$$

بنابراین ملاحظه می‌شود که در گراف G، مجموع مربعات ریشه‌های چندجمله‌ای تطابقی، برابر تعداد یال‌های G است و حاصل ضرب مربعات ریشه‌های ناصفر، برابر تعداد تطابق‌ها با اندازه ماکزیمم است.

قضیه ۱–۲:[۱] اگر G یک گراف همبند باشد، آن‌گاه بزرگ‌ترین ریشه $\mu(G,x)$ ساده است. یعنی دارای تکرر یک است.

قضیه ۱–۳:[۹] فرض کنید G یک گراف همبند باشد که تمام ریشه‌های چندجمله‌ای تطابقی آن ساده هستند. در این‌صورت G یکی از گراف‌های زیر است:

K_1، K_2، $K_7\backslash(E(C_3)\cup E(C_4))$، G_1 یا G_2 که



به‌ویژه لیست فوق تنها گراف‌های قابل ردیابی هستند که صحیح تطابقی‌اند.

قضیه فوق نتیجه می‌دهد به ازای $n \geq 3$، C_n، P_n و K_n صحیح تطابقی نیستند.

قضیه ۱-٤: [۹] اگر گراف G دارای تطابق کامل باشد، آن‌گاه $\mu(G,x)$ دارای ریشه‌ای در بازه $(0,1]$ است. اگر دارای ریشه‌ای در بازه $(0,1)$ نباشد، آن‌گاه G به‌صورت اجتماع مجزای تعدادی متناهی K_2 است.
قضیه فوق نتیجه می‌دهد K_2 تنها گراف همبندی است که دارای تطابق کامل است و صحیح تطابقی است.

قضیه ۱-۵: [۹] فرض کنید G گرافی با حداقل یک یال باشد و $\text{mult}(0,G)=t$. تابع $f(t)$ را به‌صورت زیر تعریف کنید:

$$f(t)=\begin{cases} t+1 & if\quad t\neq 1,\\ 3 & if\quad t=1.\end{cases}$$

در این‌صورت چندجمله‌ای تطابقی G حتما دارای ریشه‌ای در بازه $(0,\sqrt{f(t)}]$ است.
در ادامه به معرفی خانواده گراف‌هایی می‌پردازیم که چندجمله‌ای تطابقی آن‌ها دارای دقیقا پنج ریشه متمایز است و توسط قربانی شناسایی شده‌اند[۱۱].
یک *گراف* $K(k,t;l)$ گرافی است که از اضافه نمودن راس u به گراف $K_{1,k} \cup tK_1$ و متصل کردن آن به سایر رئوس با استفاده از $t+l$ یال به‌دست می‌آید، به‌طوری‌که گراف حاصل همبند بوده و u با مرکز $K_{1,k}$ مجاور نباشد. به شکل (۱) مراجعه شود. به‌وضوح $1 \leq l \leq k$. به‌علاوه مرتبه این گراف برابر $k+t+2$ و اندازه آن برابر $k+t+l$ است. چندجمله‌ای تطابقی یک گراف $K(k,t;l)$ به صورت زیر است:

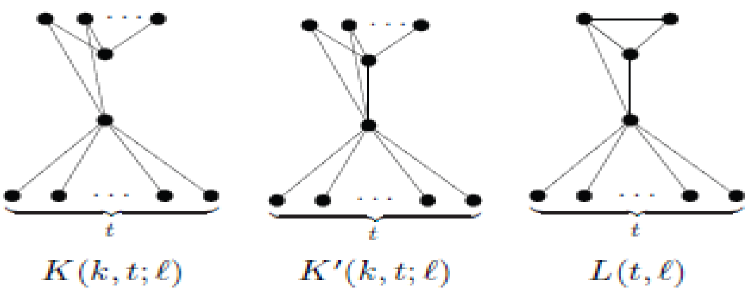
$$\mu(K(k,t;l),x) = x^{k+t-2}(x^4 - (k+t+l)x^2 + (l+t)(k-1)+t) \qquad (۱)$$

ساختار یک گراف $K'(k,t;l)$ نیز مشابه گراف $K(k,t;l)$ است با این تفاوت که راس u با مرکز گراف $K_{1,k}$ مجاور است و لذا با استفاده از $t+l+1$ یال به سایر رئوس متصل می‌شود. شکل (۱) را ببینید. به‌وضوح در یک گراف $K'(k,t;l)$، $0 \leq l \leq k$. همچنین تعداد رئوس این گراف برابر $k+t+2$ و تعداد یال‌های آن برابر $k+t+l+1$ است. چندجمله‌ای تطابقی این گراف برابر است با

$$\mu\left(K'^{(k,t;l)},x\right) = x^{k+t-2}(x^4 - (k+t+l+1)x^2 + (l+t)(k-1)+t) \qquad (۲)$$

یک گراف $L(t,l)$ گرافی است که از اضافه نمودن راس u به گراف $tK_1 \cup K_3$ و متصل کردن آن به سایر رئوس با استفاده از $t+l$ یال به‌دست می‌آید به‌طوری‌که گراف حاصل همبند باشد. به شکل (۱) مراجعه شود. به‌وضوح در یک گراف $L(t,l)$، $l \in \{1,2,3\}$. به‌علاوه مرتبه این گراف برابر $t+4$ و اندازه آن برابر $t+l+3$ است. چندجمله‌ای تطابقی یک گراف $L(t,l)$ به‌صورت زیر است:

$$\mu(L(t,l),x) = x^t(x^4 - (t+l+3)x^2 + 3t+l). \qquad (۳)$$



شکل ۱: گراف‌های $K(k,t;l)$، $K'(k,t;l)$ و $L(t,l)$

یک گراف $T(r,k)$ گرافی است که از اضافه کردن راس u به گراف $rK_{1,k}$ به‌دست می‌آید، به‌قسمی که راس u با مرکز هر یک از گراف‌های $K_{1,k}$ مجاورباشد. به شکل (۲) مراجعه شود. چندجمله‌ای تطابقی یک گراف $T(r,k)$ به صورت زیر است:

$$\mu(T(r,k),x) = x^{r(k-1)+1}(x^2-r-k)(x^2-k)^{r-1}. \qquad (۴)$$

یک گراف $S(r,s)$ نیز از اتصال راس u به گراف $rK_{1,1}$ با استفاده از s یال، $r \le s \le 2r$، به‌دست می‌آید. در این گراف u با مرکز s-r تا از گراف‌های $K_{1,1}$ مجاور است. به شکل (۲) توجه شود. چندجمله‌ای تطابقی یک گراف $S(r,s)$ برابر است با:

$$\mu(S(r,s),x) = x(x^2-s-1)(x^2-1)^{r-1} \qquad (۵)$$

قضیه ۱–۶: [۱۱] فرض کنید G یک گراف همبند بوده و $z(G)$ تعداد ریشه‌های متمایز چندجمله‌ای تطابقی آن باشد. در این‌صورت موارد زیر برقرارند:

۱. اگر $z(G)=2$، آن‌گاه $G=K_2$.

۲. اگر $z(G)=3$، آن‌گاه $G=K_3$ یا G یک گراف ستاره است.

۳. اگر $z(G)=4$، آن‌گاه G یک گراف غیر ستاره چهار راسی است.

۴. اگر $z(G)=5$، آن‌گاه G یا یکی از گراف‌های $K(k,t;l)$، $K'(k,t;l)$، $L(t,l)$، $T(r,k)$ یا $S(r,s)$ است که k، t، l، r و s اعداد صحیحی هستند ویا یک گراف همبند غیر ستاره پنج راسی است.

لم ۱–۷:[۱۱] فرض کنید G یک گراف همبند باشد. در این‌صورت موارد زیر برقرارند:

۱. اگر $R(G)=\{0,(\pm\alpha)^r,(\pm\beta)\}$، $0<\alpha<\beta$ و $r \ge 2$، آن‌گاه $G=S(r+1,\beta^2-1)$.

۲. اگر $R(G)=\{0^t,(\pm\alpha),(\pm\beta)\}$، $0<\alpha<\beta$، $t \ge 2$، آن‌گاه G یکی از گراف‌های $K(k,t';l)$، $K'(k,t';l)$ یا $L(t,l)$ است که k، t'، l و t اعداد صحیحی هستند.

۳. اگر $R(G)=\{0^t,(\pm\alpha)^r,(\pm\beta)\}$، $0<\alpha<\beta$، $t \ge 2$، $r \ge 2$، آن‌گاه $G=T(r',k)$ که r' و k اعداد صحیحی هستند و $r'>2$.

لازم به ذکر است که لم فوق صریحا در مرجع [۱۱] بیان نشده است، بلکه از اثبات قضیه ۱–۶ نتیجه می‌شود.

قضیه ۱–۸: [۱۲] فرض کنید G یک گراف همبند باشد. اگر $\mathrm{mult}(\theta,G) \ge 2$ آن‌گاه راس u از G وجود دارد به‌طوری‌که $\mathrm{mult}(\theta,G\backslash u)=\mathrm{mult}(\theta,G)+1$.

لم ۱–۹:[۱] فرض کنید G گرافی n راسی و m یالی بوده و d_i درجه راس i باشد. در این‌صورت

$$p(G,2)=\binom{m}{2}-\sum_{i=1}^{n}\binom{d_i}{2}.$$

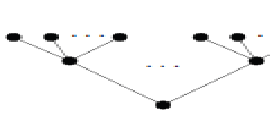
۲- گراف‌های صحیح تطابقی با مرتبه کوچک

در این بخش تمام گراف‌های همبند صحیح تطابقی از مرتبه حداکثر هفت و تمام گراف‌های همبند صحیح تطابقی با ماکزیمم درجه حداکثر سه را شناسایی می‌کنیم. به‌علاوه نشان می‌دهیم هر گراف همبند صحیح تطابقی از مرتبه هشت دارای تطابق سه یالی است.

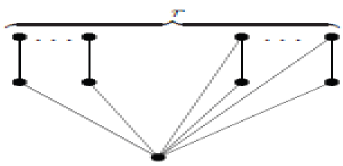
لم ۲–۱: گراف $K_{1,n}$ صحیح تطابقی است اگر و تنها اگر n مربع کامل باشد.

اثبات: داریم

$$\mu(K_{1,n},x)=x^{n+1}-nx^{n-1}=x^{n-1}(x^2-n).$$



$T(r,k)$



$S(r,s)$

شکل ۲: گراف‌های $T(r,k)$ و $S(r,s)$

لذا ریشه‌های $\mu(K_{1,n},x)$ فقط زمانی صحیح هستند که n مربع کامل باشد. ■

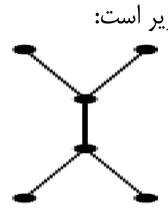
قضیه ۲-۲: فرض کنید G یک گراف همبند صحیح تطابقی با حداکثر پنج راس باشد. در این‌صورت G یکی از گراف‌های K_1، K_2، $K_{1,4}$، G_1 یا G_2 است.

اثبات: فرض کنید مرتبه G برابر n باشد. اگر $n \leq 3$، آن‌گاه به‌راحتی می‌توان دید $G = K_1$ یا $G = K_2$. قرار دهید $n = 4$. بنابر قضیه ۱-۴، G دارای تطابق کامل نیست. لذا $G = K_{1,3}$، در حالی‌که بنابر لم ۲-۱، $K_{1,3}$ صحیح تطابقی نیست.اکنون قرار دهید $n = 5$. چون G همبند است، با استفاده از قضیه ۱-۲ نتیجه می‌شود سیستم ریشه‌های G به صورت $R(G) = \{0, \pm\theta_1, \pm\theta_2\}$، $0 < \theta_1 < \theta_2$ یا $R(G) = \{0^3, \pm\theta\}$، $\theta > 0$ است.

حال اگر $R(G) = \{0, \pm\theta_1, \pm\theta_2\}$، آن‌گاه چون تمام ریشه‌های $\mu(G,x)$ ساده هستند، بر طبق قضیه ۱-۳، G یکی از گراف‌های G_1 و G_2 است.

اگر $R(G) = \{0^3, \pm\theta\}$، آن‌گاه بنابر قضیه ۱-۶ قسمت (۲)، $G = K_{1,4}$ که صحیح تطابقی است.■

قضیه ۲-۳: تنها گراف همبند از مرتبه شش که صحیح تطابقی است گراف زیر است:



اثبات: چون $\Delta \leq 5$، بنابر قضیه ۱-۱ تمام ریشه‌های صحیح $\mu(G,x)$ در بازه $[-3,3]$ قرار دارند. حال با توجه به این‌که تکرر ریشه صفر در $\mu(G,x)$ برابر تعداد رئوسی از G است که توسط یک تطابق ماکزیمم پوشانده نمی‌شود و از طرفی بنابر قضیه ۱-۴، G تطابق کامل ندارد، نتیجه می‌شود $\mathrm{mult}(0,G) \neq 0$. به‌علاوه چون مرتبه G زوج است، تکرر ریشه صفر نیز زوج است. لذا قضیه ۱-۲ نتیجه می‌دهد سیستم ریشه‌های G به یکی از دو فرم زیر است:

$R(G) = \{0^2, \pm\theta_1, \pm\theta_2\}$ ، $0 < \theta_1 < \theta_2 \leq 3$

یا

$R(G) = \{0^4, \pm\theta\}$، $0 < \theta \leq 3.$

اگر $R(G) = \{0^2, \pm\theta_1, \pm\theta_2\}$، آن‌گاه با استفاده از قضیه ۱-۵، داریم $\theta_1 = 1$. در نتیجه می‌توان دو حالت فوق را به‌صورت زیر متمایز نمود:

حالت اول: $R(G) = \{0^2, \pm1, \pm\theta\}$، $1 < \theta \leq 3$.

بنابراین

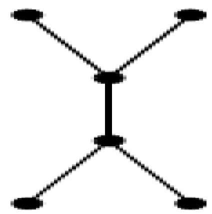
$\mu(G,x) = x^2(x^4 - (\theta^2+1)x^2 + \theta^2)$.

لذا $m = \theta^2 + 1$ و $p(G,2) = \theta^2$. از طرفی برطبق لم ۱-۷ قسمت (۲)، در این حالت G یکی از گراف‌های $K(k,t;l)$، $K'(k,t;l)$ یا $L(t,l)$ است که در آن k، t و l اعداد صحیحی هستند.

اگر G یک گراف $K(k,t;l)$ باشد، آن‌گاه با استفاده از (۱) داریم $k + t = 4$ و $m = l + 4$. حال از آن‌جایی‌که در یک گراف $K(k,t;l)$، $1 \leq l \leq k$، پس $1 \leq l \leq 4$. از این‌رو $5 \leq m \leq 8$.

از طرفی $m = \theta^2 + 1$. در نتیجه $4 \leq \theta^2 \leq 7$. لذا $\theta = 2$، $m = 5$ و $l = 1$. به‌علاوه $p(G,2) = \theta^2 = 4$.از طرفی با استفاده از (۱) می‌توان نوشت $p(G,2) = (l+t)(k-1) + t$ که نتیجه می‌دهد $k(t+1) = 5$ و این یک تناقض است.

اگر G یک گراف $K'(k,t;l)$ باشد، آن‌گاه با استفاده از (۲) می‌توان نوشت $k + t = 4$ و $m = l + 5$. از طرفی در یک گراف $K'(k,t;l)$، $0 \leq k \leq l$، پس $0 \leq l \leq 4$ و $5 \leq m \leq 9$. حال از آن جایی‌که $m = \theta^2 + 1$ نتیجه می‌شود $4 \leq \theta^2 \leq 8$. بنابراین $\theta = 2$، $m = 5$ و $l = 0$. به‌علاوه $p(G,2) = \theta^2 = 4$ و با استفاده از (۲) داریم: $p(G,2) = (l+t)(k-1) + t$. در نتیجه $tk = 4$. پس $k = t = 2$. بنابراین $G = K'(2,2;0)$ و $\mu(G,x) = x^2(x^2-1)(x^2-4)$.

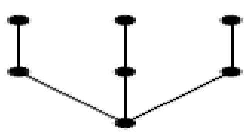


شکل ۳: گراف $K'(2,2;0)$

شکل (۳) را ببینید. اگر G یک گراف $L(t,l)$ باشد، آن‌گاه با استفاده از (۳) داریم $t=2$ و $m=l+5$. به‌علاوه $m=\theta^2+1$. بنابراین $l=\theta^2-4$ ولی از آن‌جایی‌که $l\in\{1,2,3\}$ و $\theta\in\{2,3\}$ تساوی فوق هیچ‌گاه رخ نمی‌دهد.

حالت دوم: $R(G)=\{0^4,\pm\theta\}$، $0<\theta\leq 3$. در این حالت بنابر قضیه ۱-۶ قسمت (۲)، $G=K_{1,5}$ در حالی‌که بر طبق لم ۲-۱، $K_{1,5}$ صحیح تطابقی نیست.■

قضیه ۲-٤: فرض کنید G یک گراف همبند صحیح تطابقی از مرتبه هفت باشد. در این صورت $G=K_7\backslash(E(C_3)\cup E(C_4))$ یا G گراف زیر است:



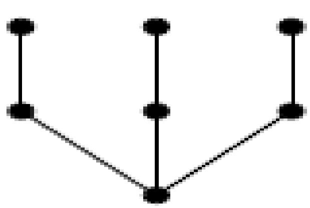
اثبات: فرض کنید اندازه G برابر m باشد. چون $\Delta\leq 6$، بنابر قضیه ۱-۱، ریشه‌های صحیح $\mu(G,x)$ در بازه $[-4,4]$ قرار دارند. از طرفی با توجه به فرد بودن مرتبه G، نتیجه می‌شود، صفر یک ریشه $\mu(G,x)$ با تکرر فرد است. اکنون با استفاده از قضیه ۱-۲ می‌توان چهار حالت زیر را متمایز نمود:

حالت اول: $R(G)=\{0,(\pm\theta_1),(\pm\theta_2),(\pm\theta_3)\}$، $0<\theta_1<\theta_2<\theta_3\leq 4$. در این حالت چون تمام ریشه‌های $\mu(G,x)$ ساده هستند و G هفت راسی است با استفاده از قضیه۱-۳، داریم $G=K_7\backslash(E(C_3)\cup E(C_4))$. حال با توجه به این‌که $|E(G)|=14$، هیچ‌یک از ریشه‌های چند جمله‌ای تطابقی G برابر ۴ نیست. بنابراین $\theta_1=1$، $\theta_2=2$، $\theta_3=3$ و لذا:

$$\mu(G,x)=x(x^2-1)(x^2-4)(x^2-9).$$

حالت دوم: $R(\mathrm{G})=\{0,(\pm\theta_1)^2,(\pm\theta_2)\}$، $0<\theta_1<\theta_2\leq 4$. در این حالت بنابر لم ۱- ۷ قسمت (۱)، داریم $G=S(3,\theta_2^2-1)$. اکنون با توجه به این‌که دریک گراف $S(r,s)$، $r\leq s\leq 2r$، نتیجه می‌شود $4\leq\theta_2^2\leq 7$. بنابراین $\theta_2=2$ و $G=S(3,3)$. به شکل (۴) مراجعه شود. حال با استفاده از (۵) داریم:

$$\mu(G,x)=x(x^2-4)(x^2-1)^2.$$



شکل ٤: گراف $S(3,3)$

حالت سوم: $R(G) = \{0^3, (\pm\theta_1), (\pm\theta_2)\}$، $0 < \theta_1 < \theta_2 \leq 4$. در این حالت بنابر لم ۱–۷ قسمت (۲)، G یکی از گراف‌های $K(k,t;l)$، $K'(k,t;l)$ یا $L(t,l)$ است.

اگر G یک گراف $K(k,t;l)$ باشد، آن‌گاه با استفاده از (۱) می‌توان نوشت $k + t = 5$ ، $m = l + 5$. چون $1 \leq l \leq k$، پس $1 \leq l \leq 5$. لذا $6 \leq m \leq 10$.

از طرفی با توجه به این‌که مجموع مربعات ریشه‌های چند جمله‌ای تطابقی، برابر تعداد یال‌های گراف G است، داریم $m = \theta_1^2 + \theta_2^2$.

در نتیجه $\theta_1 = 1$ و $\theta_2 = 3$. بنابراین $m = 10$، $l = k = 5$ و $t = 0$. به‌علاوه با استفاده از (۱) می‌توان دید $p(G,2) = (l+t)(k-1) + t$. پس $p(G,2) = 20$. از طرفی می‌دانیم حاصل ضرب مربعات ریشه‌های ناصفر چندجمله‌ای تطابقی برابر تعداد تطابق‌ها با اندازه ماکزیمم است. لذا $p(G,2) = \theta_1^2\theta_2^2 = 9$ و این یک تناقض است.

اگر G یک گراف $K'(k,t;l)$ باشد، آن‌گاه با استفاده از (۲) داریم $k + t = 5$، $m = l + 6$، $l \leq k \leq 5$. به‌علاوه $p(G,2) = (l+t)(k-1) + t$. اکنون استدلالی مشابه آن‌چه در بالا انجام دادیم نتیجه می‌دهد $\theta_1 = 1$ و $\theta_2 = 3$. پس $m = \theta_1^2 + \theta_2^2 = 10$ و لذا $l = 4$.

همچنین $p(G,2) = \theta_1^2\theta_2^2 = 9$. از این رو $(l+t)(k-1) + t = 9$ که نتیجه می‌دهد $k = 1$، $t = 9$ و این یک تناقض است.

اگر G یک گراف $L(t,l)$ باشد، آن‌گاه با استفاده از (۳) داریم $t = 3$، $m = l + 6$. اکنون با توجه به این‌که $l \in \{1,2,3\}$ و $m = \theta_1^2 + \theta_2^2$ نتیجه می‌شود $\theta_1^2 + \theta_2^2 \in \{7,8,9\}$ و این متناقض با صحیح بودن θ_1 و θ_2 است.

حالت چهارم: $R(G) = \{0^5, (\pm\theta)\}$، $0 < \theta \leq 4$. در این حالت قضیه ۱– ۶ قسمت (۲)، نتیجه می‌دهد $G = K_{1,6}$ که صحیح تطابقی نیست و اثبات تمام است.■

قضیه ۲–۵: فرض کنید G یک گراف همبند صحیح تطابقی از مرتبه هشت باشد. در این‌صورت بزرگ‌ترین تطابق G، سه یالی است. به‌علاوه اندازه G برابر چهارده است.

اثبات: فرض کنیداندازه گراف G برابر m باشد. چون $\Delta \leq 7$، بنابر قضیه ۱–۱ تمام ریشه‌های صحیح $\mu(G,x)$ در بازه $[-4,4]$ قرار دارند. ابتدا نشان می‌دهیم بزرگ‌ترین تطابق G، سه یالی است. توجه کنید بنابر قضیه ۱–۴، G تطابق کامل ندارد. اکنون با برهان خلف، فرض کنید G دارای تطابق سه تایی نیست. بنابراین $\mathrm{mult}(0,G) \neq 0,2$. به‌علاوه چون مرتبه G زوج است، تکرر صفر به‌عنوان ریشه $\mu(G,x)$ زوج بوده و لذا با استفاده از قضیه ۱–۲ داریم، $R(G) =$. $\{0^6, \pm\theta\}$ یا $R(G) = \{0^4, \pm\theta_1, \pm\theta_2\}$.

اگر $R(G) = \{0^6, \pm\theta\}$، آن‌گاه قضیه ۱–۶ قسمت (۲) نتیجه می‌دهد $G = K_{1,7}$ که صحیح تطابقی نیست. اگر $R(G) = \{0^4, \pm\theta_1, \pm\theta_2\}$، آن‌گاه با استفاده از لم ۱–۷ قسمت (۲) نتیجه می‌شود G یکی از گراف‌های $K(k,t;l)$، $K'(k,t;l)$ یا $L(t,l)$ است که k، t و l اعداد صحیحی هستند. به‌علاوه چون G همبند است، $m \geq 7$. در ادامه به بررسی هر یک از این موارد می‌پردازیم.

ابتدا فرض کنید G یک گراف $K(k,t;l)$ باشد. در این‌صورت با استفاده از (۱) می‌توان دید $k + t = 6$، $m = l + 6$ و $p(G,2) = (l+t)(k-1) + t$. از طرفی $m = \theta_1^2 + \theta_2^2$ و $p(G,2) = \theta_1^2\theta_2^2$. لذا $l + 6 = \theta_1^2 + \theta_2^2$. اکنون با توجه به این‌که $l \leq k \leq 6$ نتیجه می‌شود $\theta_1 = 1$ و $\theta_2 = 3$. لذا $m = 10$، $p(G,2) = 9$ و $l = 4$.

پس $(l+t)(k-1) + t = 9$ که نتیجه می‌دهد $k(4+t) = 13$ و این یک تناقض است.

سپس فرض کنید G یک گراف $K'(k,t;l)$ باشد. در این‌صورت با استفاده از (۲) داریم $k + t = 6$، $m = l + 7$ و $p(G,2) = (l+t)(k-1) + t$.

ازآن‌جایی‌که $l \leq k \leq 6$، استدلالی مشابه قسمت قبل نتیجه می‌دهد $\theta_1 = 1$، $\theta_2 = 3$ یا $\theta_1 = 2$، $\theta_2 = 3$. در حالت نخست داریم $p(G,2) = \theta_1^2\theta_2^2 = 9$، $m = \theta_1^2 + \theta_2^2 = 10$ و $l = 3$. بنابراین $(l+t)(k-1) + t = 9$ و لذا $k(3+t) = 12$ که یک تناقض است. درحالت دوم داریم $p(G,2) = 36$، $m = 13$ و $l = 6$ که نتیجه می‌دهد $k = 6$ و $t = 0$. بنابراین $p(G,2) = (l+t)(k-1) + t = 30$ که یک تناقض است.

در نهایت فرض کنید G یک گراف $L(t,l)$ باشد. با استفاده از (۳) داریم $t = 4$، $m = l + 7$ و $p(G,2) = l + 12$. حال چون $1 \leq l \leq 3$ و $m = \theta_1^2 + \theta_2^2$ نتیجه می‌شود $\theta_1 = 1$ و $\theta_2 = 3$. بنابراین $m = 10$، $l = 3$ و $p(G,2) = 15$. از طرفی $p(G,2) = \theta_1^2\theta_2^2 = 9$ که یک تناقض است. این تناقض نشان می‌دهد G دارای تطابق سه یالی است.

در ادامه نشان می‌دهیم اندازه G برابر چهارده است. با توجه به این‌که بزرگ‌ترین تطابق G سه یالی است، داریم $\mathrm{mult}(0,G) = 2$. از طرفی قضیه ۱–۵ نتیجه می‌دهد یکی از ریشه‌های $\mu(G,x)$ برابر ۱ است. بنابراین با استفاده از قضیه ۱–۲ می‌توان دید سیستم ریشه‌های G به یکی از دو صورت زیر است:

حالت اول: $R(G) = \{0^2, (\pm 1)^2, \pm\theta\}$، $1 < \theta \leq 4$. اکنون با استفاده از لم ۱–۷ قسمت (۳)داریم $G = T(r,k)$ که r و k اعداد صحیح مثبتی هستند و $r > 2$. حال با توجه به این‌که تکرر ریشه صفر برابر دو است با استفاده از (۴) می‌توان دید $r(k-1) = 1$ که یک تناقض است.

حالت دوم: $R(G) = \{0^2, \pm 1, \pm\theta_1, \pm\,\theta_2\}$، $1 < \theta_1 < \theta_2 \leq 4$. ابتدا فرض کنید $\theta_2 = 4$. بنابراین می‌توان نوشت $R(G) = \{0^2, \pm 1, \pm\theta, \pm 4\}$، $\theta \in \{2,3\}$. داریم $m = \theta^2 + 17 \geq 21$. حال بنابر قضیه ۱–۸ راس u از G وجود دارد به‌طوری‌که $\mathrm{mult}(0, G\backslash u) = 3$.

لذا $R(G\backslash u) = \{0^3, \pm\eta_1, \pm\eta_2\}$ یا $R(G\backslash u) = \{0^3, (\pm\eta)^2\}$.ازطرفی باتوجه به این‌که $deg(u) \leq 7$، داریم $|E(G\backslash u)| \geq 14$.

اگر $R(G\backslash u) = \{0^3, \pm\eta_1, \pm\eta_2\}$، آن‌گاه $G\backslash u$ می‌تواند یک گراف همبند یا ناهمبند باشد. ابتدا فرض کنید $G\backslash u$ همبند است. اکنون بنابر لم ۱–۷ قسمت (۲)، $G\backslash u$ یکی از گراف‌های $K(k,t;l)$، $K'(k,t;l)$ یا $L(t,l)$ است. اگر $G\backslash u$ یک $K'(k,t;l)$ باشد، آن‌گاه با استفاده از (۲) واضح است که $k + t = 5$ و $|E(G\backslash u)| = l + 6$. از آن‌جایی که $l \leq k$، داریم $|E(G\backslash u)| \leq 11$ که یک تناقض است. اگر $G\backslash u$ یک $K(k,t;l)$ باشد، آن‌گاه چون $K(k,t;l)$ یک زیر گراف $K'(k,t;l)$ است، $|E(G\backslash u)| \leq 11$ که یک تناقض است. اگر $G\backslash u$ یک $L(t,l)$ باشد، آن‌گاه بنابر (۳) داریم $t = 3$ و $|E(G\backslash u)| = l + 6$. حال چون $l \leq 3$ نتیجه می‌شود $|E(G\backslash u)| \leq 9$ که یک تناقض است. سپس فرض کنید $G\backslash u$ ناهمبند است.چون $|E(G\backslash u)| \geq 14$، $G\backslash u$ بایستی اجتماع K_1 و یک گراف همبند شش راسی مانند H باشد. درغیراین‌صورت $|E(G\backslash u)| < 14$.

با توجه به سیستم ریشه‌های $G\backslash u$ داریم $R(H) = \{0^2, \pm\eta_1, \pm\eta_2\}$ و لذا H یک گراف $K(k',t';l')$، $K'(k',t';l')$ یا $L(t',l')$ است که در آن k'، t' و l' اعداد صحیحی هستند. در هریک از این موارد با استدلالی مشابه استدلال فوق به‌راحتی می‌توان نشان داد $|E(H)| < 14$ و لذا $|E(G\backslash u)| < 14$که یک تناقض است.

اگر $R(G\backslash u) = \{0^3, (\pm\eta)^2\}$، آن‌گاه بنابر قضیه ۱–۲، $G\backslash u$ همبند نیست. اکنون مشابه قسمت قبل نتیجه می‌شود $G\backslash u$ بایستی مولفه همبندی شش راسی داشته باشد. در حالی‌که با توجه به سیستم ریشه‌های $G\backslash u$ چنین چیزی ممکن نیست.

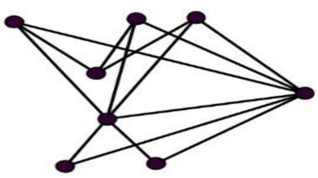
از این‌رو نتیجه می‌شود بزرگترین ریشه چندجمله‌ای تطابقی G نمی‌تواند برابر ۴ باشد. لذا سیستم ریشه‌های G به‌صورت $R(G) = \{0^2, \pm 1, \pm 2, \pm 3\}$ است. بنابراین داریم،

$$\mu(G,x) = x^8 - 14x^6 + 49x^4 - 36x^2.$$

پس $m = 14$، $p(G,2) = 49$ و $p(G,3) = 36$

و اثبات تمام است.■

تذکر ۲-٦: عکس قضیه فوق لزوماً برقرار نیست**.** برای این منظور گراف هشت راسی زیر را در نظر بگیرید. این گراف دارای تطابق سه یالی بوده و اندازه آن برابر چهارده است ولی صحیح تطابقی نیست.

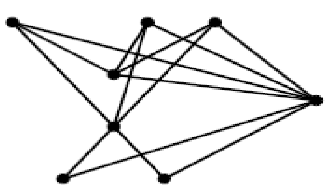


توجه کنید در قضیه ۲-۵، نشان دادیم اگر یک گراف هشت راسی، صحیح تطابقی باشد، آن‌گاه تعداد تطابق‌های دو یالی آن برابر ۴۹ است. در حالی‌که در گراف فوق با استفاده از لم ۱-۹ داریم:

$$p(G,2) = \binom{14}{2} - \sum_{i=1}^{8}\binom{d_i}{2} = 47.$$

در این‌جا $d_1, \dots, d_8$ دنباله درجات رئوس گراف هستند. این گراف دارای دو راس از درجه ۶، چهار راس از درجه ۳ و دو راس از درجه ۲ است.

مثال ۲-۷: [۱۳] گراف زیر هشت راسی است و صحیح تطابقی است.



داریم

$$\mu(G,x) = x^8 - 14x^6 + 49x^4 - 36x^2 = x^2(x^2-1)(x^2-4)(x^2-9).$$

قضیه ۲-۸: فرض کنید G گرافی همبند با حداقل سه راس باشد و $\Delta(G) \leq 3$. اگر G صحیح تطابقی باشد، آن‌گاه G یکی ازگراف‌های G_1، G_2، $K'(2,2;0)$ یا $T(3,1)$ است.

اثبات: فرض کنید مرتبه G برابر n باشد. اگر $\Delta = 3$، آن‌گاه بنابر قضیه ۱-۱ ریشه‌های صحیح $\mu(G,x)$ در بازه $[-2, 2]$ قرار دارند و لذا $z(G) \leq 5$. به‌علاوه چون $n \geq 4$، با استفاده از قضیه ۱-۶ نتیجه می‌شود $z(G) \geq 3$. لذا می‌توان سه حالت زیر را در نظر گرفت:

الف) اگر $z(G) = 3$، آن‌گاه بنابر قضیه ۱-۶ قسمت (۲)، $G = K_{1,3}$ که بنابر لم ۲-۱ صحیح تطابقی نیست.

ب) اگر $z(G) = 4$، آن‌گاه بنابر قضیه ۱-۶ قسمت (۳)، G یک گراف چهار راسی و غیر ستاره است. از طرفی بر طبق قضیه ۲-۲، هیچ گراف چهار راسی، صحیح تطابقی نیست.

ج) اگر $z(G) = 5$، آن‌گاه چون G همبند است با استفاده از قضیه ۱-۲ نتیجه می‌شود $R(G) = \{0^t, (\pm1)^\alpha, (\pm2)\}$. پس

$$\mu(G,x) = x^t(x^2-1)^\alpha(x^2-4).$$

اکنون قضیه ۱-۶ قسمت (۴) نتیجه می‌دهد G یا یک گراف پنج راسی غیر ستاره است و یا یکی از گراف‌های $K(k,t;l)$، $K'(k,t;l)$، $L(t,l)$، $T(r,k)$ یا $S(r,s)$ است.

ابتدا قراردهید $n = 5$. در این صورت بنابر قضیه ۲-۲، $G = G_1$ یا $G = G_2$.

سپس فرض کنید $n \geq 6$. اگر G یک گراف $K(k,t;l)$ یا $K'(k,t;l)$ باشد، آن‌گاه داریم $n = k+t+2$. اکنون با توجه به ساختار این گراف‌هاوازآن‌جایی‌که $\Delta = 3$، نتیجه می‌شود $k,t \leq 3$ و $k+t \leq 5$. شکل (۱) را ملاحظه کنید. لذااین گراف‌ها شش و یا هفت راسی هستند.از طرفی بنابر قضیه ۲-۴ هیچ گراف هفت راسی از نوع گراف‌های $K(k,t;l)$ یا $K'(k,t;l)$ صحیح تطابقی نیست. حال با استفاده از قضیه ۲-۳ نتیجه می‌شود $G = K'(2,2;0)$.

اگر G یک گراف $L(t,l)$ باشد، آن‌گاه داریم $n = t + 4$. حال با توجه به ساختار این گراف ملاحظه می‌شود $t = 2$ و لذا $n = 6$. شکل (۱) را ملاحظه کنید. از طرفی طبق قضیه ۲-۳، یک گراف $L(t,l)$ از مرتبه شش نمی‌تواند صحیح تطابقی باشد.

اگر G یک گراف $T(r,k)$ باشد، آن‌گاه داریم:

$$\mu(T(r,k),x) = x^{r(k-1)+1}(x^2 - r - k)(x^2 - k)^{r-1}.$$

اکنون با مقایسه چندجمله‌ای فوق با $\mu(G,x)$ نتیجه می‌شود $k = 1$ و $r + k = 4$. بنابراین $r = 3$ و $G = T(3,1)$.

اگر G یک گراف $S(r,s)$ باشد، آن‌گاه داریم:

$$\mu(S(r,s),x) = x(x^2 - s - 1)(x^2 - 1)^{r-1},$$

لذا $n = 2r + 1$ و $r \leq s$. چون $n \geq 6$، $r \geq 3$. حال با مقایسه چندجمله‌ای فوق با $\mu(G,x)$ نتیجه می‌شود $s + 1 = 4$. لذا $s = r = 3$ و $G = S(3,3)$. از طرفی به راحتی می‌توان دید $T(3,1) \cong S(3,3)$.

در نهایت اگر $\Delta = 2$، آن‌گاه G یک دور یا یک مسیر است و بنابر قضیه ۱-۳ صحیح تطابقی نیست. ■

فهرست مراجع

[1] C.D. Godsil, Algebraic Combinatorics, Chapman and Hall, Inc., 1993.

[2] C.D. Godsil, Algebraic matching theory, Electron. J. Combin., 2 (1995), 1-14.

[3] C.D. Godsil and I. Gutman, On the theory of the matching polynomial, J. Graph Theory, 5(2) (1981), 137-144.

[4] I. Gutman, The matching polynomial, MATCH Commun. Math. Comput. Chem., 6 (1979), 75-91.

[5] I. Gutman and F. Harary, Generalizations of the matching polynomial, Utilitas Math., 24 (1983), 97-106.

[12] C.Y. Ku and W. Chen, An analogue of the Gallai-Edmond structure theorem for non-zero roots of the matching polynomial, J. Combin. Theory Ser. B, 100 (2010), 119-127.

[13] S. Khalashi Ghezelahmad, On matching integral graphs, Mathematical Sciences, 13 (2019), 387–394.

[6] I. Gutman and S. Wagnerb, The matching energy of a graph, Discrete Appl. Math., 160 (2012), 2177-2187.

[7] F. Harary and A.J. Schwenk, Which graphs have integral spectra? Graphs and Combinatorics., Lecture Notes in Math., Springer-Verlag, Berlin, 406 (1974), 45-51.

[8] K.T. Balinʹska, D. Cvetkovicʹ, Z. Radosavljevic', S.K. Simic' and D. Stevanovicʹ, A survey on integral graphs, Univ. Beograd. Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat., 13 (2002), 42-65.

[9] S. Akbari, P. Csikvári, A. Ghafari, S. Khalashi Ghezelahmad and M. Nahvi, Graphs with integer matching polynomial zeros, Discrete Appl. Math., 224 (2017), 1-8.

[10] O.J. Heilmann and E.H. Lieb, Theory of monomer-dimer systems, Commun. Math. Physics, 25 (1972), 190-232.

[11] E. Ghorbani, Graphs with few matching roots, Graphs Combin. 29 (2013), 1377-1381.