

## گراف‌هایی که دارای تعداد کمی مقدار ویژه مثبت هستند

محمد رضا عبودی\*

استادیار، گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه شیراز، شیراز، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۷/۱۲/۰۴ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۸/۰۸/۱۲

### چکیده

فرض کنید  $G$  گرافی ساده با رئوس  $v_1, \dots, v_n$  است. منظور از ماتریس اتصال  $G$  که آنرا با  $A(G)$  نشان می‌دهیم ماتریسی است  $n \times n$  بطوریکه درایه  $(i, j)$  آن را 1 قرار می‌دهیم اگر  $v_i$  به  $v_j$  وصل باشد، در غیر اینصورت قرار می‌دهیم 0. منظور از مقادیر ویژه  $G$  یعنی مقادیر ویژه  $A(G)$  فرض کنید  $\lambda_1(G) \geq \lambda_2(G) \geq \dots \geq \lambda_n(G)$  مقادیر ویژه  $G$  هستند. در این مقاله نتایجی را در مورد گراف‌هایی که دارای حداکثر سه مقدار ویژه نامنفی هستند، بدست می‌آوریم. بویژه دو رده زیر از گراف‌ها را مورد مطالعه قرار می‌دهیم:

(۱) گراف‌هایی مانند  $G$  بطوریکه  $\lambda_1(G) > 0$ ،  $\lambda_2(G) > 0$ ،  $\lambda_3(G) = 0$  و  $\lambda_4(G) < 0$

(۲) گراف‌هایی مانند  $G$  بطوریکه  $\lambda_1(G) > 0$ ،  $\lambda_2(G) > 0$ ،  $\lambda_3(G) > 0$  و  $\lambda_4(G) < 0$

واژه‌های کلیدی: گراف، مقادیر ویژه گراف‌ها، ماتریس اتصال گراف‌ها.

۱- مقدمه

در سراسر این مقاله گراف‌ها ساده هستند، یعنی گراف‌ها فاقد طوقه، یال جهت‌دار و یال چندگانه هستند. فرض کنید  $G = (V, E)$  یک گراف است. بعبارت دیگر  $V(G)$  و  $E(G)$  به ترتیب مجموعه رئوس و مجموعه یال‌های  $G$  هستند. منظور از مرتبه  $G$  یعنی تعداد رئوس  $G$ . برای هر دو راس  $u$  و  $v$  از  $G$  منظور از  $e = uv$  یعنی اینکه  $e$  یال بین  $u$  و  $v$  است. منظور از درجه راس  $v$  که آن را با  $\deg(v)$  نشان می‌دهیم یعنی تعداد یال‌های متصل به  $v$ . راسی را تنها گوئیم اگر درجه آن راس صفر باشد. یالی را برگ گوئیم اگر درجه یکی از رئوس سر آن یک باشد. منظور از  $G \setminus v$  یعنی گرافی که با حذف راس  $v$  از  $G$  بدست می‌آید (بطریق مشابه برای یال  $e$  منظور از  $G \setminus e$  یعنی گرافی که با حذف یال  $e$  بدست می‌آید). منظور از گراف مکمل  $G$  که آنرا با  $\bar{G}$  نشان می‌دهیم گرافی است با مجموعه رئوس  $V(G)$  بطوریکه در آن دو راس  $u$  و  $v$  به هم متصل هستند اگر و فقط اگر در گراف  $G$  به هم متصل نباشند. برای دو گراف مجزای  $G_1$  و  $G_2$  منظور از اجتماع آنها که آنرا با  $G_1 \cup G_2$  نشان می‌دهیم گرافی است با مجموعه رئوس  $V(G_1) \cup V(G_2)$  و مجموعه یال‌های  $E(G_1) \cup E(G_2)$ . گراف کامل، گراف دور، گراف مسیر و گراف ستاره از مرتبه  $n$  را به ترتیب با  $K_n$ ،  $C_n$ ،  $P_n$  و  $S_n$  نشان می‌دهیم. منظور از راس مرکزی ستاره  $S_n$  راسی است از درجه  $n - 1$ . همچنین منظور از  $K_{n_1, \dots, n_t}$  یعنی گراف چند بخشی کامل با بخش‌های  $n_1, \dots, n_t$  راسی  $n_t, \dots, n_1$  راسی. بویژه منظور از  $K_{n_1, n_2}$  یعنی گراف دو بخشی کامل با بخش‌های  $n_1$  راسی و  $n_2$  راسی. فرض کنید  $H_1, H_2, \dots, H_n$  گراف هستند. منظور از  $G[H_1, \dots, H_n]$  گرافی است که به جای هر راس  $v_k$ ، برای  $k = 1, \dots, n$  قرار می‌دهیم  $H_k$  و در آن هر راس  $H_i$  را به هر راس  $H_j$  وصل می‌کنیم اگر و فقط اگر  $v_i$  و  $v_j$  در گراف  $G$  به هم متصل باشند. بعنوان مثال برای هر دو عدد طبیعی  $r$  و  $s$  داریم  $K_2[K_r, K_s] = K_{r+s}$ . فرض کنید  $G$  و  $H$  دو گراف مجزا هستند. فرض کنید  $u$  راسی از  $G$  بوده و  $T$  زیرمجموعه‌ای از رئوس  $H$  است. منظور از  $G(u) * H(T)$  گرافی است که با متصل کردن راس  $u$  به رئوس  $T$  بدست می‌آید. بعنوان مثال اگر  $u$

راس درجه یک مسیر  $P_r$  باشد و  $S$  مجموعه تک راسی درجه یک مسیر  $P_t$  باشد، آنگاه داریم  $P_r(u) * P_t(S) = P_{r+t}$  در رده بندی بسیاری از گراف‌ها از این دو عملگر استفاده می‌شود.

فرض کنید  $G$  گرافی ساده با رئوس  $v_1, \dots, v_n$  است. منظور از ماتریس اتصال  $G$  که آنرا با  $A(G)$  نشان می‌دهیم ماتریسی است  $n \times n$  بطوریکه مقدار درایه  $(i, j)$  آن را 1 قرار می‌دهیم اگر  $v_i$  به  $v_j$  وصل باشد، در غیر اینصورت مقدار آن درایه را 0 قرار می‌دهیم. منظور از مقادیر ویژه  $G$  یعنی مقادیر ویژه  $A(G)$  از آنجا که  $A(G)$  ماتریسی متقارن با درایه‌های حقیقی است، لذا طبق قضیه‌ای از جبر خطی تمام مقادیر ویژه آن حقیقی هستند. فرض کنید  $\lambda_1(G) \geq \lambda_2(G) \geq \dots \geq \lambda_n(G)$  مقادیر ویژه  $G$  هستند. نتیجه مهمی وجود دارد که بیان می‌کند  $|\lambda_i(G)| \leq \lambda_1(G)$  (برای  $i = 1, \dots, n$ ). منظور از طیف گراف، گردایه همه مقادیر ویژه آن گراف است. طیف گراف  $G$  را با  $Spec(G)$  نشان می‌دهیم. بعبارت دیگر  $Spec(G) = \{\lambda_1(G), \lambda_2(G), \dots, \lambda_n(G)\}$  مثلاً  $Spec(K_4) = \{3, -1, -1, -1\}$  و  $Spec(C_4) = \{2, 0, 0, -2\}$  منظور از چندجمله‌ای مشخصه  $G$  که آنرا با  $P(G, \lambda)$  نشان می‌دهیم یعنی  $\det(\lambda I - A(G))$  که در آن  $I$  ماتریس همانی از سایز مرتبه  $G$  است. در حقیقت مقادیر ویژه گراف همان ریشه‌های چندجمله‌ای مشخصه آن هستند. یافتن مقادیر ویژه گراف‌ها در حالت کلی غیر ممکن است، لذا یکی از مسائل مهم مقادیر ویژه گراف‌ها یافتن کران‌های مناسب برای آنها است. خصوصاً مطالعه بزرگترین مقدار ویژه گراف‌ها که شعاع طیفی نامیده می‌شود از اهمیت خاصی برخوردار است. از دیگر مسائل مهم مقادیر ویژه گراف‌ها رده بندی گراف‌هایی است که مقادیر ویژه آنها اعداد خاصی هستند. مقالات و کتاب‌های متعددی در رابطه با مسائل فوق وجود دارند، برای نمونه به مراجع [1] الی [6] مراجعه کنید. برای هر گراف  $n$  راسی و  $m$  یالی  $G$  دو رابطه شناخته شده زیر در مورد مقادیر ویژه  $G$  وجود دارند [2]:

$$\lambda_1(G) + \dots + \lambda_n(G) = 0 \quad (۱)$$

$$\lambda_1^2(G) + \dots + \lambda_n^2(G) = 2m \quad (۲)$$

$O_n$  شامل همه گراف‌های همبند  $n$  راسی مانند  $G$  است بطوریکه  $\lambda_1(G) > 0$  ،  $\lambda_2(G) > 0$  و  $\lambda_3(G) < 0$  . مجموعه  $W_n$  متشکل از همه گراف‌های  $n$  راسی مانند  $G$  است بطوریکه  $\lambda_1(G) > 0$  ،  $\lambda_2(G) > 0$  و  $\lambda_3(G) < 0$  . مجموعه  $Y_n$  مجموعه همه گراف‌های  $n$  راسی مانند  $G$  است بطوریکه  $\lambda_1(G) > 0$  ،  $\lambda_2(G) > 0$  و  $\lambda_3(G) = 0$  و  $\lambda_4(G) < 0$  . عنوان مثال  $O_4 = \{P_4, H_4\}$  که در آن  $H_4$  گرافی است که از آویزان کردن یک یال به دور سه راسی بدست می‌آید. مجموعه  $O_n$  بطور دقیق در مقاله [4] مشخص شده است. براحتی می‌توان بررسی کرد که مجموعه‌های  $W_4$  و  $Y_4$  تهی هستند. در این بخش نتایجی را در مورد ساختار گراف‌های مجموعه‌های  $W_n$  و  $Y_n$  بدست می‌آوریم (برای  $n \geq 5$ ). ابتدا گراف‌های ناهمبند مجموعه  $Y_n$  را تعیین می‌کنیم. برای اینکار به قضایای زیر نیاز داریم.

**قضیه ۲.** [4] فرض کنید  $G$  گرافی با  $n \geq 2$  راس بوده بطوریکه  $\lambda_1(G) > 0$  ،  $\lambda_2(G) < 0$  در اینصورت  $G$  گراف کامل است.

**قضیه ۳.** [4] فرض کنید  $G$  گراف همبند با  $n \geq 3$  راس بوده بطوریکه  $\lambda_1(G) > 0$  ،  $\lambda_2(G) = 0$  و  $\lambda_3(G) < 0$  در اینصورت  $G = K_n \setminus e$  که در آن  $e \in E(K_n)$  . عبارت دیگر یال دلخواهی از گراف کامل حذف شده است.

**قضیه ۴.** فرض کنید  $G$  گراف ناهمبند با  $n \geq 5$  راس بوده بطوریکه  $\lambda_1(G) > 0$  ،  $\lambda_2(G) > 0$  و  $\lambda_3(G) = 0$  و  $\lambda_4(G) < 0$  در اینصورت  $G$  یکی از گراف‌های زیر است.

(الف)  $G = K_1 \cup K_r \cup K_s$  که در آن  $r$  و  $s$  حداقل ۲ هستند و  $r + s = n - 1$  .

(ب)  $G = K_1 \cup H$  که در آن  $H$  گرافی متعلق به مجموعه  $O_{n-1}$  است.

(ج)  $G = K_r \setminus e \cup K_s$  که در آن  $r \geq 3$  و  $s \geq 2$  و  $r + s = n$  همچنین  $e$  یالی از  $K_r$  است.

روابط فوق نشان می‌دهند که اگر  $G$  حداقل یک یال داشته باشد، آنگاه تمام مقادیر ویژه  $G$  هم علامت نیستند، بویژه داریم  $\lambda_1(G) > 0$  در سال ۱۹۷۷ اسمیت [6] نشان داد که گراف  $G$  فقط یک مقدار ویژه مثبت دارد اگر و فقط اگر  $G$  اجتماع مجزایی از یک گراف چندبخشی کامل و چندین راس تنها باشد. اخیراً تمام گراف‌هایی که دارای دقیقاً دو مقدار ویژه نامنفی هستند بطور کامل رده‌بندی شده است [4]. همچنین در [4] تمام گراف‌هایی مانند  $G$  بطوریکه  $\lambda_1(G) > 0$  ،  $\lambda_2(G) > 0$  و  $\lambda_3(G) < 0$  بطور کامل مشخص شده‌اند. در این مقاله گراف‌هایی را مطالعه می‌کنیم که دارای حداکثر سه مقدار ویژه نامنفی هستند. بویژه دو رده زیر از گراف‌ها را بررسی می‌کنیم:

- ۱) گراف‌هایی مانند  $G$  بطوریکه  $\lambda_1(G) > 0$  ،  $\lambda_2(G) > 0$  و  $\lambda_3(G) = 0$  و  $\lambda_4(G) < 0$
- ۲) گراف‌هایی مانند  $G$  بطوریکه  $\lambda_1(G) > 0$  ،  $\lambda_2(G) > 0$  ،  $\lambda_3(G) > 0$  و  $\lambda_4(G) < 0$

## ۲- گراف‌های ناهمبند با حداکثر سه مقدار ویژه مثبت

در این بخش به رده‌بندی گراف‌های ناهمبندی می‌پردازیم که دارای حداکثر سه مقدار ویژه مثبت هستند. لازم به ذکر است که گراف  $G$  دارای دقیقاً یک مقدار ویژه مثبت است اگر و فقط اگر رئوس غیر تنه‌ای  $G$  گراف چندبخشی کامل باشد. در مقاله [4] برای هر  $s$  گراف خاص  $S$  راسی به نام  $G_S$  تعریف شده است، بطوریکه در رده بندی گراف‌های با دقیقاً دو مقدار ویژه نامنفی اهمیت دارد. با استفاده از این گراف‌ها نتیجه زیر بدست آمده است.

**قضیه ۱.** [4] فرض کنید  $G$  گرافی همبند با حداقل سه راس بوده بطوریکه  $\lambda_1(G) > 0$  ،  $\lambda_2(G) > 0$  و  $\lambda_3(G) < 0$  در اینصورت اعداد صحیح مثبت  $t_1, \dots, t_s$  وجود دارند بطوریکه  $3 \leq s \leq 12$  و  $G = G_S[K_{t_1}, \dots, K_{t_s}]$  که در آن  $G_S$  گرافی مشخص است. لازم به ذکر است که در مقاله [4] عکس قضیه فوق نیز بررسی شده است.

برای هر  $n$  بطوریکه  $n \geq 4$  سه مجموعه از گراف‌ها را در نظر می‌گیریم، مجموعه‌های  $O_n$ ،  $W_n$  و  $Y_n$  مجموعه

$G_2$  گراف کامل است. از طرف دیگر چون  $\lambda_1(G_1) > 0$   $\lambda_2(G_1) = 0$  لذا  $G_1$  حداقل سه راس دارد. با توجه به اینکه  $\lambda_3(G_1) < 0$  لذا طبق قضیه ۳،  $G_1$  گرافی است که با حذف یک یال از گراف کامل به دست می‌آید. بنابراین  $G = K_r \setminus e \cup K_s$  که در آن  $r \geq 3$  و  $s \geq 2$  و  $r + s = n$  اثبات تمام است. ■

حال به بررسی گراف‌های ناهمبند مجموعه  $W_n$  می‌پردازیم.

**قضیه ۵.** فرض کنید  $n \geq 5$  و  $G$  گراف ناهمبندی در  $W_n$  باشد. بعبارت دیگر  $\lambda_1(G) > 0$   $\lambda_2(G) > 0$   $\lambda_3(G) > 0$  و  $\lambda_4(G) < 0$  در اینصورت  $G$  یکی از گراف‌های زیر است:

(الف)  $G = K_r \cup K_s \cup K_t$  که در آن  $r, s, t$  حداقل ۲ هستند و  $r + s + t = n$

(ب)  $G = K_r \cup H$  که در آن  $r$  حداقل ۲ و حداکثر  $n - 4$  است و  $H$  گرافی متعلق به مجموعه  $O_{n-r}$  است. **اثبات:** اثبات مشابه قضیه قبل است. ابتدا توجه کنید که  $G$  فاقد راس تنها است. از طرف دیگر چون هر گراف با حداقل یک یال دارای مقدار ویژه مثبت است، لذا  $G$  حداکثر سه مولفه همبندی دارد. بنابراین دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

(الف)  $G$  دارای دو مولفه همبندی است.

(ب)  $G$  دارای سه مولفه همبندی است.

با استفاده از قضایای ۱ و ۲، مشابه استدلال گفته شده در قضیه ۴ براحتی می‌توان اثبات را تکمیل کرد. ■

### ۳- گراف‌های همبند با حداکثر سه مقدار ویژه مثبت

مهمترین قسمت مساله بررسی گراف‌های همبندی است که حداکثر سه مقدار ویژه مثبت دارند. در این بخش خانواده‌هایی از گراف‌ها را معرفی می‌کنیم که دارای چنین خاصیتی هستند. ابتدا به مفهوم افراز منصفانه می‌پردازیم. فرض کنید  $G$  یک گراف است. گوییم  $G$  دارای افراز منصفانه  $t$  بخشی است اگر بتوان رئوس آن را به  $t$  مجموعه  $A_1, \dots, A_t$  چنان افراز کرد که تعداد همسایگان هر راس  $A_i$  در مجموعه  $A_j$  مستقل از انتخاب آن راس

**اثبات:** ابتدا توجه کنید که

$$Spec(G_1 \cup \dots \cup G_t) = Spec(G_1) \cup \dots \cup Spec(G_t) \quad (۱)$$

که در آن  $G_1, \dots, G_t$  گراف هستند. از آنجا که  $Spec(K_1) = \{0\}$  تساوی اخیر نشان می‌دهد که حداکثر یک راس تنها دارد. لذا دو حالت در نظر می‌گیریم. (الف) فرض کنید  $G$  یک راس تنها دارد. بنابراین دیگر مولفه‌های همبندی  $G$  حداقل یک یال دارند، لذا حداقل یک مقدار ویژه مثبت دارند. این نشان می‌دهد که  $G = K_1 \cup H_1$  پس  $G = K_1 \cup H_2 \cup H_3$  که در آن  $H_1, H_2$  و  $H_3$  گراف‌های همبند با حداقل دو راس هستند.

اگر  $G = K_1 \cup H_1$  آنگاه با توجه به رابطه (۱) و اینکه  $\lambda_1(G) > 0$   $\lambda_2(G) > 0$   $\lambda_3(G) = 0$  و  $\lambda_4(G) < 0$  در می‌یابیم که  $\lambda_1(H_1) > 0$   $\lambda_2(H_1) > 0$  و  $\lambda_3(H_1) < 0$  پس  $H_1 \in O_{n-1}$ . حال فرض کنید  $G = K_1 \cup H_2 \cup H_3$ . با توجه به اینکه  $H_2$  و  $H_3$  حداقل یک مقدار ویژه مثبت دارند (چون حداقل یک یال دارند)، با توجه به رابطه (۱) و طیف  $G$  نتیجه می‌گیریم که  $\lambda_1(H_2) > 0$  و  $\lambda_2(H_2) < 0$  و همچنین  $\lambda_1(H_3) > 0$  و  $\lambda_2(H_3) < 0$  بنابراین طبق قضیه ۲ هر دو گراف  $H_2$  و  $H_3$  کامل هستند. لذا اعداد  $r \geq 2$  و  $s \geq 2$  وجود دارند بطوریکه  $H_2 = K_r$  و  $H_3 = K_s$  پس  $G = K_1 \cup K_r \cup K_s$  که در آن  $r + s = n - 1$

(ب) فرض کنید  $G$  فاقد راس تنها است. لذا هر مولفه همبندی  $G$  حداقل یک یال دارد. از طرف دیگر چون  $G$  ناهمبند است و دو مقدار ویژه مثبت دارد، لذا  $G$  دقیقاً دو مولفه همبندی دارد (طبق رابطه (۱)). لذا  $G = G_1 \cup G_2$  که در آن  $G_1$  و  $G_2$  گراف‌های همبند با حداقل دو راس هستند. طبق رابطه (۱) داریم

$$\lambda_1(G_2) > 0 \text{ و } \lambda_2(G_1) = 0 \text{ و } \lambda_1(G_1) > 0$$

$$\lambda_2(G_2) < 0 \text{ یا اینکه } \lambda_2(G_1) > 0 \text{ و } \lambda_1(G_1) > 0$$

$$\lambda_2(G_2) = 0 \text{ و } \lambda_1(G_2) > 0 \text{ بدون کاستن از کلیت}$$

مساله فرض کنید  $\lambda_2(G_1) = 0$   $\lambda_1(G_1) > 0$  و  $\lambda_2(G_2) < 0$   $\lambda_1(G_2) > 0$  بنابراین طبق قضیه ۲،

**قضیه ۸.** فرض کنید  $a, b, c$  و  $d$  اعداد صحیحی بوده بطوریکه همگی آنها حداقل ۲ هستند. در اینصورت گراف  $C_4[K_a, K_b, K_c, K_d]$  دارای دقیقاً سه مقدار ویژه مثبت بوده و مابقی مقادیر ویژه آن منفی هستند.

**اثبات:** قرار دهید  $G[a, b, c, d] := C_4[K_a, K_b, K_c, K_d]$  توجه کنید که  $G[a, b, c, d]$  دارای افزایش منصفانه ۴ بخشی با ماتریس زیر است.

$$\begin{bmatrix} a-1 & b & 0 & d \\ a & b-1 & c & 0 \\ 0 & b & c-1 & d \\ a & 0 & c & d-1 \end{bmatrix}$$

می توان دید که چندجمله‌ای مشخصه ماتریس بالا بصورت زیر است:

$$F_{a,b,c,d}(\lambda) = \lambda^4 + (4-n)\lambda^3 + (6+ac+bd-3n)\lambda^2 + (abc+abd+acd+bcd-3n+2ac+2bd+4)\lambda + abc+abd+acd+bcd-n+ac+bd-3abcd+1,$$

که در آن  $n = a + b + c + d$  از آنجا که  $-1$  مقدار ویژه دور  $C_4$  نیست، با بکاربردن قضیه ۷ چندجمله‌ای مشخصه  $G[a, b, c, d]$  برابر است با

$$P(G[a, b, c, d], \lambda) = (\lambda + 1)^{n-4} F_{a,b,c,d}(\lambda).$$

در حالتی که  $a = b = c = d$  می توان دید که  $F_{a,a,a,a}(\lambda) = (\lambda - 3a + 1)(\lambda - a + 1)^2(\lambda + a + 1)$ .

این تساوی نشان می‌دهد که طیف مقادیر ویژه این  $G[a, a, a, a]$  عبارتند از  $Spec(G[a, a, a, a]) = \{3a - 1, a - 1, a - 1, -1, \dots, -1, -a - 1\}$

که در آن تکرر  $-1$  برابر است با  $4a - 4$  از آنجا که  $a \geq 2$  بنابراین داریم

$$\lambda_1(G[a, a, a, a]) = 3a - 1 > 0, \lambda_2(G[a, a, a, a]) = a - 1 > 0,$$

و

باشد. عبارت دیگر ماتریس  $t \times t$  مانند  $B = [b_{ij}]$  وجود داشته باشد بطوریکه برای هر راس  $v$  در  $A_i$  تعداد همسایه های آن در  $A_j$  برابر با  $b_{ij}$  باشد، برای  $i, j = 1, \dots, t$ . ماتریس  $B$  را ماتریس افزایش منصفانه گویند. بعنوان مثال گراف سه بخشی کامل  $K_{a,b,c}$  دارای افزایش منصفانه ۳ بخشی است بطوریکه افزایش مربوطه را همان بخشهای آن در نظر بگیریم. ماتریس مربوطه برابر است

$$\text{با: } \begin{bmatrix} 0 & b & c \\ a & 0 & c \\ a & b & 0 \end{bmatrix}$$

**قضیه ۶ (قضیه درهم تیدگی).** [1] فرض کنید  $G$  یک گراف بوده و  $H$  زیرگراف القایی راسی از  $G$  باشد. فرض کنید  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$  و  $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_m$  به ترتیب مقادیر ویژه  $H$  و  $G$  باشند. در اینصورت برای هر  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  داریم  $\lambda_i \geq \mu_i \geq \lambda_{n-m+i}$

**قضیه ۷.** [5] فرض کنید  $G$  یک گراف  $n$  راسی بوده بطوریکه  $-1$  مقدار ویژه آن نیست. فرض کنید  $t_1, \dots, t_n$  اعداد صحیح مثبتی هستند. در اینصورت داریم:

$$P(G[K_{t_1}, \dots, K_{t_n}], \lambda) = (\lambda + 1)^{t_1 + \dots + t_n - n} \det(\lambda I - M),$$

که در آن  $M$  ماتریس منصفانه افزایش  $n$  بخشی  $G[K_{t_1}, \dots, K_{t_n}]$  است بطوریکه مجموعه‌های افزایش را رئوس گرافهای کامل  $K_{t_1}, \dots, K_{t_n}$  در نظر می‌گیریم. قرار دهید  $V(C_n) = \{v_1, \dots, v_n\}$  و  $E(C_n) = \{v_1 v_2, v_2 v_3, \dots, v_{n-1} v_n, v_n v_1\}$  منظور از  $C_n[K_{t_1}, \dots, K_{t_n}]$  یعنی اینکه در  $C_n$  به جای  $v_i$   $K_{t_i}$  را به رئوس  $K_{t_i}$  وصل می‌کنیم اگر و فقط اگر در  $C_n$   $K_{t_i}$  را به رئوس  $v_j$  به هم متصل باشند. توجه کنید که تعداد رئوس  $C_n[K_{t_1}, \dots, K_{t_n}]$  برابر با  $t_1 + \dots + t_n$  است. در قضیه بعد نشان می‌دهیم که دسته‌ای از این نوع گرافها دارای دقیقاً سه مقدار ویژه مثبت هستند.

**قضیه ۹.** فرض کنید  $a \geq 2$  و  $c \geq 2$  اعدادی صحیح هستند. در اینصورت گراف  $C_4[K_a, K_1, K_c, K_1]$  دارای دقیقاً دو مقدار ویژه مثبت بوده و یک مقدار ویژه صفر دارد. **اثبات:** قرار دهید  $G[a, c] = C_4[K_a, K_1, K_c, K_1]$  و  $n = a + c + 2$  با توجه به استدلال گفته شده در قضیه ۸ (با قرار دادن  $b = d = 1$ ) چندجمله‌ای مشخصه  $G[a, c]$  برابر است با

$$P(G[a, c], \lambda) = (\lambda + 1)^{n-4} F_{a,1,c,1}(\lambda), \quad (۲)$$

بطوریکه

$$F_{a,1,c,1}(\lambda) = \lambda^4 + (4 - n)\lambda^3 + (7 + ac - 3n)\lambda^2 + (4ac - 2a - 2c)\lambda.$$

پس صفر یکی از ریشه‌های  $F_{a,1,c,1}(\lambda)$  است، لذا صفر یکی از مقادیر ویژه  $G[a, c]$  است. توجه کنید که  $F'_{a,1,c,1}(0) = 4ac - 2a - 2c \neq 0$  (مشتق  $F_{a,1,c,1}(\lambda)$  نسبت به  $\lambda$ ). بنابراین تکرر صفر بعنوان ریشه  $F_{a,1,c,1}(\lambda)$  یک است. پس تکرر صفر بعنوان مقدار ویژه  $G[a, c]$  برابر یک است.

فرض کنید  $x_1, x_2, x_3$  ریشه های غیر صفر  $F_{a,1,c,1}(\lambda)$  هستند. طبق رابطه (۲) چون ریشه‌های  $F_{a,1,c,1}(\lambda)$  مقادیر ویژه  $G[a, c]$  هستند، لذا  $x_1, x_2, x_3$  اعداد حقیقی هستند. بدون کاستن از کلیت مساله فرض کنید  $x_1 \geq x_2 \geq x_3$  داریم

$$x_1 + x_2 + x_3 = n - 4 = a + c - 2 > 0$$

و اینکه  $x_1 x_2 x_3 = 2a - 2c - 4ac < 0$  این روابط نشان می‌دهند که  $F_{a,1,c,1}(\lambda)$  دارای دقیقاً دو ریشه مثبت و دقیقاً یک ریشه منفی است. عبارت دیگر  $x_1 > 0$  و  $x_2 > 0$  و  $x_3 < 0$  لذا بنابر رابطه (۲)، طیف گراف  $G[a, c]$  بصورت زیر می‌باشد:

$$\text{Spec}(G[a, c]) = \{x_1, x_2, 0, x_3, -1, \dots, -1\},$$

که در آن تکرر  $-1$  حداقل  $n - 4$  و حداکثر  $n - 3$  است. اثبات تمام است. ■

$$\lambda_3(G[a, a, a, a]) = a - 1 > 0, \\ \lambda_4(G[a, a, a, a]) = -1 < 0.$$

بعبارت دیگر  $G[a, a, a, a]$  دارای دقیقاً سه مقدار ویژه مثبت بوده و مابقی مقادیر ویژه آن منفی هستند. لذا قضیه در حالتی که  $a = b = c = d$  برقرار است. حال با استقرا روی  $n = a + b + c + d$  قضیه را ثابت می‌کنیم.

اگر  $n = 8$  آنگاه  $a = b = c = d = 2$ . پس  $G[a, b, c, d] = G[2, 2, 2, 2]$  لذا قضیه طبق حالت قبل برقرار است. حال فرض کنید  $n \geq 9$  بدون کاستن از کلیت مساله فرض کنید  $a \geq 3$  از آنجا که  $G[a - 1, b, c, d]$  زیر گراف القایی راسی  $G[a, b, c, d]$  است و  $a - 1 \geq 2$  طبق فرض استقرا و قضیه در هم تنیدگی (قضیه ۶) داریم:

$$\lambda_1(G[a, b, c, d]) \geq \lambda_1(G[a - 1, b, c, d]) > 0, \\ \lambda_2(G[a, b, c, d]) \geq \lambda_2(G[a - 1, b, c, d]) > 0, \\ \lambda_3(G[a, b, c, d]) \geq \lambda_3(G[a - 1, b, c, d]) > 0,$$

۹

$$0 > \lambda_4(G[a - 1, b, c, d]) \geq \lambda_5(G[a, b, c, d]).$$

بنابر نامساوی‌های فوق برای تکمیل اثبات کافی است نشان دهیم که  $\lambda_4(G[a, b, c, d]) < 0$  فرض کنید  $t$  ماکزیمم مقدار اعداد  $a, b, c, d$  است. چون  $G[a, b, c, d]$  زیرگراف القایی راسی  $G[t, t, t, t]$  است و قضیه برای  $G[t, t, t, t]$  برقرار است، طبق قضیه درهم تنیدگی (قضیه ۶) داریم

$$0 > \lambda_4(G[t, t, t, t]) \geq \lambda_4(G[a, b, c, d])$$

بنابراین  $\lambda_4(G[a, b, c, d]) < 0$  و لذا اثبات تمام است. ■

در قضیه بعد خانواده‌ای از گراف‌ها را معرفی می‌کنیم که دارای دقیقاً دو مقدار ویژه مثبت بوده و یک مقدار ویژه صفر دارد.

فهرست منابع

- [1] A.E. Brouwer, W.H. Haemers, Spectra of graphs, Springer, New York, 2012.
- [2] D. M. Cvetkovi'c, M. Doob and H. Sachs, Spectra of Graphs, Theory and Application, Academic Press, Inc., New York, 1979.
- [3] M.R.Oboudi, Bipartite graphs with at most six non-zero eigenvalues, Ars Mathematica Contemporanea 11 (2016) 315-325.
- [4] M.R. Oboudi, Characterization of graphs with exactly two non-negative eigenvalues, Ars Mathematica Contemporanea 12 (2017) 271-286 .
- [5] M.R. Oboudi, On the third largest eigenvalue of graphs, Linear Algebra and its Applications: 503 (2016) 164-179.
- [6] J. H. Smith, Symmetry and multiple eigenvalues of graphs, Glas. Mat., Ser. III 12 (1977) 3-8.

