دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال ششم، شماره بیست و ششم، مهر و آبان ۱۳۹۹
شماره شاپا: ۲۵۸۸X-۵۸۸

پژوهش‌های نوین در ریاضی

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

مدل‌سازی ابر گروه‌های شبه مرتبه روی اتوماتای فازی عمومی

محمد حری*

استادیار، گروه ریاضی، دانشکده شهیدچمران، دانشگاه فنی و حرفه ای استان کرمان، کرمان، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۸/۰۲/۱۴ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۸/۱۰/۰۳

چکیده

در این مقاله، ابتدا یک قسمت ساده شده از یک اتوماتای فازی عمومی با ثابت c تعریف شده و سپس یک زیر قسمت از یک قسمت ساده شده از یک اتوماتای فازی عمومی با ثابت c تعریف می‌شود و همبندی و همبندی قوی آنها بررسی شده و در نهایت، مدلی از یک ابرگروه شبه مرتبه روی اتوماتای فازی عمومی با ثابت c ارائه می‌شود و ارتباطات بین آنها بررسی می‌شود.

واژه‌های کلیدی: اتوماتا، رابطه هم ارزی، فضای اتصال، ابرگروه.

*. عهده‌دار مکاتبات: Email: mhori@tvu.ac.ir & mohhorry@yahoo.com

۱- مقدمه

اتوماتا تاریخچه طولانی هم در تئوری و هم درکاربرد دارد [۱و۲] و یک مثال از سیستم‌های محاسبه‌ای عمومی روی فضاهای گسسته است [۳]. در بین انواع متعارف اتوماتا (یعنی اتوماتای حالت متناهی قطعی، اتوماتای حالت متناهی غیر قطعی، اتوماتای احتمالاتی، اتوماتای حالت متناهی فازی) اتوماتای حالت متناهی قطعی بیشترین کاربردها را در زمینه‌های مختلف از جمله ریاضییات و علوم کامپیوتر داشته است [۴و۵]. در [۶] ارتباط بین نظریه اتوماتا و نظریه ابر ساختارها و همچنین کاربردهائی از این ارتباط بیان شده است و در این مقاله ارتباطی بین اتوماتای فازی عمومی و ابر گروه‌ها بیان و نتایج مهمی استخراج خواهد شد.

فرض کنید S یک مجموعه و $|\mathrm{S}|$ تعداد اعضای آن باشد و $1 \le |\mathrm{S}| < \infty$. در اینصورت نیمگروه یکه دار آزاد تولید شده توسط S با عمل کنار هم قراردادن را با علامت S^* نمایش می‌دهیم و هر عضو S^* را یک رشته می‌نامیم.

عضو همانی S^* را با Λ نمایش می‌دهیم و رشته تهی نامیده می‌شود و داریم:

$$\mathrm{S}^* = \{a_1 a_2 \ldots a_n : a_i \in S\}$$

بنابراین یک رشته متعلق به S^*، دنباله‌ای به صورت $\mathrm{a}_1\mathrm{a}_2\ldots\mathrm{a}_\mathrm{n}$ می‌باشد که در آن $\mathrm{a}_\mathrm{i} \in S$.

اگر $\bullet$ عمل کنار هم قراردادن باشد، $\mathrm{a}_1\mathrm{a}_2\ldots\mathrm{a}_\mathrm{n}$ و $\mathrm{b}_1\mathrm{b}_2\ldots\mathrm{b}_\mathrm{m}$ دو عضو از S^* باشند، داریم:

$$(\mathrm{a}_1\mathrm{a}_2\ldots\mathrm{a}_\mathrm{n}) \bullet (b_1 b_2 .. b_m) = \mathrm{a}_1\mathrm{a}_2\ldots\mathrm{a}_\mathrm{n} b_1 b_2 \ldots b_m$$

S^* شامل Λ نیز هست. اگر بخواهیم Λ در آن نباشد، از علامت S^+ استفاده می‌شود. پس $\mathrm{S}^+ = S^* \setminus \{\Lambda\}$.

اگر $\mathrm{x} = \mathrm{a}_1\mathrm{a}_2\ldots\mathrm{a}_\mathrm{n}$ یک رشته باشد، در این صورت x^R برابراست با

$$\mathrm{x}^\mathrm{R} = \mathrm{a}_\mathrm{n}\mathrm{a}_{\mathrm{n-1}}\ldots\mathrm{a}_2\mathrm{a}_1$$

طول رشته $x \in S^*$ را با $\ell(x)$ نمایش می‌دهیم و برابر با تعداد حروف رشته x می‌باشد. بنابراین $\ell(\Lambda) = 0$.

تعریف ۱.۱: [۷] شش تائی $\widetilde{F} = (Q, \sum, R, Z, \delta, \omega)$ را اتوماتای حالت متناهی فازی گوییم، هرگاه Q، $\sum$ و Z مجموعه‌های غیرتهی متناهی باشند، $R \subset Q$، $\delta : Q \times \sum \times Q \to [0,1]$، $\omega : Q \to Z$، اعضا Q را حالت‌ها، اعضا $\sum$ را الفبای ورودی، R را حالت آغازین اتوماتا، Z مجموعه الفبای خروجی، ω تابع غیر فازی خروجی و δ را تابع انتقال فازی گوییم ودر این نوع اتوماتا، به هر انتقال مقدار عضویتی در فاصله $[0,1]$ تعلق می‌گیرد و این مقدار عضویت را، مقدار انتقال گوییم.

تعریف ۲.۱: [۸] هشت تائی

$$\widetilde{F} = (Q, \sum, \widetilde{R}, Z, \omega, \widetilde{\delta}, F_1, F_2)$$

را اتوماتای فازی عمومی گوییم، هرگاه Q، $\sum$ و Z مجموعه‌های غیرتهی متناهی، $\widetilde{R} \subset \widetilde{P}(Q)$، $\omega : Q \to Z$، $\widetilde{\delta} : (Q \times [0,1]) \times \sum \times Q \to [0,1]$، $\sigma : \mathrm{Q} \to [0,1]$، $F_1 : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$، $F_2 : [0,1]^* \to [0,1]$، اعضا Q را حالت‌ها، اعضا $\sum$ را الفبای ورودی، $\widetilde{R}$ را مجموعه حالت‌های آغازین فازی، Z مجموعه الفبای خروجی، σ تابع غیر فازی خروجی، $\widetilde{\delta}$ را تابع انتقال تقویت شده، F_1 را تابع تعیین عضویت و F_2 را تابع رفع چند عضویتی گوییم.

تابع F_1 برای تعیین عضویت حالت‌های فعال بکار می‌رود و تابع $F_1(\mu, \delta)$ توسط دو پارامتر μ و δ بدست می‌آید که در آن μ مقدار عضویت ما قبل بلا فصل و δ مقدار انتقال است.

در این تعریف، روندی که توسط انتقال از حالت q_i به حالت q_j روی مقدار a_k اتفاق می‌افتد به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu^{t+1}(q_j) = \widetilde{\delta}((q_i, \mu^t(q_i)), a_k, q_j) = F_1(\mu^t(q_i), \delta(q_i, a_k, q_j))$$

که مقدار عضویت حالت q_j در زمان $t+1$ توسط تابع F_1 و با استفاده از مقدار عضویت q_i در زمان t و مقدار انتقال محاسبه می‌شود.

انتخاب‌های متفاوتی برای تابع $F_1(\mu,\delta)$ وجود دارد و انتخاب آن، به‌کاربرد مورد نظر بستگی دارد. به عنوان مثال $\max\{\mu,\delta\},\ \min\{\mu,\delta\},\ (\mu+\delta)/2$

فرض کنید $Q_{act}(t_i)$ مجموعه همه حالت‌های فعال در زمان $t_i\ i\ge 0,$ باشد. آنگاه $Q_{act}(t_0)=\widetilde{R}$ و برای هر $i\ge 1$، $Q_{act}(t_i)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Q_{act}(t_i)=\{(q,\mu^{t_i}(q)):\exists q'\in Q_{act}(t_{i-1}),$$
$$\exists a\in\Sigma,\delta(q',a,q)\in\Delta\}$$

که در آن Δ مجموعه همه مقادیر انتقال اتوماتای $\widetilde{F}$ است.

با توجه به تعریف ارائه شده، مشخص است که $Q_{act}(t_i)$ یک مجموعه فازی است. برای نشان دادن اینکه q متعلق به $Q_{act}(t_i)$ است باید بنویسیم:

$$q\in Domain(Q_{act}(t_i))$$

و برای سهولت در نوشتن، به صورت $q\in Q_{act}(t_i)$ نمایش می‌دهیم.

تابع رفع چند عضویتی F_2، چند عضویتی حالت‌های فعالی مانند q_j را با استفاده از الگوریتم بعد برطرف می‌کند.

الگوریتم ۳.۱: [۸] (روش رفع چند عضویتی)

اگر به طور همزمان، چندین انتقال برای حالت فعال q_j در زمان $t+1$ موجود باشد، الگوریتم فوق یک مقدار عضویت یکتا را برای آن تعیین خواهد کرد.

توسط تابع تعیین عضویت F_1، با در نظر گرفتن مقدار انتقال $\delta(q_i,a_k,q_j)$ همراه با مقدار عضویت ماقبل بلا فصل متناظر $\mu^t(q_i)$، مقدار عضویتی تولید خواهد شد که v_i نامیده می‌شود.

$$v_i=\widetilde{\delta}((q_i,\mu^t(q_i)),a_k,q_j)=$$
$$F_1(\mu^t(q_i),\delta(q_i,a_k,q_j))$$

این مقادیر عضویت، ممکن است برابر نباشند. بنابراین برای رفع مشکل فوق، از تابع F_2 استفاده می‌شود و نتیجه بدست آمده توسط F_2 به صورت مقدار عضویت حالت فعال q_j تعیین خواهد شد.

نحوه تعیین مقدار عضویت حالت فعال، ازرابطه زیر بدست می‌آید:

$$\mu^{t+1}(q_j)=\overset{n}{\underset{i=1}{F_2}}[v_i]=$$
$$\overset{n}{\underset{i=1}{F_2}}[F_1(\mu^t(q_i),\delta(q_i,a_k,q_j))]$$

که در آن n تعداد انتقال‌های همزمان در حالت فعال q_j در زمان $t+1$، $\delta(q_i,a_k,q_j)$ مقدار انتقال از حالت q_i به حالت q_j تحت الفبای ورودی a_k، $\mu^t(q_i)$ مقدار عضویت q_i در زمان t و $\mu^{t+1}(q_j)$ مقدار عضویت نهائی q_j در زمان $t+1$ است.

تعریف ۴.۱: [۹و۱۰] فرض کنید

$$\widetilde{F}=(Q,\Sigma,\widetilde{R},Z,\omega,\widetilde{\delta},F_1,F_2)$$

یک اتوماتای فازی عمومی باشد. در اینصورت

$$\widetilde{F}^*=(Q,\Sigma,\widetilde{R},Z,\omega,\widetilde{\delta}^*,F_1,F_2)$$

را اتوماتای فازی عمومی ماکزیمم- مینیمم گوییم که در آن $\widetilde{\delta}^*:Q_{act}\times\Sigma^*\times Q\to[0,1]$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\widetilde{\delta}^*((q,\mu^{t_i}(q)),\Lambda,p)=\begin{cases}1 & if\ \ q=p\\ 0 & ,otherwise\end{cases}$$
$$\widetilde{\delta}^*((q,\mu^{t_{i-1}}(q)),u_i,p)=$$
$$\widetilde{\delta}((q,\mu^{t_{i-1}}(q)),u_i,p),\quad \forall i,\quad i\ge 0$$

و برای هر $i\ge 1$، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\widetilde{\delta}^*((q,\mu^{t_{i-1}}(q)),u_iu_{i+1},p)=$$
$$\bigvee_{q'\in Q_{act}(t_i)}(\widetilde{\delta}((q,\mu^{t_{i-1}}(q)),u_i,q')\wedge$$
$$\widetilde{\delta}((q',\mu^{t_i}(q')),u_{i+1},p))$$

و برای هر رشته $\omega = u_1u_2...u_n$، به‌طور باز گشتی و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{\delta}^*((q,\mu^{t_0}(q)),u_1u_2...u_n,p) = \vee\{\tilde{\delta}((q,\mu^{t_0}(q)),u_1,p_1)\wedge \tilde{\delta}((p_1,\mu^{t_1}(p_1)),u_2,p_2)\wedge...\wedge \tilde{\delta}((p_{n-1},\mu^{t_{n-1}}(p_{n-1})),u_n,p): p_1\in Q_{act}(t_1),\ p_2\in Q_{act}(t_2),\ldots,\ p_{n-1}\in Q_{act}(t_{n-1})\}$$

که در آن $Q_{act} = \{Q_{act}(t_0),Q_{act}(t_1),Q_{act}(t_2),...\}$.

تعریف ۵.۱: [۱۱] فرض کنید H یک مجموعه ناتهی و $P^*(H)$ مجموعه تمام زیر مجموعه‌های غیر تهی از H باشد. یک ابرعمل "$\circ$" روی H تابع

$$\circ : H^2 \to P^*(H)$$

می‌باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A\circ B = \bigcup_{a\in A,b\in B} a\circ b \qquad \forall A,B \in P^*(H)$$

تعریف ۶.۱: [۱۲] گوییم $(H,\circ)$ یک نیم ابرگروه است، هرگاه ابرعمل "$\circ$" دارای خاصیت شرکت پذیری باشد. گوییم نیم ابرگروه $(H,\circ)$ یک ابرگروه است، هرگاه

$$H\circ a = a\circ H = H, \quad \forall a\in H$$

فرض کنید $(H,\circ)$ یک ابرگروه و K یک زیر مجموعه ناتهی از H باشد. گوییم $(K,\circ)$ یک زیر ابرگروه است، هرگاه

$$K\circ a = a\circ K = K, \quad \forall a\in K$$

تعریف ۷.۱: [۱۲] فرض کنید $(H,\circ)$ یک ابرگروه باشد. گوییم H یک ابرگروه شبه مرتبه است، هرگاه

$$a\in a^3 \subseteq a^2, a\circ b = a^2 \bigcup b^2 \qquad \forall (a,b)\in H^2$$

تعریف ۸.۱: [۱۲] فرض کنید $(H,\circ)$ یک ابرگروه آبلی باشد. گوییم H تحویل ناپذیر داخلی است، هرگاه برای هر دوزیر ابرگروه H_2,H_1 از H که $H = H_1\circ H_2$ داشته باشیم $H_1\bigcap H_2 \neq \phi$. گوییم H یک فضای اتصال است، هرگاه برای هر $a,b,c,d\in H$ نتیجه زیر برقرار باشد:

$$a/b\bigcap c/d \neq \phi \Rightarrow a\circ d\bigcap b\circ c\neq \phi$$

که در آن $a/b = \{x : a\in x\circ b\}$.

۲- مدل‌سازی ابر گروه‌های شبه مرتبه روی اتوماتای فازی عمومی

در این بخش، مدلی برای ساختن ابرگروه‌های شبه مرتبه روی اتوماتای فازی عمومی با ثابتc بیان می‌شود.

تعریف ۱.۲: فرض کنید

$$\tilde{F}^* = (Q,\Sigma,\tilde{R},Z,\omega,\tilde{\delta}^*,F_1,F_2)$$

یک اتوماتای فازی عمومی ماکزیمم- مینیمم باشد و $c\in[0,1]$. یک قسمت ساده شده از $\tilde{F}^*$ با ثابت c را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\tilde{F}_c^* = (Q_c,\Sigma,\eta_c)$$

به طوری که

$$\eta_c : Q_c\times\Sigma^* \to Q$$

و

$$\tilde{\delta}^*((q,\mu^t(q)),a,q') = c \Leftrightarrow \eta_c((q,\mu^t(q)),a) = q'$$

که در آن

$$Q_c = \{(q,\mu^t(q)) : \tilde{\delta}^*((q,\mu^t(q)),a,q') = c, a\in\Sigma^*\}$$

در تعریف بالا اگر $c=1$، برای تمام $(q,\mu^t(q))$ متعلق به Q_c داریم:

$$\eta_c((q,\mu^t(q)),\Lambda) = q$$

فرض کنید $A = \{(q, \mu^t(q)) : q \in Q\} \subseteq Q_c$،
مجموعه $\eta_c(A, \Sigma^*)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:
$\eta_c(A, \Sigma^*) = \{\eta_c((q, \mu^t(q)), a) :$
$(q, \mu^t(q)) \in A, a \in \Sigma^*\}$

و $\eta_c(q, \Sigma^*)$ جایگزین $\eta_c(\{q\}, \Sigma^*)$ می‌شود.

مثال ۲.۲: فرض کنید
$\tilde{F}^* = (Q, \Sigma, \tilde{R}, Z, \omega, \tilde{\delta}^*, F_1, F_2)$

یک اتوماتای فازی عمومی ماکزیمم- مینیمم باشد که در آن $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$ مجموعه حالت‌ها، $\sum\{a, b\}$ مجموعه الفبای ورودی، $\tilde{R} = \{(q_0, 1)\}$، $Z = \phi$، ω غیر قابل اجرا، $Q_{act} = (t_0) = \{q_0\}$، $F_1(\mu, \delta) = Min(\mu, \delta)$، $\delta(q_0, a, q_1) = 0.4$، $\delta(q_0, b, q_2) = 0.5$، $\delta(q_1, a, q_2) = 0.3$، $\delta(q_2, a, q_2) = 0.2$.
اگر ورودی را $x = aa\ldots a$ انتخاب کنیم، داریم:

$Q_{act}(t_1) = \{(q_1, \mu^{t_1}(q_1))\},$
$Q_{act}(t_i) = \{(q_2, \mu^{t_i}(q_2))\}, \forall i \geq 2,$
$\mu^{t_1}(q_1) = \tilde{\delta}((q_0, \mu^{t_0}(q_0)), a, q_0) =$
$F_1(\mu^{t_0}(q_0), \delta(q_0, a, q_1)) = F_1(1, 0.4) = 0.4,$
$\mu^{t_2}(q_2) = \tilde{\delta}((q_1, \mu^{t_1}(q_1)), a, q_2) =$
$F_1(\mu^{t_1}(q_1), \delta(q_1, a, q_2)) = F_1(0.4, 0.3) = 0.3,$
$\mu^{t_3}(q_2) = \tilde{\delta}((q_2, \mu^{t_2}(q_2)), a, q_2) =$
$F_1(\mu^{t_2}(q_2), \delta(q_2, a, q_2)) = F_1(0.3, 0.2) = 0.2,$
$\mu^{t_4}(q_2) = \tilde{\delta}((q_2, \mu^{t_3}(q_2)), a, q_2) =$
$F_1(\mu^{t_3}(q_2), \delta(q_2, a, q_2)) = F_1(0.2, 0.2) = 0.2,$
$\mu^{t_i}(q_2) = 0.2, \forall i \geq 5,$

پس داریم:

$\tilde{\delta}^*((q_0, \mu^{t_0}(q_0)), \Lambda, q_0) = 1 \Rightarrow$
$\eta_c((q_0, \mu^{t_0}(q_0)), \Lambda) = q_0, c = 1 \Rightarrow$
$(q_0, \mu^{t_0}(q_0)) \in Q_c, c = 1,$
$\tilde{\delta}^*((q_0, \mu^{t_0}(q_0)), a, q_1) = 0.4 \Rightarrow$
$\eta_c((q_0, \mu^{t_0}(q_0)), a) = q_1, c = 0.4 \Rightarrow$
$(q_0, \mu^{t_0}(q_0)) \in Q_c, c = 0.4,$
$\tilde{\delta}^*((q_0, \mu^{t_0}(q_0)), aa, q_2) = 0.4 \wedge 0.3 = 0.3 \Rightarrow$
$\eta_c((q_0, \mu^{t_0}(q_0)), aa) = q_2, c = 0.3 \Rightarrow$
$(q_0, \mu^{t_0}(q_0)) \in Q_c, c = 0.3,$
$\tilde{\delta}^*((q_0, \mu^{t_0}(q_0)), aaa, q_2) =$
$0.4 \wedge 0.3 \wedge 0.2 = 0.2 \Rightarrow$
$\eta_c((q_0, \mu^{t_0}(q_0)), aaa) = q_2, c = 0.2 \Rightarrow$
$(q_0, \mu^{t_0}(q_0)) \in Q_c, c = 0.2,$
$\tilde{\delta}^*((q_0, \mu^{t_0}(q_0)), a^n, q_2) =$
$0.2, \forall n \geq 4 \Rightarrow$
$\eta_c((q_0, \mu^{t_0}(q_0)), a^n) = q_2, c = 0.2 \Rightarrow$
$(q_0, \mu^{t_0}(q_0)) \in Q_c, c = 0.2,$
$\tilde{\delta}^*((q_1, \mu^{t_1}(q_1)), a, q_2) = 0.3 \Rightarrow$
$\eta_c((q_1, \mu^{t_1}(q_1)), a) = q_2, c = 0.3 \Rightarrow$
$(q_1, \mu^{t_1}(q_1)) \in Q_c, c = 0.3$

تعریف۳.۲: فرض کنید
$\tilde{F}^* = (Q, \Sigma, \tilde{R}, Z, \omega, \tilde{\delta}^*, F_1, F_2)$

یک اتوماتای فازی عمومی ماکزیمم- مینیمم، $c \in [0,1]$ و $\tilde{F}_c^* = (Q_c, \Sigma, \eta_c)$ یک قسمت ساده شده از $\tilde{F}^*$ با ثابت c باشد. یک زیر قسمت از قسمت ساده شده $\tilde{F}_c^*$، یک قسمت ساده شده به صورت (A, Σ, η_c') می‌باشد به طوری که $A \subseteq Q_c$، η_c' تحدید از η_c روی $A \times \Sigma^*$ و $\eta_c(A, \Sigma^*) \subseteq A'$ که در آن
$A' = \{q \in Q : (q, \mu^t(q)) \in A\}$

مثال ۴.۲: در مثال ۲.۲، داریم:
$Q_{0.3} = \{(q_0, \mu^{t_0}(q_0)), (q_1, \mu^{t_1}(q_1)), \ldots\}$

اگر فرض کنیم
$A = \{(q_1, \mu^{t_1}(q_1))\}$

نتیجه می‌شود:

$A' = \{q_1\},$
$\eta_{0.3}((q_1, \mu^{t_1}(q_1)), a) = q_2,$
$\eta_{0.3}((q_1, \mu^{t_1}(q_1)), a) \not\subset A'$

بنابراین (A,Σ,η_c') یک زیر قسمت از قسمت ساده شده $\tilde{F}_c^{\,*}$ نیست.

تعریف ۵.۲: فرض کنید
$$\tilde{F}^* = (Q,\Sigma,\tilde{R},Z,\omega,\tilde{\delta}^*,F_1,F_2)$$
یک اتوماتای فازی عمومی ماکزیمم- مینیمم، $c\in[0,1]$ و $\tilde{F}_c^{\,*} = (Q_c,\Sigma,\eta_c)$ یک قسمت ساده شده از $\tilde{F}^*$ با ثابت c باشد. گوییم $\tilde{F}_c^{\,*}$ همبند است هرگاه برای هر زیر قسمت (A,Σ,η_c') از قسمت ساده شده $\tilde{F}_c^{\,*} = (Q_c,\Sigma,\eta_c)$ داشته باشیم:
$$\eta_c(Q_c - A,\Sigma^*)\bigcap A' \neq \phi$$

گوییم $\tilde{F}_c^{\,*}$ همبند قوی است هرگاه برای هر $p\in Q_c'$ و $(q,\mu^t(q))\in Q_c$ وجود داشته باشد $a\in\Sigma^*$ به طوری که $\eta_c((q,\mu^t(q)),a)=p$.

گوییم $\tilde{F}_c^{\,*}$ متقارن است هرگاه برای هر $a\in\Sigma^*$ و $(q,\mu^t(q))\in Q_c$ و $(p,\mu^t(p))\in Q_c$ شرط زیر برقرار باشد:
$$\eta_c((q,\mu^t(q)),a)=p$$
$$\Leftrightarrow \eta_c((p,\mu^t(p)),a)=q$$

گوییم $\tilde{F}_c^{\,*}$ متعدی است هرگاه برای هر $a,b\in\Sigma^*$ و $(s,\mu^t(s))\in Q_c$ و $(q,\mu^t(q))\in Q_c$ و $(p,\mu^t(p))\in Q_c$ شرط زیر برقرار باشد:
$$\eta_c((q,\mu^t(q)),a)=p,$$
$$\eta_c((s,\mu^t(s)),b)=q$$
$$\Leftrightarrow \eta_c((s,\mu^t(s)),ab)=p$$

گوییم $\tilde{F}_c^{\,*}$ هموار است هرگاه برای هر $(q,\mu^t(q))\in Q_c$ و $(s,\mu^t(s))\in Q_c$ شرط زیر برقرار باشد:
$$\bigcup_{s\in\eta_c(q,\Sigma^*)}\eta_c(s,\Sigma^*)\subseteq\eta_c(q,\Sigma^*)$$

قضیه ۶.۲: فرض کنید
$$\tilde{F}^* = (Q,\Sigma,\tilde{R},Z,\omega,\tilde{\delta}^*,F_1,F_2)$$
یک اتوماتای فازی عمومی ماکزیمم- مینیمم و $\tilde{F}_c^{\,*} = (Q_c,\Sigma,\eta_c)$ یک قسمت ساده شده هموار از $\tilde{F}^*$ با ثابت c باشد. آنگاه $(Q_c',\circ)$ یک ابرگروه شبه مرتبه است که عمل آن به صورت زیر تعریف شده است:
$$q\circ p=\eta_c(q,\Sigma^*)\bigcup\eta_c(p,\Sigma^*)\bigcup\{p,q\}$$

که در آن $Q_c'=\{q\in Q:(q,\mu^t(q))\in Q_c\}$.

اثبات: چون $\{q,p\}\subseteq q\circ p$، بنابراین $q\circ p\neq\phi$. حال چون $q\circ q=\eta_c(q,\Sigma^*)\bigcup\eta_c(q,\Sigma^*)\bigcup\{q\}$ پس $q\circ q=q^2=\eta_c(q,\Sigma^*)\bigcup\{q\}$. بنابراین $q\circ p=q^2\cup p^2$. همچنین داریم:
$$q^3=q\circ q^2=$$
$$q\circ(\eta_c(q,\Sigma^*)\bigcup\{q\})=\bigcup_{s\in\eta_c(q,\Sigma^*)\bigcup\{q\}} q\circ s$$
$$=(\eta_c(q,\Sigma^*)\bigcup\{q\})\cup\bigcup_{s\in\eta_c(q,\Sigma^*)}\eta_c(s,\Sigma^*)$$
$$\subseteq(\eta_c(q,\Sigma^*)\bigcup\{q\})\cup(\eta_c(q,\Sigma^*))$$
$$=\eta_c(q,\Sigma^*)\bigcup\{q\}=q^2$$

قضیه ۷.۲: فرض کنید
$$\tilde{F}^* = (Q,\Sigma,\tilde{R},Z,\omega,\tilde{\delta}^*,F_1,F_2)$$
یک اتوماتای فازی عمومی ماکزیمم- مینیمم و $\tilde{F}_c^{\,*} = (Q_c,\Sigma,\eta_c)$ یک قسمت ساده شده از $\tilde{F}^*$ با ثابت c باشد. آنگاه $\tilde{F}_c^{\,*} = (Q_c,\Sigma,\eta_c)$ همبند است اگر و فقط اگر $(Q_c',\circ)$ تحویل ناپذیر داخلی باشد.

اثبات: فرض کنید $\tilde{F}_c^{\,*} = (Q_c,\Sigma,\eta_c)$ همبند، A' و B' زیر ابرگروه هایی از $(Q_c',\circ)$ باشند به طوری که $Q_c'=A'\circ B'$ و $A'\bigcap B'=\phi$.

برای هر $(q_1,\mu^t(q_1))\in A$ و $a\in\Sigma^*$، داریم:
$$\eta_c((q_1,\mu^t(q_1)),a)\in$$
$$\eta_c(q_1,\Sigma^*)\bigcup\{q_1\}=q_1\circ q_1\subseteq A'$$

بنابراین (A,Σ,η_c') یک زیر قسمت از قسمت ساده شده $\tilde{F}_c^{\,*}$ می‌باشد به طوری که η_c' تحدید از η_c روی

$A\times\Sigma^*$ است. حال چون $\widetilde{F}_c^{\,*}$ همبند است، درنتیجه $\eta_c(Q_c - A,\Sigma^*)\bigcap A' \neq \phi$.
پس $s_2 \in A'$ و $(s_1,\mu^t(s_1)) \in Q_c - A$ و $a\in\Sigma^*$ وجود دارند به طوری که

$$\eta_c((s_1,\mu^t(s_1)),a) = s_2 \in \eta_c(s_1,\Sigma^*) = s_1\circ s_1$$

چون $Q'_c = A'\circ B'$، نتیجه می‌شود که $u\in A'$ و $v \in B'$ وجود دارند به طوری که

$$s_1 \in u\circ v = \eta_c(u,\Sigma^*)\bigcup \eta_c(v,\Sigma^*)\bigcup\{u,v\}$$

داریم $\eta_c(u,\Sigma^*)\bigcup\{u\} = u\circ u \subseteq A'$ و $\eta_c(v,\Sigma^*)\bigcup\{v\} = v\circ v\subseteq B'$ و $s_1 \in Q'_c - A'$.
بنابراین $s_1 \in v\circ v$. پس داریم:

$$s_2 \in \eta_c(s_1,\Sigma^*)\bigcup\{s_1\} = s_1\circ s_1 \subseteq (v\circ v)\circ(v\circ v) = v^3\circ v \subseteq v^2\circ v = v^3 \subseteq v^2 \subset B'$$

بنابراین $s_2\in A'\bigcap B'$ که تناقض با $A'\bigcap B' = \phi$ دارد. بنابراین $(Q'_c,\circ)$ تحویل ناپذیر داخلی می‌باشد.
برعکس، فرض کنیم $(Q'_c,\circ)$ تحویل ناپذیر داخلی و $\widetilde{F}_c^{\,*} = (Q_c,\Sigma,\eta_c)$ نا همبند باشد. در نتیجه زیر قسمت $(A,\sum,\eta'_c)$ از قسمت ساده شده $\widetilde{F}_c^{\,*}$ وجود دارد به‌طوری که $\eta_c(Q_c - A,\Sigma^*)\bigcap A' = \phi$ و η'_c تحدید از η_c روی $A\times\Sigma^*$ است. بنابراین

$$\eta_c(Q_c - A,\Sigma^*) \subseteq Q'_c - A'$$

حال نشان می‌دهیم $(Q'_c - A',\circ)$ یک زیر ابرگروه از $(Q'_c,\circ)$ است. اگر $q\in Q'_c - A'$ را انتخاب کنیم داریم:

$$q\circ(Q'_c - A') = \bigcup_{p\in Q'_c - A'} q\circ p = \bigcup_{p\in Q'_c-A'}(\eta_c(q,\Sigma^*)\bigcup\eta_c(p,\Sigma^*)\bigcup\{p,q\}) = \eta_c(Q'_c - A',\Sigma^*)\subseteq Q'_c - A'$$

همچنین برای هر $q\in Q'_c - A'$، داریم:

$$q\in\eta_c(q,\Sigma^*)\bigcup\{q\} = q\circ q\subseteq q\circ(Q'_c - A')$$

بنابراین $q\circ(Q'_c - A') = Q'_c - A'$.
پس $(Q'_c - A',\circ)$ یک زیر ابرگروه از $(Q'_c,\circ)$ است.
حال چون $(A,\sum,\eta'_c)$ یک زیر قسمت از قسمت ساده شده $\widetilde{F}_c^{\,*}$ می‌باشد، در نتیجه $\eta_c(A,\Sigma^*)\subseteq A'$.
پس به‌طور مشابه ثابت می شود که $(A',\circ)$ هم یک زیر ابرگروه از $(Q'_c,\circ)$ می‌باشد.
علاوه براین، داریم $(Q'_c - A')\circ A' \subseteq Q'_c$.
از طرف دیگر، اگر $q\in Q'_c - A'$ عضو دلخواه s را از A' انتخاب می‌کنیم و اگر $q\in A'$، عضو دلخواه s را از $Q'_c - A'$ انتخاب می‌کنیم و داریم:

$$q\in\eta_c(q,\Sigma^*)\bigcup\eta_c(s,\Sigma^*)\bigcup\{s,q\} = q\circ s = s\circ q\subseteq(Q'_c - A')\circ A'$$

پس $Q'_c = (Q'_c - A')\circ A'$ و $(Q'_c - A')\bigcap A' = \phi$ که تناقض با تحویل ناپذیر داخلی بودن $(Q'_c,\circ)$ دارد.

قضیه ۸.۲: فرض کنید

$$\widetilde{F}^* = (Q,\sum,\widetilde{R},Z,\omega,\widetilde{\delta}^*,F_1,F_2)$$

یک اتوماتای فازی عمومی ماکزیمم- مینیمم و $\widetilde{F}_c^{\,*} = (Q_c,\sum,\eta_c)$ یک قسمت ساده شده از $\widetilde{F}^*$ با ثابت c باشد. آنگاه $\widetilde{F}_c^{\,*}$ همبند قوی است اگر و فقط اگر $(Q'_c,\circ)$ برای هر $q\in Q'_c$ در شرط $q\circ q = Q'_c$ صدق کند.

اثبات: فرض کنیم $\widetilde{F}_c^{\,*} = (Q_c,\sum,\eta_c)$ همبند قوی باشد و $q\in Q'_c$. حال داریم:

$$q\circ q = \eta_c(q,\Sigma^*)\bigcup\{q\}\subseteq Q'_c$$

چون $\widetilde{F}_c^{\,*}$ همبند قوی است، در نتیجه برای هر $p\in Q'_c$ و $(q,\mu^t(q))\in Q_c$ وجود دارد $a\in\Sigma^*$ به طوری که $\eta_c((q,\mu^t(q)),a) = p$. پس داریم:

$p=\eta_c((q,\mu^t(q)),a)\in$
$\eta_c(q,\Sigma^*)\bigcup\{q\}=q\circ q$

بنابراین $Q'_c\subseteq q\circ q$. پس $Q'_c=q\circ q$.

برعکس، فرض کنیم $(Q'_c,\circ)$ برای هر $q\in Q'_c$ در شرط $q\circ q=Q'_c$ صدق کند.

چون $q\circ q=\eta_c(q,\Sigma^*)\bigcup\{q\}$، پس
$\eta_c(q,\Sigma^*)\bigcup\{q\}=Q'_c$

بنابراین برای هر $(q,\mu^t(q))\in Q_c$ و $p\in Q'_c$ وجود دارد $a\in\Sigma^*$ به طوری که

$\eta_c((q,\mu^t(q)),a)=p$

پس $\widetilde{F}_c^{\,*}$ همبند قوی است.

قضیه ۹.۲: فرض کنید
$\widetilde{F}^*=(Q,\sum,\widetilde{R},Z,\omega,\widetilde{\delta}^*,F_1,F_2)$

یک اتوماتای فازی عمومی ماکزیمم- مینیمم و $\widetilde{F}_c^{\,*}=(Q_c,\sum,\eta_c)$ یک قسمت ساده شده متقارن و متعدی از $\widetilde{F}^*$ با ثابت c باشد. رابطه هم ارزی زیر را روی Q'_c در نظر بگیرید:

$pRq\Leftrightarrow p\in\eta_c(q,\Sigma^*)\bigcup\{q\}$

آنگاه موارد زیر معادلند:

i) ابرگروه $(Q'_c,\circ)$ یک فضای اتصال است.

ii) اگر $p\in R(q)$ و وجود داشته باشد $x\in Q'_c$ به طوری که xRp و xRq آنگاه وجود دارد $y\in Q'_c$ به طوری که yRp و yRq.

اثبات. $(i\Rightarrow ii)$ طبق تعریف رابطه هم ارزی بیان شده، داریم:

$R(q)=\eta_c(q,\Sigma^*)\bigcup\{q\}=q\circ q=q^2$

چون xRp و xRq، نتیجه می‌شود $p\in R(x)$ و $q\in R(x)$. بنابراین داریم:

$q\in R(x)\bigcup R(p)=x\circ p$

و

$p\in R(x)\bigcup R(q)=x\circ q$

پس نتیجه می‌شود که $x\in p/q\bigcap q/p$.

حال چون ابرگروه $(Q'_c,\circ)$ یک فضای اتصال است، نتیجه می‌شود که $p^2\bigcap q^2\neq\phi$.

پس $R(p)\bigcap R(q)\neq\phi$. بنابراین $y\in Q'_c$ وجود دارد به طوری که yRp و yRq.

$(ii\Rightarrow i)$ فرض کنید $p,q,r,s\in Q'_c$ و $x\in p/q\bigcap r/s$. پس داریم:

$p\in x\circ q=R(x)\bigcup R(q)$

و

$r\in x\circ s=R(x)\bigcup R(s)$

حال حالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت اول) $p,r\in R(x)$.

پس طبق (ii)، وجود دارد $y\in Q'_c$ به طوری که $y\in R(p)\bigcap R(r)$. بنابراین داریم:

$(R(p)\bigcup R(s))\bigcap(R(q)\bigcup R(r))\neq\phi$

که نتیجه می‌شود $(p\circ s)\bigcap(q\circ r)\neq\phi$.

حالت دوم) $p\in R(q)$ و $r\in R(s)$.

پس $p\in R(p)\bigcap R(q)$، که نتیجه می‌شود

$(p\circ s)\bigcap(q\circ r)\neq\phi$

حالت سوم) $p\in R(x)$ و $r\in R(s)$. پس $r\in R(s)\bigcap R(r)$، که نتیجه می‌شود:

$(p\circ s)\bigcap(q\circ r)\neq\phi$

حالت چهارم) $p\in R(q)$ و $r\in R(x)$. پس $p\in R(p)\bigcap R(q)$، که نتیجه می‌شود:

$(p\circ s)\bigcap(q\circ r)\neq\phi$

بنابراین ابرگروه $(Q'_c,\circ)$ یک فضای اتصال می‌باشد.

نتیجه‌گیری

در این مقاله، مدلی برای ساختن ابرگروه‌های شبه مرتبه روی اتوماتای فازی عمومی با ثابت c بیان شدکه بتدا تعریفی از یک قسمت ساده شده از یک اتوماتای فازی عمومی با ثابت c و سپس تعریفی از یک زیر قسمت از یک قسمت ساده شده از یک اتوماتای فازی عمومی با ثابت c بیان شد و همبندی و همبندی قوی آنها بررسی شد و در نهایت یک فضای اتصال معرفی شد.

فهرست منابع

[1] M. A. Arbib. From automata theory to brain theory, Int. J. Man- Machine Stud. 7 (3), 279-295(1975)

[2] W.R. Ashby. Design for a brain, Chapman and Hall, London (1954).

[3] B. R. Gaines, L. J. Kohout. The logic of automata, Int. J. Gen. Syst., 2, 191-208(1976).

[4] D. Ashlock, A. Wittrock, T. Wen. Training finite state machine to improve PCR primer design, in: Proceedings of the 2002 Congress on Evolutionary Computation (2002).

[5] R. Maclin, J. Shavlik. Refining domain theories expressed as finite- state automata, in: L.B.G. Collins (Ed.) Proceedings of the 8th International Workshop on Machine Learning, Morgan Kaufmann, San Mateo CA (1991).

[6] G. G. Massouros. An automaton during its operation, Algebraic Hyperstructures and Apple. Proc. 5th Inter. Congress Iasi, Hadronic Press, Palm Harbor USA, 267-276 (1993).

[7] J.N. Mordeson, D.S. Malik. Fuzzy automata and languages, theory and applications, London: Chapman and Hall (2002).

[8] M. Doostfatemeh, S.C. Kremer. New directions in fuzzy automata, International Journal of Approximate Reasoning, 38, 175-214(2005).

[9] M. Horry, M.M. Zahedi. Fuzzy subautomata of an invertible general fuzzy automaton, Annals of fuzzy sets, fuzzy logic and fuzzy systems, 2, 29-47 (2013).

[10] M.M. Zahedi, M. Horry, KH. Abolpor. Bifuzzy (General) topology on max-min general fuzzy automata, Advanced in Fuzzy Mathematics, 3, 51-68 (2008).

[11] P. Corsini, Prolegomena of hypergroup theory, Aviani Editore(1993).

[12] P. Corsini, V. Leoreanu. Applications of hyperstructure theory, Kluwer Academic Publishers, Advances in Mathematics (2003).