

## الگوریتم شبه کد برای تقریب مجموعه مستقل ماکزیمال در گراف دیسک واحد

غلام حسن شیردل<sup>۱\*</sup>، مجتبی قنبری<sup>۳</sup>، مهدی جالینوسی<sup>۲</sup>

<sup>(۲)</sup> گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه قم، قم، ایران

<sup>(۳)</sup> گروه ریاضی، واحد فراهان، دانشگاه آزاد اسلامی، فراهان، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۷/۱۱/۱۶ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۸/۱۰/۲۵

### چکیده

در شبکه حسگر بی‌سیم وقتی که همه حسگرها دارای شعاع ارتباطی یکسانی باشند، از گراف دیسک واحد برای مدل‌سازی آن شبکه استفاده می‌شود. به این ترتیب دو مساله بهینه‌سازی زیر مورد تحقیق محققان واقع شده است: مجموعه مستقل ماکزیمال در شبکه و مینیمال مجموعه احاطه کننده شبکه. با توجه به NP-سخت بودن هر دو مساله فوق، الگوریتم‌های متعددی برای تقریب آنها تا کنون ارائه شده است. گراف لانه زنبوری مسطح از به هم پیوستن تعدادی شش ضلعی منتظم به دست می‌آید، به طوری که دو شش ضلعی مجاور دارای یک لبه مشترک هستند. چندین مطالعه در مورد رفتار ساختار لانه زنبوری انجام شده است. تعداد نتایج در این زمینه زیاد و همواره در حال افزایش است. در این مقاله، با استفاده از گراف لانه زنبوری و روش‌های ماتریسی، الگوریتمی برای تقریب مجموعه مستقل ماکزیمال شبکه ارائه داده‌ایم. اگر گراف کران دار باشد مساله‌های مد نظر را می‌توان در زمان چند جمله‌ای حل کرد. در پایان نیز، درستی الگوریتم و پیچیدگی آن را به دست آورده و با یک مثال عددی آن را بررسی کرده‌ایم.

واژه‌های کلیدی: شبکه بی‌سیم، مجموعه مستقل، مجموعه احاطه‌گر، الگوریتم، شبکه لانه زنبوری.

### ۱- مقدمه و پیش‌نیازها

وقتی که شعاع ارتباطی همه حسگرها یکسان باشد شبکه حسگر بی‌سیم با گراف دیسک واحد ( $UDG^1$ ) مدل‌سازی می‌شود. دو گره را در این گراف مجاور می‌نامیم اگر دیسک متناظر به آنها لااقل مماس باشند. گراف‌های دیسک واحد حالت خاصی از گراف‌های اشتراکی هستند.

در شبکه‌های ویژه بی‌سیم؛ یک مجموعه احاطه‌گر همبند ( $CDS^2$ ) به عنوان یک دکل مجازی در پیدا کردن مسیر کاربرد زیادی دارد. بیشتر الگوریتم‌های تقریب که منجر به تولید مجموعه احاطه‌گر همبند مینیمال ( $MCDS^3$ ) در شبکه‌های ویژه بی‌سیم می‌شوند از یک روش کلی دو فاز پیروی می‌کنند. به گونه‌ای که در فاز اول یک مجموعه احاطه‌گر ( $DS^4$ ) تولید می‌کنند و در فاز دوم گره‌های موجود در  $DS$  تولید شده در فاز اول را همبند می‌کنند. به طور کلی در مرحله اول از یک مجموعه مستقل ماکزیمال ( $MIS^5$ ) به عنوان مجموعه احاطه‌گر  $DS$  استفاده می‌شود. ارتباط بین اندازه  $MIS$  و  $MCDS$  نقش ویژه‌ای در تحلیل عملکرد این الگوریتم‌های دو فاز ایفا می‌کند.

**تعریف ۱-۱:** فرض کنید  $S$  مجموعه‌ای از اجسام هندسی باشد. گراف  $G = (V, E)$  را یک گراف اشتراکی نامیم اگر هر راس گراف؛ متناظر با یک جسم در  $S$  باشد و دو جسم متناظر را متقاطع گوئیم اگر و تنها اگر دو راس متناظر با دو جسم مورد نظر به وسیله یک یال به هم متصل شده باشند. در این صورت گفته می‌شود؛ گراف  $G$  مبتنی بر  $S$  است. اجسام مماس متقاطع فرض می‌شوند.

**تعریف ۱-۲:** گراف  $G$  یک دیسک گراف گفته می‌شود اگر و فقط اگر یک مجموعه از دیسک‌ها  $D = \{D_i | i = 1, 2, \dots, n\}$  وجود داشته باشد. به طوری که  $G$  گراف اشتراکی  $D$  باشد. مجموعه دیسک‌ها؛ نمایش دیسکی از  $G$  نامیده می‌شود.

**تعریف ۱-۳:** گراف  $G$  یک گراف دیسک واحد گفته

می‌شود. اگر و تنها اگر اولاً  $G$  یک دیسک گراف باشد و ثانیاً شعاع‌های مجموعه دیسک‌هایی که  $G$  از آن تشکیل شده است مساوی باشند. معمولاً شعاع مشترک ۱ است ولی اغلب فرض می‌شود  $\frac{1}{2}$  باشد. ضمناً شعاع مشترک را می‌توان از مقیاس گذاری مناسب  $D$  به دست آورد.

**تعریف ۴-۱:** فرض کنید  $G = (V, E)$  یک گراف باشد. مجموعه  $S \subseteq V$  یک مجموعه مستقل است اگر  $(u, v) \in S$  وجود نداشته باشد به طوری که  $(u, v) \in E$ . مجموعه  $S \subseteq V$  یک مجموعه راس پوششی گفته می‌شود، اگر برای هر  $(u, v) \in E$ ،  $u \in S$  یا  $v \in S$  باشد.

**تعریف ۵-۱:** فرض کنید  $G = (V, E)$  یک گراف باشد. مجموعه  $S \subseteq V$  یک مجموعه احاطه‌گر است اگر برای هر راس  $v$  داشته باشیم  $v \in S$  یا یک راس  $u \in S$  وجود داشته باشد به طوری که  $(u, v) \in E$  (هر راس یا در  $S$  باشد یا با راسی در  $S$  مجاور باشد).

**تعریف ۶-۱:** فرض کنید  $G = (V, E)$  یک گراف باشد. مجموعه  $S \subseteq V$  یک مجموعه احاطه‌گر همبند ( $CDS$ ) گفته می‌شود اگر اولاً  $S$  یک مجموعه احاطه‌گر ( $DS$ ) باشد و ثانیاً زیرگراف  $G$  که به وسیله  $S$  ساخته می‌شود؛  $(G[S])$  همبند باشند.

#### ۱.۱. تعریف مساله و کارهای گذشته

اسلام و همکارانش در سال ۲۰۰۸ در [۱] یک الگوریتم توزیع با نسبت عملکرد ثابت ۳۸ را برای  $CDS$  پیشنهاد داده‌اند. این الگوریتم؛  $MIS$  کل شبکه را پیدا نمی‌کند. روش کار به این صورت است که ابتدا یک زیر گراف همبند کوچک از شبکه می‌سازد و سپس  $MIS$  زیرگراف را پیدا کرده و نهایتاً  $MIS$  را به گره‌های دیگر وصل می‌کند. سورن‌دران و همکارانش در سال ۲۰۱۵ در [۲] برای محاسبه  $CDS$  در یک شبکه بی‌سیم از یک الگوریتم

4. Dominating set

5. Maximal independent set

1. Unit disk graph

2. Connected dominating set

3. Minimal connected dominating set

احاطه‌گر همبند (CDS) را به عنوان یک فاکتور کیفیت جدید برای الگوریتم‌های تشکیل مجموعه احاطه‌گر همبند (CDS) معرفی کردند. این دو الگوریتم ابتدا مجموعه مستقل ماکزیمال (MIS) گراف را پیدا می‌کند سپس گره‌های موجود در مجموعه مستقل ماکزیمال (MIS) را به هم متصل می‌کند تا مجموعه احاطه‌گر همبند (CDS) بدست آید. لیوون و همکارانش در سال ۲۰۰۴ در [۱۱] به دو بحث جدید سختی و تراکم در مورد گراف‌های دیسک‌واحد اشاره نمودند. سختی یک گراف تعداد مراکز دیسک در هر قطعه به پهنای یک واحد می‌باشد. اگر سختی یک گراف محدود باشد، می‌توان مسئله مورد نظر را در زمان چند جمله‌ای حل کرد. آنها این مسئله را هم به طور غیر مستقیم با معرفی یک رابطه بین گراف‌های دیسک‌واحد از سختی کران‌دار و پهنای چنین گراف‌هایی و هم به طور مستقیم، با ارائه الگوریتم‌های برنامه ریزی پویا اثبات کردند. آنها سپس به گراف‌های دیسک‌واحد از تراکم کران‌دار پرداختند. تراکم یک گراف، تعداد مراکز دیسک در هر کادر  $1 \times 1$  می‌باشد.

## ۲- تقریبی از مجموعه مستقل ماکزیمال

در سراسر این مقاله یک گراف دیسک‌واحد  $G = (V, E)$  را بصورت نمایش دیسک‌واحد شناخته شده‌ی

$$D = \{D(v_i) | i = 1, 2, \dots, n \text{ برای}$$

$$v_i = (x_i, y_i) \text{ و شعاع آنها } 1/2\}$$

در نظر می‌گیریم. از آنجا که گراف دیسک‌واحد مورد نظر کران‌دار و متناهی است فرض می‌کنیم:

$$K = [\max(y_i) - \min(y_i)] + 2, \\ i = 1, \dots, n$$

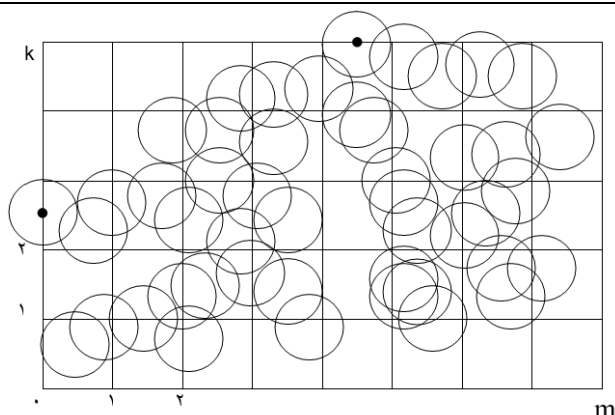
و

$$m = [\max(x_i) - \min(x_i)] + 2, \\ i = 1, \dots, n$$

بنابراین گراف دیسک‌واحد در یک کادر  $k \times m$  یا در اطراف این کادر گنجانده می‌شود، شکل ۲-۱ را نگاه کنید.

توزیعی با کمک شبکه طیفی استفاده کردند. بورجیس و همکارانش در سال ۲۰۱۳ در [۳] در گراف‌های دو قسمتی و مثلث آزاد، یک کران جدید در تعداد MIS برای یک اندازه داده شده، معرفی کردند. کامی و دوستانش در سال ۲۰۱۲ در [۴] یک الگوریتم کاملاً توزیعی خود تثبیت با یک همگرایی مطمئن برای MCDS را در شبکه‌هایی مطالعه کردند که با گراف دیسک‌واحد مدل‌سازی شده است. ویتمن و لابرادور در سال ۲۰۰۱ در [۵] یک گروه از الگوریتم‌های تشکیل توپولوژی توزیعی را بر اساس مجموعه احاطه‌گر همبند (CDS) معرفی کردند. یو و همکارانش در سال ۲۰۱۵ در [۶] یک الگوریتم همزمانی توزیعی را برای تشکیل مجموعه احاطه‌گر همبند (CDS) معرفی کردند. داس و همکارانش در سال ۲۰۱۲ در [۷] یک الگوریتم سه مرحله‌ای پیشنهاد دادند که در مرحله اول یک الگوریتم برای پیدا کردن مجموعه احاطه‌گر همبند مینیمال (MCDS) ارائه می‌شود که از مجموعه مستقل ماکزیمال (MIS) استفاده می‌شود. در مرحله دوم یک الگوریتم برای جمع‌آوری داده‌ها نوشته می‌شود و در مرحله پایانی آنها تلاش کرده‌اند مصرف توان مخابره داده در میان گره‌های حسگر را به حداقل برسانند. مهانتی و دوستانش در سال ۲۰۱۶ در [۸] یک الگوریتم تقریب حریص مبتنی بر درجه جدید پیشنهاد دادند که مجموعه شبه احاطه‌گر همبند نام دارد و از اطلاعات دو جهشی استفاده می‌شود، به طوری که اندازه مجموعه احاطه‌گر همبند (CDS) را تا حد امکان کاهش می‌دهد. رای و همکارانش در سال ۲۰۰۹ در [۹] به مطالعه یک الگوریتم تشکیل مجموعه احاطه‌گر همبند مینیمال (MCDS) موثر در انرژی پرداختند. الگوریتم دارای سه مرحله می‌باشد. در مرحله اول مجموعه احاطه‌گر (DS) را پیدا کرده و یک گره با بیشترین درجه را به عنوان یک احاطه‌گر انتخاب می‌کند سپس مجموعه احاطه‌گر را به یک درخت اشنایدر<sup>۱</sup> مرتبط می‌سازد و در پایان کار مجموعه احاطه‌گر همبند بدست آمده را هرس می‌کند تا مجموعه احاطه‌گر همبند مینیمال (MCDS) بدست آید.

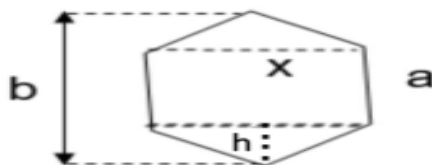
یو و همکارانش در سال ۲۰۱۰ در [۱۰] قطر مجموعه



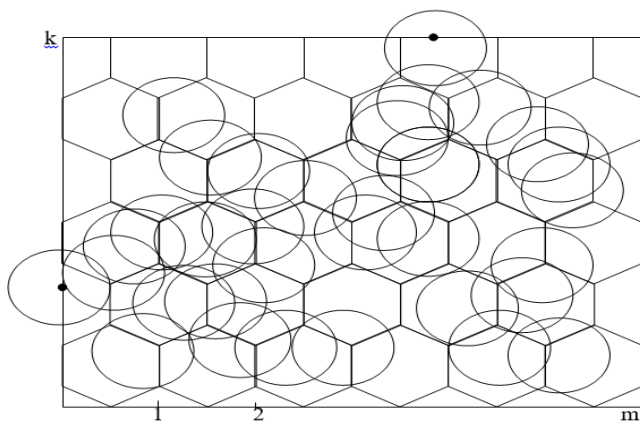
شکل ۲-۱- کادر  $k \times m$

ابعاد سایر اجزای هر شش ضلعی به صورت زیر است، شکل ۲-۲ را نگاه کنید. اگر مرکز یک دیسک  $D(V_i)$  در شبکه قرار داشته باشند آن دیسک عضوی از شبکه می‌باشد، شکل ۲-۳ را نگاه کنید.

حال مبداء مختصات را به قسمت پایین و چپ کادر  $k \times m$  انتقال داده و مختصات رئوس را در دستگاه جدید بازنویسی می‌کنیم. اکنون یک شبکه توری از شش ضلعی‌های منتظم روی این کادر  $k \times m$  پهن می‌کنیم. ابعاد هر شش ضلعی به گونه‌ای است که بر یک دایره به شعاع  $\frac{1}{2}$  محیط می‌گردد.



شکل ۲-۲- مشخصات شش ضلعی  $a = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ,  $x = 1$ ,  $b = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ,  $h = \frac{\sqrt{3}}{6}$



شکل ۲-۳- شبکه لانه زنبوری و دیسک‌ها

منظور از هر شش ضلعی با اندیس  $(i, j)$  که  $i = 2t + 1$   $(t = 0, 1, \dots, \lfloor \frac{k}{2} \rfloor)$ ؛ شش ضلعی محصور به خطوط  $f_j(x) + t\sqrt{3}$  و  $g_j(x) + t\sqrt{3}$  و  $x = j + 1$  و  $x = j$   $(j = 0, 1, \dots, m - 1)$  می باشد.

هم چنین منظور از شش ضلعی با اندیس  $(i, j)$  که  $i = 2t$   $(t = 0, 1, \dots, \lfloor \frac{k}{2} \rfloor)$ ؛ شش ضلعی محصور به خطوط  $f_j(x + \frac{1}{2}) + (t - 1)\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$  و  $g_j(x + \frac{1}{2}) + (t - 1)\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$   $(j = 0, 1, \dots, m - 1, 0 \leq x \leq m)$  و  $g_j(x + \frac{1}{2}) + (t - 1)\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$   $(j = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{k}{2} \rfloor)$  و  $x = j - \frac{1}{2}$  و  $x = j + \frac{1}{2}$  برای  $j = 1, 2, \dots, \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$  و  $t = 0, 1, \dots, m - 1$  می باشد. از این قسمت مقاله به بعد اندیس  $k$  را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$\lfloor \frac{[\max(y_i) - \min(y_i) + 2]}{\sqrt{3}} \rfloor + 1$$

اکنون آمادگی آن را داریم تا مفهوم ماتریس چینش  $(T_{k \times m})^1$  و ماتریس راس مستقل  $(Ind_{k \times m})^2$  و ماتریس همسایگی  $(N_{k \times m})^3$  و گراف تنک شده را ارائه دهیم.

اگر یک گره روی مرز یک شبکه قرار داشته باشد آن گره را به اولین شبکه سمت راستش متعلق می دانیم و اگر گره ای روی مرز سمت راست کادر  $(m)$  باشد آن گره را متعلق به شبکه سمت چپ آن گره در نظر می گیریم. اگر گره ای روی بالاترین مرز افقی  $(k)$  قرار داشته باشد آن گره را به نزدیکترین شبکه زیر آن گره متعلق می دانیم و گره های بین پایین ترین مرز افقی و شبکه های سطر اول را به نزدیکترین شبکه بالای سر گره متعلق می دانیم. به عنوان مثال به شکل ۲-۴ نگاه کنید.

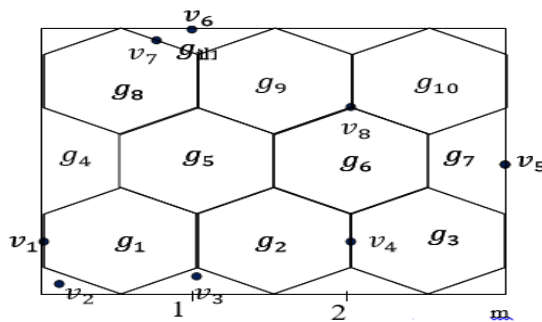
کادر  $k \times m$  توسط شبکه ای از شش ضلعی ها پوشش داده شد حال برای اندیس گذاری آنها روش زیر را به کار می بریم:

$$f_j(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{3}(x - j) + \frac{\sqrt{3}}{2}, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3}(x - j) + \frac{5\sqrt{3}}{6}, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$j = 0, 1, 2, \dots, m - 1$

$$g_j(x) = \begin{cases} -\frac{\sqrt{3}}{3}(x - j) + \frac{\sqrt{3}}{6}, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3}(x - j) - \frac{\sqrt{3}}{6}, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$j = 0, 1, 2, \dots, m - 1$



شکل ۲-۴  $v_1, v_2 \in g_1$  و  $v_3 \in g_2$  و  $v_4 \in g_3$  و  $v_5 \in g_7$  و  $v_6, v_7 \in g_{11}$  و  $v_8 \in g_{10}$

3. Neighborhood matrix

1. Packing matrix

2. Independent vertex matrix

به گونه‌ای که  $\deg(v_{it})$  بزرگتر یا مساوی  $\deg(v_{ij})$  می‌باشد  $(1 \leq j \leq s)$ .

$Ind[i, j]$  بزرگ‌ترین درجه در نظر گرفته می‌شود. برای تمام شش‌ضلعی‌هایی که در آنها هیچ راسی وجود ندارد و در واقع تهی هستند متناظراً در ماتریس چینش  $(T_{k \times m})$  و ماتریس راس مستقل  $(Ind_{k \times m})$  عدد صفر در نظر گرفته می‌شود. حال ماتریس  $Ind_{k \times m}$  معرف گراف تُنک شده‌ی  $G'$  از گراف اولیه  $G$  می‌باشد مرحله بعدی را به منظور پیدا کردن یک مجموعه مستقل ماکزیمال از  $G$  ادامه می‌دهیم. اگر  $v_{ip}$  یک راس از  $G'$  باشد به طوری که  $\deg G'(v_{ip}) = 1$  باشد، به شرط اینکه  $D(v_{ip}) \cap D(v_{iq}) \neq \emptyset$  یعنی  $D(v_{ip})$  و  $D(v_{iq})$  متقاطع باشند؛ راس  $v_{iq}$  را حذف کرده و  $v_{ip}$  را به عنوان یک عضو MIS انتخاب می‌کنیم سپس رُئوس  $v_{ip}$  در  $G'$  را که  $\deg G'(v_{ip}) = 2$  باشد را انتخاب کرده و مجاورهای آنها را حذف می‌کنیم. چون حداکثر درجه  $G'$ ؛ ۱۲ است با ادامه این فرایند در نهایت  $Ind_{k \times m}$  معرف یک مجموعه مستقل ماکزیمال از گراف  $G$  است. بدیهی است که تقریبی از عدد استقلال نیز محاسبه می‌شود. به این ترتیب الگوریتم ۱-۲ برای محاسبه مجموعه مستقل ماکزیمال (MIS) بدست می‌آید.

### الگوریتم ۱-۲:

**گام اول (شروع):** گراف دیسک‌واحد  $G$  از مرتبه  $n$  ورودی الگوریتم است که راس  $v_i$  با مختصات  $(x_i, y_i)$  مشخص شده و  $1 \leq i \leq n$  می‌باشد.

**گام دوم:** بر اساس بزرگ‌ترین و کوچکترین مختص  $x$  رُئوس و بزرگ‌ترین و کوچکترین مختص  $y$  رُئوس؛  $k$  و  $m$  به صورت زیر مشخص می‌شود:

$$K = [\max(y_i) - \min(y_i)] + 2,$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

$$m = [\max(x_i) - \min(x_i)] + 2,$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

و مختصات رُئوس چنان بازنویسی می‌شوند که گراف داده

### گراف تنک شده:

پس از حذف همسایگی‌های رُئوس با بزرگ‌ترین درجه در هر شش ضلعی  $(i, j)$  اُم، گرافی باقی می‌ماند که آن را تنک شده‌ی گراف  $G$  می‌نامیم و با  $G'$  نشان می‌دهیم.

### ماتریس همسایگی $(N)$ :

$N(i, j) < 0$  یعنی راس در شش ضلعی  $(i, j)$  اُم واقع بوده ولی به عنوان یکی از رُئوس مجموعه مستقل ماکزیمال محسوب نشده است.

$N(i, j) = |v_i|$  یعنی راس  $v_i$  در شش ضلعی  $(i, j)$  اُم بزرگ‌ترین درجه را داشته است.

$N(i, j) = 0$  یعنی هیچ راسی از گراف در شش ضلعی  $(i, j)$  اُم واقع نبوده است.

### ماتریس راس مستقل $(Ind)$ :

$Ind(i, j) = v_i$  وقتی است که راس  $v_i$  یکی از اعضای مجموعه مستقل ماکزیمال باشد.

$Ind(i, j) = -1$  یعنی این درایه در ابتدا حاوی راسی از گراف بوده ولی در نهایت به عنوان عضو مجموعه مستقل ماکزیمال انتخاب نشده است.  $Ind(i, j) = 0$  یعنی هیچ راسی از گراف در شش ضلعی  $(i, j)$  اُم قرار نداشته است.

### ماتریس چینش $(T)$ :

$T(i, j) = 1$  اگر در شش ضلعی  $(i, j)$  اُم یک راس از، گراف عضو مجموعه مستقل ماکزیمال شده باشد.

$T(i, j) = 0$  یعنی هیچ راسی از گراف در شش ضلعی  $(i, j)$  اُم قرار نداشته است.

$T(i, j) = -1$  یعنی راسی در شش ضلعی  $(i, j)$  اُم واقع بوده ولی در نهایت به/ عنوان عضوی از مجموعه مستقل انتخاب نشده است.

در ابتدای کار ماتریس‌های فوق را صفر در نظر می‌گیریم.

برای هر  $i = 1, 2, \dots, n$  اگر  $D = (v_i)$  متعلق به

شش ضلعی با اندیس  $(i, j)$  اُم باشد و  $N[i, j] \leq$

$\deg(v_i)$  فرض می‌کنیم  $T[i, j] = 1$  و

$Ind[i, j] = v_i$  و  $N[i, j] = \deg(v_i)$  باشد.

بنابراین اگر تعدادی راس  $v_{i1}, v_{i2}, v_{i3}, \dots, v_{is}$  به

طوری که  $i_1 < i_2 < \dots < i_s$  در شش ضلعی با

اندیس  $[i, j]$  اُم واقع باشند در نهایت داریم:

$Ind[i, j] = v_{it}$  و  $T[i, j] = 1, (1 \leq t \leq s)$

ماکزیمال (MIS) است.

شده در ربع اول مختصات جدید واقع شود یعنی قرار می-

دهیم:

$$\begin{aligned} x' &= \min(x_i), y' = \min(y_i) \\ x_i &= x_i - x', y_i = y_i - y' \\ i &= 1, 2, 3, \dots, n \end{aligned}$$

**گام سوم:** ربع اول دستگاه مختصات جدید را با شبکه‌ای از شش ضلعی‌ها افزایش می‌کنیم.

**گام چهارم:** ماتریس‌های  $T(k, m) = O_{k \times m}$  و  $N(k, m) = O_{k \times m}$  و  $Ind(k, m) = O_{k \times m}$  در نظر می‌گیریم.

**گام پنجم:** به ازای هر راس  $v_i$  از گراف؛ شش ضلعی با اندیس  $(i, j)$  شامل  $v_i$  را مشخص می‌کنیم. اگر درجه  $v_i$  از مقدار  $N[i, j]$  بیشتر باشد تغییرات زیر را انجام می‌دهیم:

$$\begin{aligned} N[i, j] &= \deg v_i \text{ (الف)} \\ T[i, j] &= 1 \text{ (ب)} \\ Ind[i, j] &= v_i \text{ (ج)} \end{aligned}$$

**گام ششم:** گراف تُنک شده‌ی حاصل،  $G'$  نامیده شده و درجه رئوس در  $G'$  را مد نظر قرار می‌دهیم.

**گام هفتم:** به ازای  $i = 1, 2, \dots, m$  و  $j = 1, 2, \dots, k$  هر راس  $v$  از گراف  $G'$  مشمول در یک شش ضلعی با رئوس مشمول در دوازده شش ضلعی مجاور بررسی می‌شود اگر راس مجاور ی یافته شد آن راس حذف شده و تغییرات در هر سه ماتریس به صورت زیر ثبت می‌شود.

(الف) هر راس که با  $v$  مجاور بود در ماتریس  $Ind$  درایه متناظر با آن راس با ۱- جابه جا می‌شود.

(ب) هر راسی که با  $v$  مجاور بود در ماتریس  $T$  درایه متناظر با آن راس با ۱- جابه جا می‌شود.

(ج) هر راسی که با  $v$  مجاور بود در ماتریس  $N$  درایه متناظر با آن قرینه می‌شود.

**گام هشتم (پایان):** خروجی یک مجموعه مستقل

**قضیه ۲-۲:** محصول الگوریتم ۱-۲ یک مجموعه مستقل ماکسیمال از گراف  $G$  می‌باشد.

**اثبات:** در خروجی الگوریتم ۱-۲؛ ماتریس  $Ind_{k \times m}$  دارای مولفه‌های صفر یا ۱- یا  $v_{i_p}$  برای یک اندیس  $1 \leq i_p \leq n$  می‌باشد. حالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

(الف) اگر  $Ind[i, j] = 0$  باشد یعنی هیچ راس  $v_p = (x_p, y_p)$  وجود ندارد که  $v_p = D(v_p)$  و  $i < y_p \leq i + 1$  و  $j < x_p \leq j + 1$  باشد.

(ب) اگر  $Ind[i, j] = -1$  باشد در واقع برای راس متناظر با آن، راس دیگری وجود دارد که با آن متقاطع است.

(ج) اگر  $Ind[i, j] = v_{i_p}$  برای  $1 \leq i_p \leq n$  باشد: این رئوس مجاور نیستند. بنابراین خروجی یک مجموعه مستقل از گراف  $G$  می‌باشد. اکنون برای اثبات ماکزیمال بودن خروجی فرض می‌کنیم از الگوریتم ارائه شده؛

$I = \{v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_q}\}$  به دست آید و یک راس  $v_{i_t} \notin I \cup \{v_{i_t}\}$  وجود داشته باشد به گونه‌ای که  $v_{i_t} \notin I$  و  $v_{i_t} \notin I \cup \{v_{i_t}\}$  همچنان مجموعه مستقل  $G$  باشد. فرض می‌کنیم  $v_{i_t} = D(v_{i_t})$  و  $v_{i_t} = (x_{i_t}, y_{i_t})$  باشد، پس یک شش ضلعی  $g_{i_t}$  وجود دارد که  $v_{i_t} \in g_{i_t}$  باشد. بر حسب تعریف ماتریس چینش  $(T_{k \times m})$  و با توجه به اینکه  $v_{i_t} \notin I$ ؛ مولفه‌های متناظر آن در ماتریس چینش فقط ۱- می‌باشد. به عبارت دیگر راس دیگری وجود دارد که با آن متقاطع است. بنابراین الگوریتم ۱-۲ یک مجموعه مستقل ماکسیمال از  $G$  بدست می‌آید.

**قضیه ۳-۲:** فرض کنید گراف داده شده از مرتبه  $n$  باشد، حداکثر پیچیدگی زمانی الگوریتم ۱-۲؛  $O(\max\{k, m, n\})$  می‌باشد.

**اثبات:** نحوه پراکندگی و فاصله توزیع دیسک‌ها در صفحه؛ پیچیدگی زمانی الگوریتم را تعیین می‌کند. از سوی دیگر ما دارای ۳ حلقه تو در تو هستیم (سطرها - ستون‌ها - هر راس با ۱۲ راس مجاورش). لذا حداکثر پیچیدگی زمانی الگوریتم ۱-۲؛  $O(\max\{12k, m, n\})$  می‌باشد. به

$$InD = \begin{bmatrix} 0 & v_9 & 0 & 0 \\ v_1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & v_6 & 0 \\ 0 & v_4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

که ماتریس نهایی  $InD$  بیان گر  $MIS$  می‌باشد.

#### ۴- نتیجه‌گیری

در این کار تحقیقی با استفاده از گراف لانه‌زنبوری، الگوریتمی برای تقریب مجموعه مستقل ماکزیمال یک گراف دیسک‌واحد همبند به عنوان مدلی از شبکه بی‌سیم، ارائه دادیم و درستی الگوریتم و پیچیدگی آن را بدست آوردیم، در نهایت نیز با یک مثال عددی نتایج را به صورت علمی مورد استفاده قرار دادیم. به عنوان کار بعدی با این روش قصد داریم مجموعه کوچکترین مجموعه احاطه کننده مینیمال (MCDS) گراف دیسک‌واحد همبند را تقریب بزنیم.

عنوان مثال دو دیسک به شعاع  $\frac{1}{2}$  را در نظر بگیرید که مراکز آنها  $v_1 = (\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$  و  $v_2 = (8.2, 9.7)$  باشد در این صورت  $k = m = [8.2 - \frac{1}{2}] + 2 = 9$  و  $n = [9.7 - \frac{2}{3}] + 2 = 11$  الگوریتم ۱-۲ برای این مورد خاص  $O(12k.m)$  می‌باشد. با این حال اگر تمام دیسک‌ها در شبکه اول (۱) و (۱) باشند و ۵۰ دیسک داشته باشیم در نتیجه  $k = m = 2$  و  $n = 50$  می‌شود در نتیجه پیچیدگی زمانی الگوریتم برای این مورد ویژه  $O(n)$  می‌شود.

#### ۳- مثال

فرض کنید  $G = (V, E)$  یک گراف دیسک‌واحد باشد به طوری که  $D = \{D(v_i) \text{ s.t } v_i = (x_i, y_i) | i = 1, 2, \dots, 9\}$

باشد و نمایش آنها از مختصات‌های زیر بدست آیند:

$v_1 = (.5, 2.7)$  و  $v_2 = (1, 1.9)$  و  $v_3 = (1.5, 2.2)$   
 $v_4 = (1.5, 3.3)$  و  $v_5 = (2, 3)$  و  $v_6 = (2.5, 3.2)$   
 $v_7 = (3.2, 3)$  و  $v_8 = (2, .7)$  و  $v_9 = (1.8, 1.7)$   
 این صورت از بندهای ۱ تا ۶ الگوریتم ۱-۲ نتایج زیر بدست می‌آید:

$$k = m = 4$$

$$InD = \begin{bmatrix} 0 & v_9 & 0 & 0 \\ v_1 & v_2 & 0 & 0 \\ 0 & v_5 & v_6 & 0 \\ 0 & v_4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

بر حسب بندهای ۷ و ۸ از الگوریتم ۱-۲ نتایج زیر بدست می‌آید:



## فهرست منابع

- [8] J.P. Mohantya, C. Mandal, C. Reade, A. Das, Construction of minimum connected dominating set in wireless sensor networks using pseudo dominating set, *Ad Hoc Networks* 42, (2016), pp. 61-73.
- [9] M. Rai, S. r. Verma. S. Tapaswi, A power aware minimum connected dominating set for wireless sensor networks, *Journal of Networks* 4 (6), (2009), pp. 511-519.
- [10] J. Yu, N. Wang, G. Wang, Heuristic algorithms for constructing connected dominating sets with minimum size and bounded diameter in wireless networks, in: *Proceedings of Wireless Algorithms, Systems, and Applications (WASA2010)*, Lecture Notes in Computer Science, vol. 6221, (2010), pp. 11-20.
- [11] E. Leeuwen, Approximation Algorithms for Unit Disk Graphs, technical report, institute of information and computing sciences, utrecht university, (2004), UU-CS-2004-066.
- [1] K Islam, S. Akl, H. Meijer, A constant factor distributed algorithm for computing connected dominating sets in wireless sensor networks, in: *Proceedings of the 14th IEEE International Conference on Parallel and Distributed Systems (ICPADS08)*, December (2008), pp. 559-566.
- [2] S. Surendran, S. Vijayan, Distributed Computation of Connected Dominating Set for Multihop Wireless Networks, *Procedia Computer Science* 63, (2015), pp. 482-487.
- [3] N. Bourgeois, F. Della Croce, B. Escoffier. V.Th. Paschos, Fast algorithms for min independent dominating set, *Discrete Applied Mathematics* 161, (2013), pp. 558-572.
- [4] S. Kamei, H. Kakugawa, A self-stabilizing 6-approximation for the minimum connected dominating set with safe convergence in unit disk graphs, *Theoretical Computer Science* 428, (2012), pp. 80-90.
- [5] P. M. Wightman, M.A. Labrador, A family of simple distributed minimum connected dominating set-based topology construction algorithm, *Journal of Network and Computer Applications* 24, (2011), pp. 1997-2010.
- [6] J. Yu, L. Jia, D. Yu, G. Li, X. Cheng, Minimum connected dominating set construction in wireless networks under the beeping model, *IEEE Conference on Computer Communications*, (2015), pp. 972-980.
- [7] S. Das, S. Barman, J. D. Sinha, Energy efficient routing in wireless sensor network, *Procedia Technology* 6, (2012), pp. 731-738.

