Archive of SID

دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال ششم، شماره بیست و هفتم، آذر و دی ۱۳۹۹
شماره شاپا: ۲۵۸۸X-۵۸۸

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
پژوهش‌های نوین در ریاضی

# جواب‌های چندگانه برای مسایل مقدار مرزی مرتبه دوم با نماهای متغیر

**قاسم علی‌زاده افروزی[۱*]، مصطفی نگراوی[۲]، مهدی آژینی[۳]**

[۱] گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه مازندران، بابلسر، ایران
[۲و۳] گروه ریاضی و آمار، واحد علوم و تحقیقات، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۸/۰۱/۱۹ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۸/۰۸/۱۲

**چکیده**

در این مقاله، نتایج وجودی را برای معادلات دیفرانسیل معمولی به همراه مسائل بیضوی نویمن که به دو پارامتر حقیقی بستگی دارند بدست آورده‌ایم. با استفاده از نظریه نقطه بحرانی، به‌طور دقیق، وجود سه جواب را برای مسائل $p(x)$– لاپلاسین نشان می‌دهیم.

**واژه‌های کلیدی:** $p(x)$– لاپلاسین، جواب‌های چندگانه، نظریه نقاط بحرانی، شرایط نویمن.

*. عهده‌دار مکاتبات: afrouzi@umz.ac.ir

www.SID.ir

Archive of SID



## ۱- مقدمه

در این مقاله، مساله مقدار مرزی زیر که شامل یک معادله دیفرانسیل معمولی با عملگر $\mathrm{p(x)}$- لاپلاسین، و شرط نویمن غیرهمگن است را در نظر می‌گیریم

$$\begin{aligned}&-(|u'(x)|^{p(x)-2}u'(x)) + \\ &\alpha(x)|u(x)|^{p(x)-2}u(x) = \\ &\lambda f(x,u) \quad \text{in } ]0,1[ \\ &|u'(0)|^{p(0)-2}u'(0) = -\mu g(u(0)), \\ &|u'(1)|^{p(1)-2}u'(1) = \mu h(u(1)).\end{aligned} \qquad (۱)$$

که در آن $f:[0,1]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ،$p\in C([0,1],\mathbb{R})$ تابع کاراتئودوری است، $g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ توابع پیوسته غیرمنفی، و $\lambda$ و $\mu$ پارامترهای حقیقی‌اند به طوری که $\lambda > 0$ و $\mu \geq 0$، $\alpha \in L^{\infty}([0,1])$ با شرط $essinf_{[0,1]}\alpha > 0$.

در سال‌های اخیر، بررسی مسائل تغییراتی و معادلات دیفرانسیل با شرایط $\mathrm{p(x)}$-نمایی که از سیالات الکترورئولوژیک و مکانیک الاستیک برخاسته‌اند، موضوع جذابی بوده است. در این زمینه خواننده را به Ruzicka [23]، Zhikov [27] و منابع موجود در آنها ارجاع می‌دهیم.

مسائل دیفرانسیلی که $\mathrm{p(x)}$-نمایی غیراستاندارد دارند، توسط ریاضیدان متعددی مورد بررسی قرار گرفته‌اند، برای نمونه رجوع کنید به [8,11,12,13,15] و منابع موجود در آنها.

نظریه سه نقطه بحرانی ابزار قدرتمندی برای بررسی مسائل مرزی معادلات دیفرانسیل است (برای مثال رجوع کنید به [1,2,3,5,6,16]). به‌ویژه میهایلسکو [۲۱] برای بررسی یک معادله $\mathrm{p(x)}$- لاپلاسین خاص از نظریه سه نقطه بحرانی ریچری [۲۲] استفاده کرد و وجود سه جواب را برای این مساله به اثبات رساند. لیو [۲۰] وجود جواب‌های معادلات $\mathrm{p(x)}$- لاپلاسین عمومی با شرایط مرزی نویمن یا دیریکله در یک ناحیه بسته را مورد مطالعه قرار داد، و با فرضیات مناسب سه جواب بدست آورد. شی [۲۴] نتایج مربوط به [۲۱] را تعمیم داد.

داگئو در [۹] با استفاده از روش‌های تغییراتی، وجود یک دنباله نامحدود از جواب‌های ضعیف برای مساله (۱) را اثبات می‌کند. مولفان در [۱۹] روش‌های تغییراتی و نظریه نقطه بحرانی را به کار برده و چند شرط کافی را برای وجود دست کم سه جواب ضعیف برای مساله (۱) ارائه کرده‌اند، در حالی که مولفان در [۱۸] از اصل تغییراتی ریچری استفاده کرده و در حالت $\lambda = \mu$، اطمینان می‌دهند که لااقل یک جواب ضعیف برای مساله (۱) وجود دارد.

ژانگ [۲۶]، از طریق مرتبه Leray-Schauder، شرایط کافی را برای وجود یک جواب برای مساله مقدار مرزی سیستم وزن‌دار $\mathrm{p(x)}$- لاپلاسین، بدست می‌آورد. در [۲۵]، مولفان با استفاده از روش‌های مینیماکس،جواب‌های متناوب را برای دسته‌ای از سیستم‌های دارای نمای $\mathrm{p(x)}$ غیراستاندارد مورد مطالعه قرار می‌دهند.

ما به منبع [۱۴] می‌پردازیم که در آن وجود بی‌نهایت جواب برای نامساوی‌های تغییراتی و نیمه تغییراتی نوع کیرشهف و اختلالات کوچک ناهمگن با شرایط مرزی نویمن، با استفاده از تحلیل ناهموار مورد بررسی قرار گرفته‌اند.

با الهام از واقعیات بالا، در این مقاله، با به کارگیری دو نوع از نظریه‌های نقاط بحرانی بدست آمده در [۲،۷]، که در بخش بعد یادآوری می‌شوند، (قضیه‌های ۲.۲ — ۲.۳)، وجود دست کم سه جواب ضعیف را برای مساله (۱) اثبات می‌کنیم، (به قضایای ۳.۱ — ۳.۲ مراجعه کنید).

برخی نتایج اخیر بسط داده و اصلاح شده‌اند. چند مثال نیز برای نشان دادن کاربرد نتایج کلی ارائه شده است.

ترتیب مقاله حاضر به این قرار است. در بخش ۲ برخی تعاریف پایه‌ای و نتایج مقدماتی یادآوری شده‌اند، در حالی که بخش ۳ به وجود جواب‌های چندگانه ضعیف برای مساله(۱) اختصاص دارد.

## ۲- پیشینه تحقیق

در اینجا و نیز در ادامه فرض می‌کنیم که $p \in C([0,1],\mathbb{R})$ در شرط زیر صدق می‌کند;

$$1 < p^- := \min_{x\in[0,1]} p(x) \leq p^+ := \max_{x\in[0,1]} p(x). \qquad (۲)$$

فضای لبگ متغیر نمایی به این صورت تعریف می‌شود.

$$L^{p(x)}([0,1]) = \left\{u:[0,1]\to\mathbb{R}\,;\, u \text{ و اندازه پذیر } \int_0^1 |u|^{p(x)}dx < +\infty\right\}.$$

www.SID.ir

Archive of SID



روی $L^{p(x)}([0,1])$، نرم را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$\|u\|_{L^{p(x)}([0,1])} := \inf\{\lambda > 0: \int_0^1 \left|\frac{u(x)}{\lambda}\right|^{p(x)} dx \le 1\}.$$

فرض می‌کنیم $X$ فضای تعمیم یافته لبگ–سوبولف $W^{1.p(x)}([0,1])$ باشدکه به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$W^{1.p(x)}([0,1]) := \{u: u \in L^{p(x)}([0,1]), u' \in L^{p(x)}([0,1])\},$$

که نرم آن برابرست با

$$\|u\|_{W^{1.p(x)}([0,1])} := \|u\|_{L^{p(x)}([0,1])} + \|u'\|_{L^{p(x)}([0,1])}. \qquad (۳)$$

بدیهی است که، با توجه به (۲)، هم $L^{p(x)}([0,1])$ و هم $W^{1.p(x)}([0,1])$، با توجه به نرم‌هایشان، فضاهای باناخ، محدب یکنواخت، انعکاسی و جدای پذیر هستند. به علاوه از آنجا که $\alpha \in L^{p(x)}([0,1])$، $\alpha_- := essinf_{x\in[0,1]}\alpha(x) > 0$ ، نرم

$$\|u\|_\alpha := \inf\{\sigma > 0 : \int_0^1 \left|\frac{u'(x)}{\sigma}\right|^{p(x)} + \int_0^1 \left|\frac{u(x)}{\sigma}\right|^{p(x)} dx \le 1\},$$

روی $W^{1.p(x)}([0,1])$ با نرمی که در (۳) معرفی شد معادل است. در مرحله بعد تخمینی در مورد ثابت نشانندگی m مربوط به $W^{1.p(x)}([0,1])$ با نرم $\|.\|$ در $C^0([0,1])$ ارائه می‌کنیم.

**قضیه ۲.۱.** ([۹]، قضیه ۲.۱). برای تمامی مقادیر $u \in W^{1.p(x)}([0,1])$ داریم

$$\|u\|_{C^0([0,1])} \le m\|u\|_\alpha , \qquad (۴)$$

که در آن

$$m = \begin{cases} 2\left[\dfrac{1}{\alpha_-^{\frac{p^+}{p^-(1-p^+)}}+1}\right]^{\frac{1}{p^+}} + \left[1-\dfrac{1}{\alpha_-^{\frac{p^+}{p^-(1-p^+)}}+1}\right]^{\frac{1}{p^+}} \dfrac{2}{\alpha_-^{\frac{1}{p^-}}} \\ \quad if \quad \alpha_- < 1 \\ 2\left[\dfrac{1}{\alpha_-^{\frac{1}{1-p^+}}+1}\right]^{\frac{1}{p^+}} + \left[1-\dfrac{1}{\alpha_-^{\frac{1}{1-p^+}}+1}\right]^{\frac{1}{p^+}} \dfrac{2}{\alpha_-^{\frac{1}{p^+}}} \\ \quad if \quad \alpha_- \ge 1. \end{cases}$$

در ادامه، $f: [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ یک تابع $L^1$–کاراتئوردوری، $g,h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ توابع پیوسته نامنفی، $\lambda$ و $\mu$ پارامترهای حقیقی که $\lambda > 0$ و $\mu \ge 0$ هستند. یادآوری می‌کنیم که $f: [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ یک تابع $L^1$–کاراتئوردوری است، اگر:

(۱) $x \to f(x,\xi)$ برای هر $\xi \in \mathbb{R}$ اندازه پذیر باشد،

(۲) $\xi \to f(x,\xi)$ تقریباً برای همه مقادیر $x \in [0,1]$ پیوسته باشد،

(۳) برای هر $s > 0$ تابع $l_s \in L^1([0,1])$ وجود دارد به طوری که

$$sup_{|\xi|<s}|f(x,\xi)| \le l_s,$$

برای تقریباً همه مقادیر $x \in [0,1]$

تابعک‌های $\psi, \Phi: X \to \mathbb{R}$ را به این طریق تعریف می‌کنیم

$$\Phi(u) = \int_0^1 \frac{1}{p(x)}(|u'(x)|^{p(x)} + \alpha(x)|u(x)|^{p(x)})dx, \qquad (۵)$$

$$\Psi(u) = \int_0^1 F(x,u(x))dx + \frac{\mu}{\lambda}[G(u(0)) + H(u(1))], \qquad (۶)$$

که در آن

$$F(x,t) = \int_0^t f(x,\xi)d\xi \ , \forall (x,t) \in [0,1] \times \mathbb{R},$$
$$G(t) = \int_0^t g(\ \xi)d\xi, \ \forall t \in \mathbb{R}$$

لازم به ذکر است که $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ یک جواب ضعیف برای مساله (۱) می‌نامند اگر $u \in W^{1.p(x)}([0,1])$ و در شرایط زیر صدق کند.

$$\int_0^1 |u'(x)|^{p(x)-2}u'(x)v'(x)dx + \int_0^1 \alpha(x)|u(x)|^{p(x)-2}u(x)v(x)dx - \lambda\int_0^1 f(x,u(x))v(x)dx - \mu[g(u(0))v(0) + h(u(1))v(1)] = 0, \qquad (۶)$$

به ازای هر $v \in W^{1.p(x)}([0,1])$.

در این مقاله وجود حداقل سه جواب برای مساله (۱) را مورد بحث قرار می‌دهیم. ابزار اصلی ما برای این منظور قضیه‌های نقاط بحرانی هستند که در زیر آنها را می‌آوریم.

www.SID.ir

Archive of SID



اولین قضیه در [۷] آمده است و از قضیه ۳.۲ از [۲] دقیق‌تر می‌باشد. قضیه دومی نیز در [۲] به اثبات رسیده است.

**قضیه ۲.۲.** ([۷] قضیه ۲.۶] فرض کنید $X$ یک فضای باناخ انعکاسی باشد، $\Phi: X \to \mathbb{R}$ تابع اجباری، به طور پیوسته مشتق‌پذیر گتو و به‌طور دنباله‌ای ضعیف نیم پیوسته پایینی باشد که مشتق گتو آن دارای معکوس پیوسته در $X^*$ داشته باشد. $\Psi: X \to \mathbb{R}$ تابع به طور پیوسته مشتق پذیر گتو باشد به طوری که مشتق گتو آن فشرده باشد و $\Phi(0) = \Psi(0) = 0$. فرض کنید ثابت مثبت $r$ و $v \in X$، که $r < \Phi(v)$ چنان وجود داشته باشند به طوری که؛ $(a_1)\, \frac{sup_{\Phi(u)\le r}\Psi(u)}{r} < \frac{\Psi(u)}{\Phi(u)}$، $(a_2)$ برای هر $\lambda \in \Lambda_r := ]\frac{\Phi(u)}{\Psi(u)}, \frac{r}{sup_{\Phi(u)\le r}\Psi(u)}[$،

تابعک $\Phi - \lambda\Psi$ تابعک اجباری باشد.
در این صورت برای هر $\lambda \in \Lambda_r$ تابعک $\Phi - \lambda\Psi$ حداقل سه نقطه بحرانی متمایز در $X$ دارد.

**قضیه ۲.۳.** ([۲] نتیجه فرعی ۳.۱] فرض کنید $X$ یک فضای باناخ انعکاسی باشد، $\Phi: X \to \mathbb{R}$ تابع اجباری، به طور پیوسته مشتق‌پذیر گتو و به طور دنباله‌ای ضعیف نیم پیوسته پایینی باشد که مشتق گتو آن دارای معکوس پیوسته در $X^*$ داشته باشد. $\Psi: X \to \mathbb{R}$ تابع به طور پیوسته مشتق‌پذیر گتو باشد به‌طوری که مشتق گتو آن فشرده باشد و

$$\Phi(0) = \Psi(0) = 0.$$

فرض کنید دو ثابت مثبت $r_1, r_2$ و $v \in X$، چنان وجود داشته باشند به‌طوری که $2, r_1 < \Phi(v) < \frac{r_2}{2}$، همچنین

$$(b_1)\, \frac{sup_{u\in\Phi^{-1}(-\infty,r_1)}\Psi(u)}{r_1} < \frac{2}{3}\frac{\Psi(v)}{\Phi(v)};$$
$$(b_2)\, \frac{sup_{u\in\Phi^{-1}(-\infty,r_2)}\Psi(u)}{r_2} < \frac{1}{3}\frac{\Psi(v)}{\Phi(v)};$$

(b3) برای هر

$$\lambda \in \Lambda'_{r_1,r_2} := (\frac{3}{2}\frac{\Phi(v)}{\Psi(v)}, \min\{\frac{r_1}{sup_{u\in\Phi^{-1}(-\infty,r_1)}\Psi(u)}, \frac{r_2}{sup_{u\in\Phi^{-1}(-\infty,r_2)}\Psi(u)}\})$$

و برای هر $u_1, u_2 \in X$ که مینیمم‌های موضعی تابعک $\Phi - \lambda\Psi$ هستند، و به طوری که $\Psi(u_1) \ge 0$ و $\Psi(u_2) \ge 0$، داریم:

$$inf_{s\in[0,1]}\Psi(su_1 + (1-s)u_2) \ge 0.$$

در این صورت، برای هر $\lambda \in \Lambda'_{r_1,r_2}$، تابعک $\Phi - \lambda\Psi$ حداقل سه نقطه بحرانی متمایز دارد که در $u \in \Phi^{-1}(-\infty, r_1)$ قرار می‌گیرند.
قضیه‌های (2.2) و (2.3) به طور موفقیت آمیزی برای نشان دادن حداقل سه جواب برای مسائل مقدار مرزی بکار برده شدند، برای مطالعه بیشتر می‌توان به [۱۷و۱۰و۴و۳] مراجعه کرد.

## ۳- روش حل معادله

در این بخش، نتایج اصلی را در مورد وجود حداقل سه جواب ضعیف برای مساله (۱) ارائه می‌کنیم.
به منظور ارائه اولین نتیجه، قرار می‌دهیم $c, d > 0$ به طوری که

$$\frac{\|\alpha\|_1 d^{p^+}}{\int_0^1 F(x,d)dx} < \frac{c^{p^-}}{m^{p^-}\int_0^1 \max_{|\xi|\le c} F(x,\xi)dx},$$

همچنین فرض می‌کنیم

$$\lambda \in \Lambda: =]\frac{\|\alpha\|_1 d^{p^+}}{p^-\int_0^1 F(x,d)dx}, \frac{c^{p^-}}{m^{p^-}p^+\int_0^1 \max_{|\xi|\le c}F(x,\xi)dx}[.$$

قرار می‌دهیم

$$\delta := \min\{\frac{\frac{1}{p^+}(\frac{c}{m})^{p^-} - \lambda\int_0^1 \max_{|\xi|\le c}F(x,\xi)dx}{G(c)+H(c)}, \frac{\lambda\int_0^1 F(x,d)dx - \frac{1}{p^+}\|\alpha\| d^{p^+}}{G(d)+H(d)}\}. \qquad (۷)$$

**قضیه ۳.۱.** $f: [0,1]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ را یک تابع $L^1$- کاراتئودوری در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم که دو ثابت مثبت c, d با شرط $c < m\,\|\alpha\|_1^{\frac{1}{p^-}}\, d$ وجود دارند به طوری که

$$(i)\, \frac{\int_0^1 \max_{|\xi|\le c}F(x,\xi)dx}{c^{p^-}} < \frac{1}{m^{p^-}\|\alpha\|_1}\frac{\int_0^1 F(x,d)dx}{d^{p^-}}$$

www.SID.ir

Archive of SID



که در آن $m$ با رابطه (۴) داده می‌شود.

(ii) $\limsup_{|\xi|\to+\infty}[\frac{\sup_{x\in[0,1]}F(x,\xi)}{\xi^{p^-}}] \le 0$

در این صورت برای هر λ در

$$]\frac{\|\alpha\|_1 d^{p^+}}{p^-\int_0^1 F(x,d)dx}, \frac{c^{p^-}}{m^{p^-}p^+\int_0^1 \max_{|\xi|\le c}F(x,\xi)dx}[$$

و برای هر یک از توابع پیوسته و نامنفی $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ و $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ که در آنها

$$\limsup_{|\xi|\to+\infty}\frac{G(\xi)}{\xi^{p^-}} < +\infty,$$
$$\limsup_{|\xi|\to+\infty}\frac{H(\xi)}{\xi^{p^-}} < +\infty,$$

و برای هر $\mu\in[0,\delta[$ که در آن $\delta$ با رابطه (۷) داده می‌شود، مساله (۱) حداقل سه جواب ضعیف دارد.

**اثبات.** هدف ما به کار بردن قضیه ۲.۲ است. به این منظور λ، μ، g و h که در فرض‌های ما صدق می‌کنند را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم $X$ فضای سوبولف $W^{1,p(x)}([0,1])$ باشد. $\psi$ و $\Phi$ را تابعک هایی در نظر می‌گیریم که با روابط (۵) و (۶) تعریف شده‌اند. مشخص است که آنها تمامی فرضیات مربوط به پیش فرض‌های آمده در قضیه ۲.۲ را براورده می‌کنند و نقاط بحرانی در $X$ تابعک $I=\Phi-\lambda\Psi$ دقیقا جواب‌های ضعیف مساله (۱) هستند.

قرار دهید $r=\frac{1}{p^+}(\frac{c}{m})^{p^-}$، با توجه به رابطه (۴)، داریم

$$\sup_{\Phi(u)\le r}\Psi(u) = \sup_{\Phi(u)\le r}\int_0^1 F(x,u(x))dx + \frac{\mu}{\lambda}[G(u(0))+H(u(1))] \le \int_0^1 \max_{|\xi|\le c}F(x,\xi)dx + \frac{\mu}{\lambda}[G(u(0))+H(u(1))].$$

اکنون قرار می‌دهیم $\bar{u}=d$. بدیهی است که $\bar{u}\in X$ و همچنین $r<\Phi(\bar{u})$ زیرا

$$\Phi(d)=\int_0^1 \frac{1}{p(x)}\alpha(x)d^{p(x)}dx \ge \int_0^1 \frac{1}{p^+}\alpha(x)d^{p^-}dx = \frac{d^-}{p^+}\parallel \alpha \parallel_1 > \frac{1}{p^+}(\frac{c}{m})^{p^-} = r.$$

داریم:

$$\Psi(d)=\int_0^1 F(x,d)dx+\frac{\mu}{\lambda}[G(d)+H(d)],$$
$$\Phi(d)=\int_0^1 \frac{1}{p(x)}\alpha(x)d^{p(x)}dx \le \frac{d^{p^+}}{p^-}\parallel \alpha \parallel_1.$$

بنابراین

$$\frac{\Psi(d)}{\Phi(d)} \ge \frac{\int_0^1 F(x,d)dx+\frac{\mu}{\lambda}[G(d)+H(d)]}{\frac{d^{p^+}}{p^-}\|\alpha\|_1}. \tag{۸}$$

$$\frac{\sup_{\Phi(u)\le r}\Psi(u)}{r} \le \frac{\int_0^1 \max_{|\xi|\le c}F(x,\xi)dx}{\frac{1}{p^+}(\frac{c}{m})^{p^-}} + \frac{\frac{\mu}{\lambda}[G(c)+H(c)]}{\frac{1}{p^+}(\frac{c}{m})^{p^-}}. \tag{۹}$$

از آنجا که $\mu<\delta$ داریم

$$\mu < \frac{\frac{1}{p^+}(\frac{c}{m})^{p^-} - \lambda\int_0^1 \max_{|\xi|\le c}F(x,\xi)dx}{G(c)+H(c)},$$

که به معنی این است که

$$\frac{\int_0^1 \max_{|\xi|\le c}F(x,\xi)dx}{\frac{1}{p^+}(\frac{c}{m})^{p^-}} + \frac{\frac{\mu}{\lambda}[G(c)+H(c)]}{\frac{1}{p^+}(\frac{c}{m})^{p^-}} < \frac{1}{\lambda}.$$

همچنین

$$\mu < \frac{\lambda\int_0^1 F(x,d)dx - \frac{1}{p^+}\|\alpha\| d^{p^+}}{G(d)+H(d)},$$

این رابطه به این معنی است که:

$$\frac{1}{\lambda} < \frac{\int_0^1 F(x,d)dx+\frac{\mu}{\lambda}[G(d)+H(d)]}{\frac{d^{p^+}}{p^-}\|\alpha\|_1}.$$

بنابراین،

$$\frac{\int_0^1 \max_{|\xi|\le c}F(x,\xi)dx}{\frac{1}{p^+}(\frac{c}{m})^{p^-}} + \frac{\frac{\mu}{\lambda}[G(c)+H(c)]}{\frac{1}{p^+}(\frac{c}{m})^{p^-}} < \frac{1}{\lambda} < \frac{\int_0^1 F(x,d)dx+\frac{\mu}{\lambda}[G(d)+H(d)]}{\frac{d^{p^+}}{p^-}\|\alpha\|_1}. \tag{۱۰}$$

از این رو، با توجه به روابط (۸) و (۱۰)، شرط $(a_1)$ قضیه ۲.۲ اثبات می‌شود.

www.SID.ir

Archive of SID



اکنون قرار می‌دهیم $0<\varepsilon<\frac{1}{p^+}m\lambda$، با توجه به رابطه (ii) تابع $h_\varepsilon \in L^1[0,1]$ وجود دارد، به گونه‌ای که برای هر $(x,\xi)\in[0,1]\times\mathbb{R}$ داریم:

$$F(x,\xi) \le \xi^{p^-} + h_\varepsilon(x),$$

در نتیجه، برای هر $u\in X$

$$\Phi(u)-\lambda\Psi(u) \ge \| u \|^{p^-} - \lambda\varepsilon \| u\|^{p^-} - \lambda \| h_\varepsilon \|^{p^-} - \mu[G(u(0))+H(u(1))].$$

و این اجباری بودن تابع $\Phi-\lambda\Psi$ را نتیجه می‌دهد پس شرط $(a_2)$ از قضیه ۲.۲ برقرار است. چون از (۸) و (۱۰) داریم

$$\lambda \in \left]\frac{\Phi(\bar u)}{\Psi(\bar u)}, \frac{r}{\sup_{\Phi(u)\le r}\Psi(u)}\right[.$$

لذا قضیه ۲.۲ وجود حداقل سه نقطه بحرانی برای تابع $\Phi-\lambda\Psi$ را نتیجه می‌دهد پس حکم ثابت می‌شود.
اکنون نوع دیگری از قضیه ۳.۱ را بیان می‌کنیم. فرض کنید که تابع $f$ نامنفی باشد. مقادیر $c_1,c_2,d>0$ را به گونه‌ای در نظر می‌گیریم که

$$\frac{3\|\alpha\|_1 d^{p^+}}{2\int_0^1 F(x,d)dx} < \frac{1}{p^+ m^{p^-}}\min\{\frac{c_1^{p^-}}{\int_0^1F(x,c_1)dx}, \frac{c_2^{p^-}}{2\int_0^1 F(x,c_2)dx}\},$$

و λ را به صورت زیر انتخاب می‌کنیم

$$\lambda\in\Lambda := \left]\frac{3\|\alpha\|_1 d^{p^+}}{2p^-\int_0^1F(x,d)dx}, \frac{1}{p^+m^{p^-}}\min\{\frac{c_1^{p^-}}{\int_0^1F(x,c_1)dx}, \frac{c_2^{p^-}}{2\int_0^1 F(x,c_2)dx}\}\right[,$$

قرار دهید

$$\delta := \min\{\frac{\frac{1}{p^+}(\frac{c_1}{m})^{p^-} - \lambda\int_0^1 F(x,c_1)dx}{G(c_1)+H(c_1)}, \frac{\frac{1}{p^+}(\frac{c_2}{m})^{p^-}-2\lambda\int_0^1F(x,c_2)dx}{2[G(c_2)+H(c_2)]}\}. \qquad (۱۱)$$

**قضیه ۳.۲.** فرض کنید ثابت‌های $c_1,c_2,d$ با شرط $2^{\frac{1}{p^-}}c_1 < m\|\alpha\|_1^{\frac{1}{p^-}} d$ و $m\|\alpha\|_1^{\frac{1}{p^+}} d < 2^{\frac{-1}{p^+}}c_2$ وجود داشته باشند، به طوری که

(j) برای هر $(x,\xi)\in[0,1]\times[0,c_2]$ داشته باشیم $f(x,\xi)\ge 0$

(jj) $\frac{\int_0^1 F(x,c_1)dx}{c_1^{p^-}} < \frac{2}{3m^{p^-}\|\alpha\|_1}\frac{\int_0^1F(x,d)dx}{d^{p^+}}$

(jjj) $\frac{\int_0^1 F(x,c_2)dx}{c_2^{p^-}} < \frac{1}{3m^{p^-}\|\alpha\|_1}\frac{\int_0^1F(x,d)dx}{d^{p^+}}$

در این صورت برای هر

$$\lambda\in\Lambda := \left]\frac{3\|\alpha\|_1 d^{p^+}}{2p^-\int_0^1F(x,d)dx}, \frac{1}{p^+m^{p^-}}\min\{\frac{c_1^{p^-}}{\int_0^1F(x,c_1)dx}, \frac{c_2^{p^-}}{2\int_0^1 F(x,c_2)dx}\}\right[,$$

و هر تابع پیوسته و نامنفی $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ و $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ که در شرط‌های زیر صدق می‌کنند

$$\limsup_{|\xi|\to+\infty}\frac{G(\xi)}{\xi^{p^-}} < +\infty,$$
$$\limsup_{|\xi|\to+\infty}\frac{H(\xi)}{\xi^{p^-}} < +\infty,$$

و نیز برای هر $\mu\in[0,\delta[$ که در آن $\delta$ با رابطه (۱۱) داده می‌شود، مساله (۱) حداقل سه جواب ضعیف $u_i, i=1,2,3,$ دارد به طوری که

$$0\le u_i(x)<c_2 \quad \forall x\in[0,1], i=1,2,3$$

**اثبات.** بدون از دست دادن کلیت مساله، می‌توانیم فرض کنیم که برای تمامی $(x,t)\in[0,1]\times\mathbb{R}$ داریم $f(x,t)\ge 0$. مانند بخش نتیجه‌گیری مقادیر $\lambda,\mu,g,$ و $h$ را ثابت در نظر گرفته و مقادیر $X,\Phi$ و $\Psi$ را مشابه اثبات قضیه ۳.۱ در نظر می‌گیریم. مشاهده می‌کنیم که فرض‌های قضیه ۲.۳ در مورد $\Phi$ و $\Psi$ صدق می‌کند. سپس هدف ما اثبات $(b_1)$ و $(b_2)$ است. به این منظور، مقدار $\bar u$ را مشابه قضیه ۳.۱ قرار می‌دهیم، $r_1=\frac{1}{p^+}(\frac{c_1}{m})^{p^-}$ و $r_2=\frac{1}{p^-}(\frac{c_2}{m})^{p^+}$. بنابراین، داریم $2r_1<\Phi(\bar u)<r_2/2$، و از آنجا که $\mu<\delta$، داریم

$$\frac{\sup_{\Phi(u)<r_1}\Psi(u)}{r_1} \le \frac{p^+m^{p^-}\int_0^1F(x,c_1)dx}{c_1^{p^-}} + \frac{\mu}{\lambda}\frac{[G(c_1)+H(c_1)]}{\frac{1}{p^+}(\frac{c_1}{m})^{p^-}} < \frac{1}{\lambda} < \frac{2}{3}\frac{\int_0^1F(x,d)+\frac{\mu}{\lambda}[G(d)+H(d)]}{\frac{1}{p^+}\|\alpha\|_1 d^+} \le \frac{2}{3}\frac{\Psi(\bar u)}{\Phi(\bar u)},$$

www.SID.ir

Archive of SID



$$\frac{2\sup_{\Phi(u)<r_2}\Psi(u)}{r_2} \le \frac{2\sup_{\Phi(u)<r_2}\Psi(u)}{\frac{1}{p^+}(\frac{c_2}{m})^{p^-}} \le$$
$$2\frac{p^+m^{p^-}\int_0^1 F(x,c_2)dx}{c_2^{p^-}} + 2\frac{\mu}{\lambda}\frac{[G(c_2)+H(c_2)]}{\frac{1}{p^+}(\frac{c_2}{m})^{p^-}}$$
$$< \frac{1}{\lambda} < \frac{2}{3}\frac{\int_0^1 F(x,d)dx+\frac{\mu}{\lambda}[G(d)+H(d)]}{\frac{1}{p^+}\|\alpha\|_1 d^+} \le \frac{2}{3}\frac{\Psi(\overline{u})}{\Phi(\overline{u})}.$$

بنابراین، $(b_1)$ و $(b_2)$ قضیه ۲.۳ اثبات می‌شود. در نهایت، اثبات می‌کنیم که $\Phi-\lambda\Psi$ فرض $(b_3)$ قضیه ۲.۳ را براورده می‌کند. فرض می‌کنیم $u_1$ و $u_2$ دو مینیمم موضعی $\Phi-\lambda\Psi$ باشند. در این صورت $u_1$ و $u_2$ نقاط بحرانی $\Phi-\lambda\Psi$ بوده و بنابراین، جواب‌های ضعیف مساله (۱) هستند. برای تمامی مقادیر مثبت پارامتر $\lambda,\mu$ و برای تمامی $(x,t)\in[0,1]\times[0,+\infty[$ داریم، $\lambda f(x,t)\ge 0$. از این رو، با توجه به اصل ضعیف ماکزیمم، برای تمامی مقادیر $x\in[0,1]$ بدست می‌آوریم $u_1(x)\ge 0, u_2(x)\ge 0$. بنابراین نتیجه می‌شود که برای تمامی مقادیر $s\in[0,1]$ داریم.

$(s-1)u_1 - su_2 \ge 0$،

بنابراین به ازای هر $\lambda f((s-1)u_1-su_2)\ge 0$ $s\in[0,1]$ داریم $\Psi((s-1)u_1-su_2)\ge 0$. با توجه به قضیه ۲.۳، تابعک $\Phi-\lambda\Psi$ حداقل سه نقطه بحرانی متفاوت دارد که جواب‌های ضعیف (۱) هستند و نتیجه به دست می‌آید.

**مثال ۳.۱.** مساله زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} -(|u'(x)|^{p(x)-2}u'(x))' + 0.5|u(x)|^{p(x)-2}u(x) \\ \quad = \lambda f(x,u) \quad \text{in } ]0,1[ \\ |u'(0)|^{p(0)-2}u'(0) = -\mu\frac{1}{|1+u(0)|}, \\ |u'(1)|^{p(1)-2}u'(1) = \mu(u(1)+\sin[u(1)]). \end{cases} \qquad (۱۲)$$

که در آن $p(x)=1.1$. قرار دهید $f(x,t)=2cos(t)sin(t)$. با توجه به تعریف f داریم $F(x,t)=sin^2(t)$. قرار می‌دهیم $\mathrm{d}=0.5$ ، $c=0.1$، به سادگی می‌توان نشان داد تمامی شرایط قضیه ۳.۱ براورده می‌شود. بنابراین، مساله (۱۲) برای هر $\lambda\in]1477.4,5538.8[$ و برای هر
$\mu\in]0,\min\{\frac{0.016-\lambda\times3\times10^{-6}}{0.197},\frac{0.17\lambda-0.42}{1.71}\}[$

حداقل سه جواب ضعیف متمایز را امکان پذیر می‌کند.

**مثال ۳.۲.** مساله زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} -(|u'(x)|^{p(x)-2}u'(x))' + 0.25|u(x)|^{p(x)-2}u(x) \\ \quad = \lambda f(x,u) \quad \text{in } ]0,1[ \\ |u'(0)|^{p(0)-2}u'(0) = -\mu\frac{3}{2+u(0)}, \\ |u'(1)|^{p(1)-2}u'(1) = \mu u(1)arctan(u(1)). \end{cases} \qquad (۱۳)$$

که در آن

$$p(x) = \frac{5}{2} - \frac{sin(x)}{2},$$

و $f(x,t)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$f(x,t) = \begin{cases} 3t^2, & 0\le t\le 1, \\ 3, & 1<t. \end{cases}$$

با توجه به تعریف f داریم

$$F(t) = \begin{cases} t^3, & 0\le t\le 1, \\ 3t-2, & 1<t. \end{cases}$$

قرار می‌دهیم $c_1=10^{-2}, c_2=100, d=0.5$، به سادگی می‌توان نشان داد تمامی شرایط قضیه ۳.۲ برقرار است. بنابراین، مساله (۱۳) برای هر $\lambda\in]0.16,0.233[$ و برای هر
$\mu\in]0,\min\{\frac{1.39\times10^{-6}-\lambda\times10^{-6}}{0.015},\frac{139.114-596\lambda}{15533.19}\}[$

حداقل سه جواب ضعیف متمایز را امکان پذیر می‌کند.

**نتیجه ۳.۳.** فرض می‌کنیم $p\in C([0,1],\mathbb{R})$ شرط
$1<p^-:=\min_{x\in[0,1]}p(x)\le p^+:=\max_{x\in[0,1]}p(x)$

را براورده کرده و $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تابع پیوسته و نامنفی باشد به گونه‌ای که

$$\lim_{t\to0^+}\frac{f(t)}{t}=0,$$
$$\int_0^6 f(t)dt < 6\int_0^1 f(t)dt.$$

www.SID.ir

Archive of SID



در این صورت برای تمامی مقادیر $\lambda \in \left]\frac{1}{2\int_0^1 f(t)dt}, \frac{1.124}{\int_0^6 f(t)dt}\right[$ و برای هر $\mu \in [0,\delta[$ که $\delta$ با رابطه (۱۱) داده می‌شود و برای هر کدام از توابع پیوسته و نامنفی $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ و $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ که در شرط‌های زیر صدق می‌کنند.

$$\limsup_{|\xi|\to+\infty}\frac{G(\xi)}{\xi^3} < +\infty,$$
$$\limsup_{|\xi|\to+\infty}\frac{H(\xi)}{\xi^3} < +\infty,$$

مساله

$$\begin{aligned} &-(|u'(x)|u'(x))'' + |u(x)|u(x) = \\ &\lambda f(u) \quad \text{in } ]0,1[, \\ &|u'(0)|u'(0) = -\mu g(u(0)), \\ &|u'(1)|u'(1) = \mu h\big(u(1)\big), \end{aligned} \tag{۱۴}$$

حداقل دارای سه جواب کلاسیکی غیرصفر است.

**اثبات.** هدف ما به کار گرفتن قضیه ۳.۲ است. فرض کنید $n = 1, p(x) = 3$، و $\alpha = 1$ همچنین $d = 1$ و $c_2 = 6$. بنابراین، با توجه به اینکه $m = 3.175$، داریم

$$\frac{3\|\alpha\|_1 d^{p^+}}{2p^- F(d)} = \frac{1}{2\int_0^1 f(t)dt},$$
$$\frac{1}{p^+ m^{p^-}}\frac{c_2^{p^-}}{2F(c_2)} = \frac{1.124}{\int_0^6 f(t)dt}.$$

همچنین، از آنجا که $\lim_{t\to0^+}\frac{F(t)}{t^2} = 0$ یک ثابت مثبت $c_1 < 1$ وجود دارد، به‌طوری که $\frac{F(c_1)}{c_1^3} < 0.02\int_0^1 f(t)dt$ و $\frac{c_1^3}{F(c_1)} > \frac{18}{\int_0^6 f(t)dt}$. از این رو، تمامی فرضیات قضیه ۳.۲ برقرار است لذا نتیجه بدست می‌آید.

www.SID.ir

Archive of SID



## فهرست منابع

[1] G.A. Afrouzi, S. Heidarkhani, Three solutions for a Dirichlet boundary value problem involv-ing the p-Laplacian, Nonlinear Anal. 66 (2007) 2281-2288.

[2] G. Bonanno, P. Candito, Non-differentiable functionals and applications to elliptic problems with discontinuous nonlinearities, J. Differ. Equ. 244 (2008) 3031-3059.

[3] G. Bonanno, A. Chinn, Existence of three solutions for a perturbed two-point boundary value problem, Appl. Math. Lett. 23 (2010) 807-811.

[4] G. Bonanno, G. D'Agu, Multiplicity results for a perturbed elliptic Neumann problem, Abstr. Appl. Anal., Volume 2010 (2010), Article ID 564363, 10 pages.

[5] G. Bonanno, B. Di Bella, A boundary value problem for fourth-order elastic beam equations, J. Math. Anal. Appl. 343 (2008) 1166-1176.

[6] G. Bonanno, R. Livrea, Multiplicity theorems for the Dirichlet problem involving the p-Laplacian, Nonlinear Anal. 54 (2003) 1-79.

[7] G. Bonanno, S. Marano, On the structure of the critical set of non-differentiable functions with a weak compactness condition, Appl. Anal. 89 (2010) 1-10.

[8] F. Cammaroto, A. Chinn, B. Di Bella, Multiple solutions for a Neumann problem involving the p(x)-Laplacian, Nonlinear Anal. 71 (2009) 4486-4492.

[9] G. D'Agu, Second-order boundary-value problems with variable exponents, Electron. J. Diff. Equ., Vol. 2014 (2014), No. 68, pp. 1-10.

[10] G. D'Agu, S. Heidarkhani, G. Molica Bisci, Multiple solutions for a perturbed mixed boundary value problem involving the one dimensional p-Laplacian, Electron. J. Qual. Theory Diff.Equ. 24 (2013) 1-14.

[11] G. D'Agu, A. Sciammetta, Innitely many solutions to elliptic problems with variable expo-nent and nonhomogeneous Neumann conditions, Nonlinear Anal. 75 (2012) 5612-5619.

[12] X. Fan, S.G. Deng, Multiplicity of positive solutions for a class of inhomogeneous Neumann problems involving the p(x)-Laplacian, Nonlinear Differential Equations Appl. 16 (2009) 255-271.

[13] X. Fan, S.G. Deng, Remarks on Ricceri's variational principle and applications to the p(x)-Laplacian equations, Nonlinear Anal. 67 (2007) 3064-3075.

[14] J.R. Graef, S. Heidarkhani, L. Kong, Variational-hemivariational inequalities of Kirchhoff-type with small perturbations of nonhomogeneous Neumann boundary conditions, Mathematics in Engineering, Science & Aerospace (MESA) 2017, Vol. 8 Issue 3, p345-357. 13p.

[15] S. Heidarkhani, G.A. Afrouzi, S. Moradi, G. Caristi, A variational approach for solving p(x)-biharmonic equations with Navier boundary conditions, Electron. J. Differ. Equ., Vol. 2017(2017), No. 25, pp. 1-15.

[16] S. Heidarkhani, A.L.A. De Araujo, G.A. Afrouzi, S. Moradi, Multiple solutions for Kirchhoff-type problems with variable exponent and nonhomogeneous Neumann conditions, Math. Nachr., DOI: 10.1002/ mana. 201600425.

www.SID.ir

Archive of SID



[17] S. Heidarkhani, G.A. Afrouzi, M. Ferrara, S. Moradi, Variational approaches to impulsiveelastic beam equations of Kirchhoff type, Complex Var. Elliptic Equ. 61 (2016) 931-968.

[18] S. Heidarkhani, S. Moradi, D. Barilla, Existence results for second-order boundary-value problems with variable exponents, preprint.

[19] S. Heidarkhani, S. Moradi, S.A. Tersian, Three solutions for second-order boundary-value problems with variable exponents, preprint.

[20] Q. Liu, Existence of three solutions for p(x)-Laplacian equations, Nonlinear Anal. 68 (2008) 2119-2127.

[21] M. Mihailescu, Existence and multiplicity of solutions for a Neumann problem involving the p(x)-Laplace operator, Nonlinear Anal., 67 (2007) 1419-1425.

[22] B. Ricceri, On a three critical points theorem, Arch. Math. 75 (2000) 220-226.

[23] M. Ruzicka, Electrorheological uids, Modeling and Mathematical Theory, Springer-Verlag, Berlin. (2000).

[24] X. Shi, X. Ding, Existence and multiplicity of solutions for a general p(x)-Laplacian Neumann problem, Nonlinear Anal. 70 (2009) 3715-3720.

[25] X. J. Wang, R. Yuan, Existence of periodic solutions for p(x)-Laplacian systems, Nonlinear Anal. 70 (2009) 866-880.

[26] Q. Zhang, Existence of solutions for weighted p(x)-Laplacian system boundary value problems, J. Math. Anal. Appl. 327 (2007) 127-141.

[27] V.V. Zhikov, Averaging of functionals of the calculus of variations and elasticity theory, Izv.

www.SID.ir