

جواب‌های دقیق و تقریبی برای یک فرم تعمیم یافته از معادله غیرخطی شرودینگر

بهزاد قنبری*

استادیار ریاضی کاربردی، گروه علوم پایه، دانشگاه صنعتی کرمانشاه، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۸/۰۱/۲۴ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۸/۰۵/۲۲

چکیده

در این مقاله، یک فرم تعمیم یافته از معادله غیرخطی شرودینگر همراه با ضریب پراکندگی مکانی از مرتبه دوم بررسی خواهد شد. در تعیین جواب‌های دقیق جدید این معادله از روش توابع نمایی کسری تعمیم یافته و در تعیین جواب‌های تقریبی از یک تکنیک عددی استفاده شده است. شبیه سازی‌های عددی مختلف نیز به منظور نمایش رفتار جواب‌های دقیق و نیز تایید دقت روش عددی ارائه شده است. به وضوح می‌توان دید که این روش‌ها، روش‌هایی ساده در عین حال کارآمد در تعیین جواب‌های این معادله هستند. به علاوه آن‌ها را می‌توان در حل بسیاری مسائل غیرخطی در ریاضی، فیزیک و سایر شاخه‌های مهندسی به کار گرفت. در انجام کلیه محاسبات و شبیه‌سازی‌های عددی از نرم افزار ممتیکا استفاده شده است.

واژه‌های کلیدی: معادلات با مشتقات جزئی، معادله غیرخطی تعمیم یافته شرودینگر، روش توابع نمایی کسری تعمیم یافته، جواب‌های دقیق و عددی، محاسبات نمادین.

۱- مقدمه

در دهه گذشته پیشرفت‌های شگرفی در گسترش تکنولوژی‌های مخابراتی موجود در فیبر نوری ایجاد شده است. این پیشرفت‌ها بواسطه اهمیت بسیار انتقال اطلاعات از طریق فیبرهای نوری در فواصل بین قاره‌ای سرعت بیشتری به خود گرفته است. به همین بررسی سیستم‌های دینامیکی مربوط به آن‌ها نیز توجه بسیاری از محققان و پژوهشگران عرصه‌های مختلف علوم را به خود جلب کرده است. اغلب این مسائل بر حسب دامنه زمانی و توسط معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی مدل‌بندی می‌شوند. با وجود ارائه طیف گسترده‌ای از روش‌های تحلیلی و عددی در حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی [۱۱-۱]، ارائه جواب‌های جدید معادلات کاربردی، درک بهتر و عمیق‌تری از جنبه‌های مهندسی این مسائل، برای پیشگامان آن حوزه را فراهم می‌کند.

یکی از مهم‌ترین معادلات موجود در مدل‌بندی فرآیند انتشار نور و داده در فیبرهای نوری، فرم تعمیم یافته‌ای برای معادله شرودینگر به صورت زیر است [۱۵-۱۲].

$$i \left(\frac{\partial q}{\partial x} + \alpha_1 \frac{\partial q}{\partial t} \right) + \alpha_2 \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} + \alpha_3 \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + |q|^2 q = 0. \quad (1)$$

در این معادله تابع مجهول $q(x,t)$ برحسب متغیرهای مستقل مکان x و زمان t بیان می‌شود. همچنین ضریب ثابت α_1 متناسب با نسبت سرعت، α_2 و α_3 نیز به ترتیب ضرایب مربوط به پراکندگی سرعت و مکان هستند. هدف اصلی این پژوهش ارائه جواب‌های جدید دقیق و عددی برای این معادله است.

ساختار ارائه مطالب در این مقاله به شرح زیر است: در فصل دوم مراحل استفاده از روش توابع نمایی کسری تعمیم یافته¹ (GERFM) در حل دقیق معادلات ارائه خواهد شد. در فصل سوم یک روش عددی در حل معادلات غیرخطی بیان می‌شود. هر یک از این روش‌ها در فصل‌های چهارم و پنجم، به ترتیب، در تعیین جواب‌های دقیق و عددی معادله استفاده خواهد شد. در فصل ششم این پژوهش، به بررسی نتایج عددی جواب‌های به دست

آمده می‌پردازیم. و سرانجام در انتهای مقاله، نتیجه‌گیری ارائه خواهد شد.

۲- بیان روش تحلیلی

این روش نخستین بار در سال ۲۰۱۸ توسط قنبری و همکارانش [۱۷] در حل معادله دیفرانسیل نوسانی شرودینگر ارائه شده است. تاکنون، از این روش در حل بسیاری از معادلات استفاده شده است [۲۲-۱۸]. در این بخش، گام‌های اساسی به کارگیری روش در حل معادلات غیرخطی خواهیم پرداخت:

گام نخست: معادله غیرخطی زیر را در نظر بگیرید

$$\mathcal{N}(q, q_x, q_t, q_{xx}, \dots) = 0, \quad (2)$$

با استفاده از انتقال متغیرهای $q = u(\xi)$ و $\xi = \sigma x - \lambda t$ معادله (۲) را می‌توان به فرم معادله دیفرانسیل معمولی زیر بازنویسی کرد

$$\mathcal{N}(u, \sigma u', -\lambda u', \sigma^2 u'', \dots) = 0, \quad (3)$$

گام دوم: حال فرض می‌کنیم معادله (۳) دارای جوابی به صورت زیر باشد.

$$u(\xi) = A_0 + \sum_{k=1}^M A_k \Phi(\xi)^k + \sum_{k=1}^M B_k \Phi(\xi)^{-k}. \quad (4)$$

که در آن

$$\Phi(\xi) = \frac{r_1 e^{s_1 \xi} + r_2 e^{s_2 \xi}}{r_3 e^{s_3 \xi} + r_4 e^{s_4 \xi}}, \quad (5)$$

همچنین r_i, s_i ها برای $1 \leq i \leq 4$ ، به علاوه A_0, A_1, \dots, A_k و B_1, \dots, B_k به ازای $1 \leq k \leq M$ ثابت‌های مجهولی هستند که در طول روش تعیین می‌شوند. عدد نامنفی M نیز با به کار بستن اصول تعادلی در معادله (۳) تعیین می‌شود.

گام سوم: با جایگذاری (۴) در معادله (۳) با در نظر گرفتن معادله (۵) و سپس دسته‌بندی عبارات با استفاده از نمادگذاری $Z_i = e^{s_i \xi}$ برای $i = 1, \dots, 4$ ، به معادله

1. Generalized exponential rational function method

$$\sum_{j=0}^{\infty} q_j = f + N(q_0) + \sum_{j=1}^{\infty} [N(\sum_{k=0}^j q_k) - N(\sum_{k=0}^{j-1} q_k)]. \quad (9)$$

براساس روش پیشنهادی، روند تکراری در تقریب جواب‌ها در این روش به صورت دنباله بازگشتی زیر تعیین می‌شود

$$\begin{aligned} q_0 &= f, \\ q_1 &= N(q_0), \\ q_{m+1} &= N(\sum_{j=0}^m q_j) - N(\sum_{j=0}^{m-1} q_j), \quad m = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (10)$$

به علاوه، تقریب جواب m -جمله‌ای به دست آمده از این روش به صورت سری متناهی زیر قابل استفاده است

$$q = \sum_{j=0}^{m-1} q_j.$$

یکی از مزایای مهم این روش روش تجزیه در مقایسه با سایر روش‌های مشابه این است که در روش محاسبه مقادیر پیچیده لازم نیست؛ این نکته تاثیر بسزایی در کاهش زمان مورد نیاز در انجام محاسبات را در پی خواهد داشت.

هرگاه N یک عملگر غیرخطی انقباضی باشد، یعنی داشته باشیم

$$\|N(x) - N(y)\| \leq k \|x - y\|, \quad 0 < k < 1, \quad (11)$$

آن گاه خواهیم داشت

$$\|q_{m+1}\| = \|N(q_0 + \dots + q_m) - N(q_0 + \dots + q_{m-1})\| \leq k \|q_m\| \leq \dots \leq k^m \|q_0\| \quad m = 0, 1, 2, \dots, n \quad (12)$$

این رابطه نشان می‌دهد که $\sum_{j=0}^{\infty} q_j$ یک سری مطلقاً همگراست که به صورت یکنواخت به جواب واقعی معادله همگراست. اثبات یکتایی این جواب نیز با به کارگیری قضیه نقطه ثابت باناخ [۲۵] به سادگی امکان پذیر است.

۴- تعیین جواب‌های دقیق معادله (۱)

فرض اصلی این روش بر این استوار است که جواب‌های معادله را می‌توان به فرم سالیتمونی زیر بیان کرد.

چندجمله‌ای به فرم $P(Z_1, Z_2, Z_3, Z_4) = 0$ حاصل می‌شود. با مساوی صفر قرار دادن تمامی ضرایب این چندجمله‌ای یک دستگاه غیرخطی از معادلات حاصل می‌شود.

گام چهارم: با استفاده از نرم افزارهای محاسبات نمادین نظیر میپل و متمتیکا می‌توان دستگاه غیرخطی حاصل را حل نمود تا کلیه ضرایب مجهول در نظر گرفته شده تعیین شوند.

گام پنجم: با استفاده از مقادیر به دست آمده و جایگذاری آن‌ها در روابط (۴) و (۵)، جواب‌های سالیتمونی دقیق برای معادله (۲) تعیین می‌شوند.

۳- روش حل معادله

در این بخش، به بیان جزئیات روش تکراری خواهیم پرداخت. این روش در منابع [۲۳-۲۴] معرفی شده است. برای بررسی مثال‌های بیشتر از کاربردهای این روش، می‌توان به منابع مراجعه کرد.

به منظور بیان روش، نخست معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیریم:

$$q = N(q) + f, \quad (6)$$

که در آن N یک اپراتور غیر خطی تعریف شده روی یک فضای باناخ است که به صورت $N: B \rightarrow B$ عمل می‌کند. تابع f نیز به شرایط اولیه معادله مربوط است. ایده اصلی در این روش تعیین جواب تقریبی برای معادله به فرم سری زیر است

$$q = \sum_{j=0}^{\infty} q_j. \quad (7)$$

به این منظور، ابتدا عملگر غیرخطی N را به صورت زیر بسط می‌دهیم

$$\begin{aligned} N(\sum_{j=0}^{\infty} q_j) &= N(q_0) + \\ &\sum_{j=1}^{\infty} [N(\sum_{k=0}^j q_k) - N(\sum_{k=0}^{j-1} q_k)]. \end{aligned} \quad (8)$$

سپس از معادلات (۷)، (۸) و (۶) داریم

با قراردادن این مقادیر در رابطه (۱۷)، نتیجه می‌شود

$$u(\varepsilon) = \frac{A_1 \sin(\varepsilon)}{\cos(\varepsilon)}$$

از این رو جواب دقیق معادله (۱)، به صورت زیر تعیین می‌شود

$$q_1(x,t) = \left(\frac{A_1 \sin(\varepsilon)}{\cos(\varepsilon)} \right) \times e^{i(\eta x - vt)}$$

که در آن

$$\varepsilon = kx + \frac{\sqrt{2k^2\alpha_3 + A_1^2}}{\sqrt{-2\alpha_2}} t$$

حالت ۲:

$$k = k, v = v,$$

$$\omega = \frac{k\sqrt{4\alpha_2\alpha_3v^2 - 8k^2\alpha_3^2 - 4\alpha_1\alpha_3v - 1}}{\sqrt{8k^2\alpha_2\alpha_3 - 4v^2\alpha_2^2 + 4v\alpha_1\alpha_2 - \alpha_1^2}}$$

$$A_0 = \frac{\sqrt{2}\sqrt{\alpha_1^2\alpha_3 + \alpha_2}k}{\sqrt{8k^2\alpha_2\alpha_3 - 4v^2\alpha_2^2 + 4v\alpha_1\alpha_2 - \alpha_1^2}}$$

$$A_1 = 0, B_1 = -\frac{2\sqrt{2}\sqrt{\alpha_1^2\alpha_3 + \alpha_2}k}{\sqrt{8k^2\alpha_2\alpha_3 - 4v^2\alpha_2^2 + 4v\alpha_1\alpha_2 - \alpha_1^2}}$$

با استفاده از این مقادیر در (۱۷)، نتیجه می‌شود

$$u(\varepsilon) = \frac{\sqrt{2}k(-\sin(\varepsilon) + \cos(\varepsilon))}{\sin(\varepsilon) + \cos(\varepsilon)} \frac{\sqrt{\alpha_1^2\alpha_3 + \alpha_2}}{\sqrt{8k^2\alpha_2\alpha_3 - 4v^2\alpha_2^2 + 4v\alpha_1\alpha_2 - \alpha_1^2}}$$

از این رو جواب دقیق معادله (۱)، به صورت زیر تعیین می‌شود

$$q_2(x,t) = \left(\frac{\sqrt{2}k(-\sin(\varepsilon) + \cos(\varepsilon))}{\sin(\varepsilon) + \cos(\varepsilon)} \frac{\sqrt{\alpha_1^2\alpha_3 + \alpha_2}}{\sqrt{8k^2\alpha_2\alpha_3 - 4v^2\alpha_2^2 + 4v\alpha_1\alpha_2 - \alpha_1^2}} \right) \times e^{i(\eta x - vt)}$$

که در آن

$$\varepsilon = x - \frac{\sqrt{4\alpha_2\alpha_3v^2 - 8k^2\alpha_3^2 - 4\alpha_1\alpha_3v - 1}}{\sqrt{8k^2\alpha_2\alpha_3 - 4v^2\alpha_2^2 + 4v\alpha_1\alpha_2 - \alpha_1^2}} t$$

$$q(x,t) = u(\varepsilon)e^{i\phi(x,t)}, \quad (13)$$

$$\varepsilon = kx - \omega t, \quad \phi = \eta x - vt,$$

که در آن ϕ ، η و v به ترتیب نشان دهنده‌ی مولفه فازی، فرکانس سالیتون و عدد موج سالیتونی هستند.

با جایگذاری رابطه (۱۳) در معادله (۱)، و تفکیک عبارت‌ها به قسمت‌های حقیقی و مختلط به ترتیب خواهیم داشت

$$(\alpha_1v - \eta - \alpha_2v^2 - \alpha_3\eta^2)u + (\alpha_2\omega^2 + \alpha_3k^2)u'' + u^3 + (2\eta k\alpha_3 + 2v\omega\alpha_2 - \omega\alpha_1 + k)iu' = 0 \quad (14)$$

از قسمت موهومی معادله (۱۴)، نتیجه می‌شود

$$\eta = \frac{\alpha_1\omega - k - 2\alpha_2v\omega}{2\alpha_3k}, \quad (15)$$

همچنین از قسمت حقیقی این معادله نتیجه می‌شود

$$(\alpha_2\omega^2 + \alpha_3k^2)u'' + (\alpha_1v - \eta - \alpha_2v^2 - \alpha_3\eta^2)u + u^3 = 0 \quad (16)$$

بنابراین، در ادامه کافی است تنها بر حل معادله (۱۶) تمرکز کنیم. با به کار بردن اصول تعادل در معادله (۱۶) بین دو عبارت u^3 و u'' نتیجه می‌گیریم $2 + M = 3M$ ، بنابراین خواهیم داشت $M = 1$.

با قرار دادن $M = 1$ در عبارت (۴) خواهیم داشت

$$u(\varepsilon) = A_0 + A_1\Phi(\varepsilon) + \frac{B_1}{\Phi(\varepsilon)} \quad (17)$$

با قرار دادن معادله (۱۷) در معادله (۱۶) و با دنبال کردن مراحل گفته شده برای روش در فصل، دسته جواب‌های نابدیهی زیر برای معادله (۱) حاصل می‌شوند:

دسته ۱: برای $r = [1+i, 1-i, 1, 1]$ و $s = [-i, i, -i, i]$ داریم

$$\Phi(\varepsilon) = \frac{\sin(\varepsilon) + \cos(\varepsilon)}{\cos(\varepsilon)} \quad (18)$$

حالت ۱:

$$k = k, v = \frac{\sqrt{2}k\sqrt{(4A_1^2\alpha_2 - \alpha_1^2)\alpha_3 - \alpha_2} + \alpha_1A_1}{2\alpha_2A_1},$$

$$\omega = -\frac{\sqrt{2k^2\alpha_3 + A_1^2}}{\sqrt{-2\alpha_2}}$$

$$\varphi = kx + \frac{\sqrt{2k^2\alpha_3 + A_1^2}}{\sqrt{-2\alpha_2}} t$$

حالت ۲:

$$k = k, v = v, \omega = \frac{ik\sqrt{8k^2\alpha_3^2 - 4\alpha_2\alpha_3v^2 + 4\alpha_1\alpha_3v + 1}}{\sqrt{8k^2\alpha_2\alpha_3 - 4v^2\alpha_2^2 + 4v\alpha_1\alpha_2 - \alpha_1^2}}$$

$$A_0 = 0, A_1 = 0, B_1 = \frac{k\sqrt{2\alpha_1^2\alpha_3 + 2\alpha_2}}{\sqrt{8k^2\alpha_2\alpha_3 - 4v^2\alpha_2^2 + 4v\alpha_1\alpha_2 - \alpha_1^2}}$$

با استفاده از این مقادیر در (۱۷)، نتیجه می‌شود

$$u(\varphi) = -\frac{k \sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} \sqrt{\frac{2\alpha_1^2\alpha_3 + 2\alpha_2}{8k^2\alpha_2\alpha_3 - 4v^2\alpha_2^2 + 4v\alpha_1\alpha_2 - \alpha_1^2}}$$

به این ترتیب، جواب دقیق زیر برای معادله (۱)، حاصل می‌شود

$$q_4(x, t) = \left(-k\beta \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} \right) \times e^{i(\eta x - vt)}$$

که در آن

دسته ۲: برای $s = [i, -i, i, -i]$ و $r = [i, i, 1, -1]$ داریم

$$\Phi(\varphi) = \frac{\cos(\varphi)}{\sin(\varphi)} \quad (۱۹)$$

حالت ۱:

$$k = k, v = \frac{k\sqrt{(-16A_1^2\alpha_2 - 2\alpha_1^2)\alpha_3 - 2\alpha_2 + \alpha_1A_1}}{2A_1\alpha_2}$$

$$\omega = -\frac{\sqrt{2k^2\alpha_3 + A_1^2}}{\sqrt{-2\alpha_2}}$$

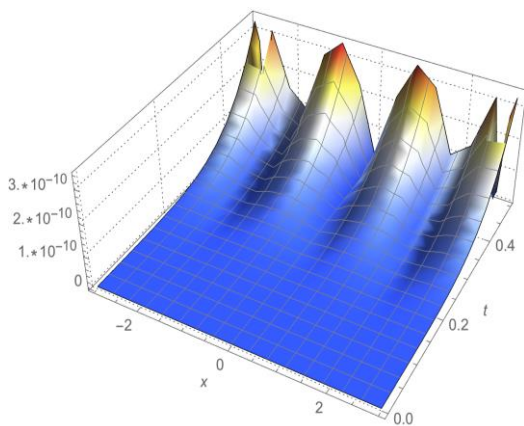
با جایگذاری این مقادیر در رابطه (۱۷)، نتیجه می‌شود

$$u(\varphi) = \frac{A_1}{\cos(\varphi)\sin(\varphi)}$$

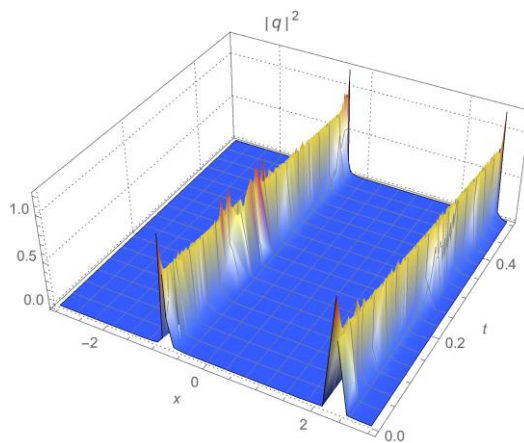
بنابراین جواب دقیق زیر برای معادله (۱)، حاصل می‌شود

$$q_3(x, t) = \left(\frac{A_1}{\cos(\varphi)\sin(\varphi)} \right) \times e^{i(\eta x - vt)}$$

که در آن



(ب)



(الف)

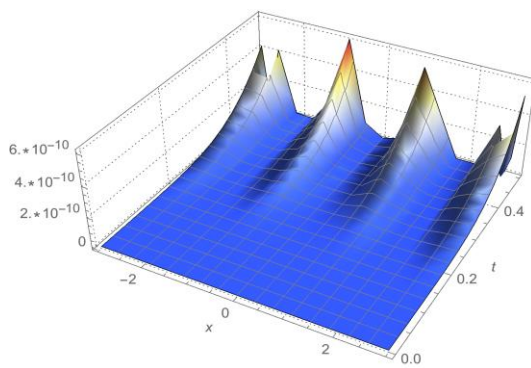
نمودار ۱. شمایل جواب دقیق $q_1(x, t)$ ، (ب) خطای حاصل از روش عددی؛ با در استفاده از مقادیر $\omega = 2$ ، $\kappa = 1$ و $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (1, -1, 2)$ و $v = 1$

دسته ۳: برای $s = [0, 0, 0, 1]$ و $r = [-1, 0, 1, 1]$ داریم

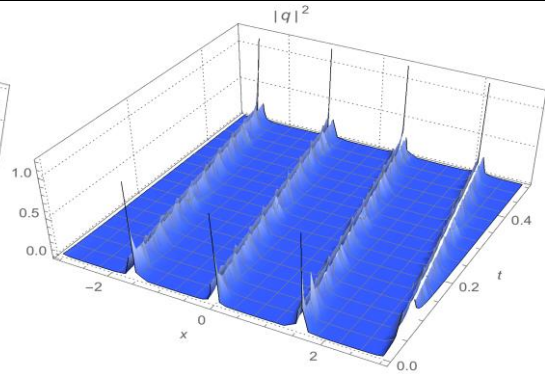
$$\Phi(\varphi) = -\frac{1}{1 + e^\varphi} \quad (۲۰)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{2\alpha_1^2\alpha_3 + 2\alpha_2}{8k^2\alpha_2\alpha_3 - 4v^2\alpha_2^2 + 4v\alpha_1\alpha_2 - \alpha_1^2}}$$

$$\varphi = x - \frac{\sqrt{4\alpha_2\alpha_3v^2 - 8k^2\alpha_3^2 - 4\alpha_1\alpha_3v - 1}}{\sqrt{8k^2\alpha_2\alpha_3 - 4v^2\alpha_2^2 + 4v\alpha_1\alpha_2 - \alpha_1^2}} t.$$



(ب)



(الف)

نمودار ۲. (الف) شمایل جواب دقیق $q_3(x,t)$ ، (ب) خطای حاصل از روش عددی؛ با در استفاده از مقادیر $\nu=1$ ، $\omega=1$ ، $\kappa=1$ و $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (1, -1, 2)$

حالت ۱:

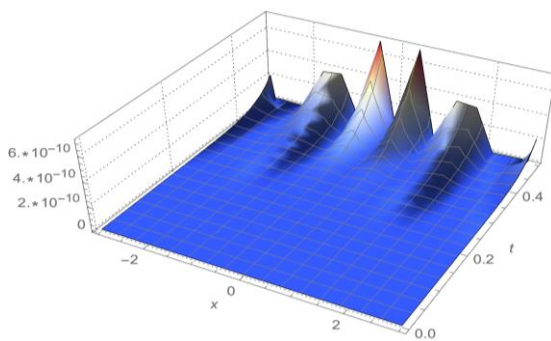
با استفاده از این مقادیر در (۱۷)، نتیجه می‌شود

$$u(\varkappa) = \frac{k}{2} \sqrt{\frac{-2\alpha_1^2\alpha_3 - 2\alpha_2}{2k^2\alpha_2\alpha_3 + 4\nu^2\alpha_2^2 - 4\nu\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1^2}} \frac{(e^{\varkappa} - 1)}{(e^{\varkappa} + 1)}$$

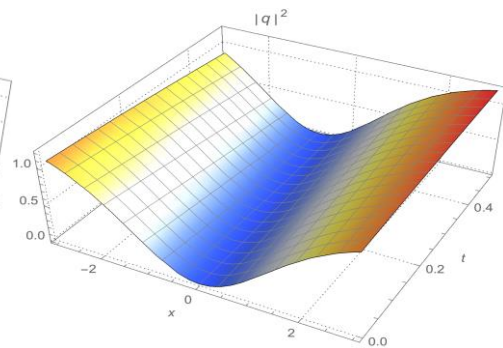
$$k = k, \nu = \nu, \omega = \frac{k\sqrt{4\alpha_1\alpha_3\nu - 2k^2\alpha_3^2 - 4\alpha_2\alpha_3\nu^2 + 1}}{\sqrt{2k^2\alpha_2\alpha_3 + 4\nu^2\alpha_2^2 - 4\nu\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1^2}}$$

$$A_0 = \frac{\sqrt{2}\sqrt{-\alpha_1^2\alpha_3 - \alpha_2}k}{2\sqrt{2k^2\alpha_2\alpha_3 + 4\nu^2\alpha_2^2 - 4\nu\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1^2}}$$

$$A_1 = \frac{\sqrt{2}\sqrt{-\alpha_1^2\alpha_3 - \alpha_2}k}{\sqrt{2k^2\alpha_2\alpha_3 + 4\nu^2\alpha_2^2 - 4\nu\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1^2}}, B_1 = 0.$$



(ب)



(الف)

نمودار ۳. (الف) شمایل جواب دقیق $q_6(x,t)$ ، (ب) خطای حاصل از روش عددی؛ با در استفاده از مقادیر $\omega=3$ ، $\kappa=1$ و $\nu=2$ و $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (1, -4, 6)$

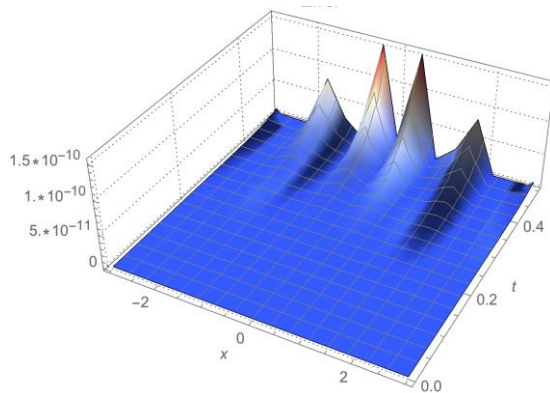
که در آن

$$\beta = \sqrt{\frac{-2\alpha_1^2\alpha_3 - 2\alpha_2}{2k^2\alpha_2\alpha_3 + 4\nu^2\alpha_2^2 - 4\nu\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1^2}}$$

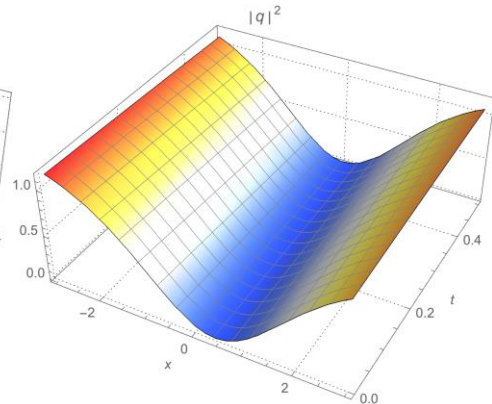
$$\varkappa = x - \frac{k\sqrt{4\alpha_1\alpha_3\nu - 2k^2\alpha_3^2 - 4\alpha_2\alpha_3\nu^2 + 1}}{\sqrt{2k^2\alpha_2\alpha_3 + 4\nu^2\alpha_2^2 - 4\nu\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1^2}}t.$$

از این رو جواب دقیق معادله (۱)، به صورت زیر تعیین می‌شود

$$q_5(x,t) = \left(\frac{k\beta e^{\varkappa} - 1}{2 e^{\varkappa} + 1} \right) \times e^{i(\eta x - \nu t)},$$



(ب)



(الف)

نمودار ۴: (الف) شمایل جواب دقیق $q_8(x,t)$ ، (ب) خطای حاصل از روش عددی؛ با در استفاده از مقادیر $\omega = 2$ ، $\kappa = 0.5$ و $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (-1, 2, -1)$ و $v = 1$

$$\Phi(\zeta) = \frac{e^\zeta}{1 + e^\zeta} \quad (22)$$

حالت ۱:

$$k = k, v = v, \omega = -\frac{\sqrt{4\alpha_1\alpha_3v - 2k^2\alpha_3^2 - 4\alpha_2\alpha_3v^2 + 1}}{\sqrt{2k^2\alpha_2\alpha_3 + 4v^2\alpha_2^2 - 4v\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1^2}}$$

$$A_0 = \frac{i\sqrt{2}\sqrt{\alpha_1^2\alpha_3 + \alpha_2k}}{2\sqrt{2k^2\alpha_2\alpha_3 + 4v^2\alpha_2^2 - 4v\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1^2}}$$

$$A_1 = \frac{-i\sqrt{2}\sqrt{\alpha_1^2\alpha_3 + \alpha_2k}}{\sqrt{2k^2\alpha_2\alpha_3 + 4v^2\alpha_2^2 - 4v\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1^2}}, B_1 = 0.$$

با استفاده از این مقادیر در (۱۷)، نتیجه می شود

$$u(\zeta) = -\frac{k}{2} \frac{\sqrt{-2\alpha_1^2\alpha_3 - 2\alpha_2} e^\zeta - 1}{\sqrt{2k^2\alpha_2\alpha_3 + 4v^2\alpha_2^2 - 4v\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1^2} e^\zeta + 1}$$

بنابراین جواب دقیق زیر برای معادله (۱)، حاصل می شود

$$q_7(x,t) = \left(-\frac{k\beta e^\zeta - 1}{2 e^\zeta + 1} \right) \times e^{i(\eta x - vt)}$$

که در آن

$$\beta = \sqrt{\frac{-2\alpha_1^2\alpha_3 - 2\alpha_2}{2k^2\alpha_2\alpha_3 + 4v^2\alpha_2^2 - 4v\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1^2}}$$

$$\zeta = x + \frac{\sqrt{4\alpha_1\alpha_3v - 2k^2\alpha_3^2 - 4\alpha_2\alpha_3v^2 + 1}}{\sqrt{2k^2\alpha_2\alpha_3 + 4v^2\alpha_2^2 - 4v\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1^2}} t.$$

دسته ۴: برای $s = [0, 1, 0, 1]$ و $r = [2, 3, 1, 1]$ داریم

$$\Phi(\zeta) = \frac{3e^\zeta + 2}{e^\zeta + 1} \quad (21)$$

حالت ۱:

$$k = k, v = \frac{\sqrt{(-2A_1^2\alpha_2 - 2\alpha_1^2)\alpha_3 - 2\alpha_2k + \alpha_1A_1}}{2\alpha_2A_1}$$

$$\omega = -\frac{\sqrt{2k^2\alpha_3 + A_1^2}}{\sqrt{-2\alpha_2}}, A_0 = -\frac{5}{2}A_1, A_1 = A_1, B_1 = 0.$$

با استفاده از این جوابها در عبارت (۱۷)، نتیجه می شود

$$u(\zeta) = \frac{A_1 e^\zeta - 1}{2 e^\zeta + 1}$$

از این رو جواب دقیق معادله (۱)، به صورت زیر تعیین می شود

$$q_6(x,t) = \left(\frac{A_1 e^\zeta - 1}{2 e^\zeta + 1} \right) \times e^{i(\eta x - vt)}$$

که در آن

$$\zeta = kx + \frac{\sqrt{2k^2\alpha_3 + A_1^2}}{\sqrt{-2\alpha_2}} t.$$

دسته ۵: برای $s = [0, 1, 0, 1]$ و $r = [0, 1, 1, 1]$ داریم

$$\Phi(\varkappa) = \frac{\cos(\varkappa) - \sin(\varkappa)}{\cos(\varkappa)}. \quad (24)$$

دسته ۶: برای $s = [0, 1, 0, 1]$ و $r = [-3, -2, 1, 1]$ داریم

$$\Phi(\varkappa) = \frac{-3 - 2e^{\varkappa}}{1 + e^{\varkappa}}. \quad (23)$$

حالت ۱:

$$k = k, v = v, \omega = \frac{k\sqrt{4\alpha_2\alpha_3v - 8k^2\alpha_3^2 - 4\alpha_1\alpha_3v - 1}}{\sqrt{8k^2\alpha_2\alpha_3 - 4v^2\alpha_2^2 + 4v\alpha_1\alpha_2 - \alpha_1^2}},$$

$$A_0 = \frac{\sqrt{2}\sqrt{\alpha_1^2\alpha_3 + \alpha_2}k}{\sqrt{8k^2\alpha_2\alpha_3 - 4v^2\alpha_2^2 + 4v\alpha_1\alpha_2 - \alpha_1^2}}, A_1 = 0,$$

$$B_1 = -\frac{2\sqrt{2}\sqrt{\alpha_1^2\alpha_3 + \alpha_2}k}{\sqrt{8k^2\alpha_2\alpha_3 - 4v^2\alpha_2^2 + 4v\alpha_1\alpha_2 - \alpha_1^2}}.$$

با استفاده از این مقادیر در (۱۷)، نتیجه می‌شود

$$u(\varkappa) = \frac{k\beta\sqrt{2}(\sin(\varkappa) + \cos(\varkappa))}{-\sin(\varkappa) + \cos(\varkappa)}.$$

در این حالت جواب دقیق زیر برای معادله (۱)، به دست می‌آید

$$q_9(x, t) = \left(\frac{k\beta\sqrt{2}(\sin(\varkappa) + \cos(\varkappa))}{-\sin(\varkappa) + \cos(\varkappa)} \right) \times e^{i(\eta x - vt)},$$

که در آن

$$\beta = \sqrt{\frac{\alpha_1^2\alpha_3 + \alpha_2}{8k^2\alpha_2\alpha_3 - 4v^2\alpha_2^2 + 4v\alpha_1\alpha_2 - \alpha_1^2}},$$

$$\varkappa = x - \frac{k\sqrt{4\alpha_2\alpha_3v - 8k^2\alpha_3^2 - 4\alpha_1\alpha_3v - 1}}{\sqrt{8k^2\alpha_2\alpha_3 - 4v^2\alpha_2^2 + 4v\alpha_1\alpha_2 - \alpha_1^2}}t.$$

دسته ۸: برای $s = [-i, i, -i, i]$ و $r = [i - 2, -i - 2, 1, 1]$ داریم

حالت ۱:

$$k = k, v = v, \omega = -\frac{\sqrt{4\alpha_1\alpha_3v - 2k^2\alpha_3^2 - 4\alpha_2\alpha_3v^2 + 1}}{\sqrt{2k^2\alpha_2\alpha_3 + 4v^2\alpha_2^2 - 4v\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1^2}},$$

$$A_0 = \frac{5\sqrt{2}\sqrt{-\alpha_1^2\alpha_3 - \alpha_2}k}{2\sqrt{2k^2\alpha_2\alpha_3 + 4v^2\alpha_2^2 - 4v\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1^2}}, A_1 = 0,$$

$$B_1 = \frac{6\sqrt{2}\sqrt{-\alpha_1^2\alpha_3 - \alpha_2}k}{\sqrt{2k^2\alpha_2\alpha_3 + 4v^2\alpha_2^2 - 4v\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1^2}}.$$

با استفاده از این مقادیر در (۱۷)، نتیجه می‌شود

$$u(\varkappa) = \frac{k}{2} \sqrt{\frac{-2\alpha_1^2\alpha_3 - 2\alpha_2}{2k^2\alpha_2\alpha_3 + 4v^2\alpha_2^2 - 4v\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1^2}} \frac{-3 + 2e^{\varkappa}}{3 + 2e^{\varkappa}}.$$

از این رو جواب دقیق معادله (۱)، به صورت زیر تعیین می‌شود

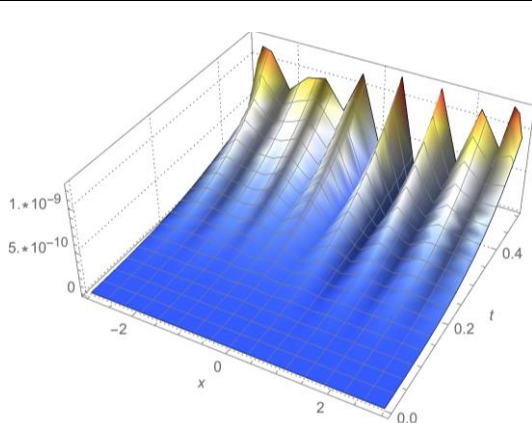
$$q_8(x, t) = \left(\frac{k\beta - 3 + 2e^{\varkappa}}{2(3 + 2e^{\varkappa})} \right) \times e^{i(\eta x - vt)},$$

که در آن

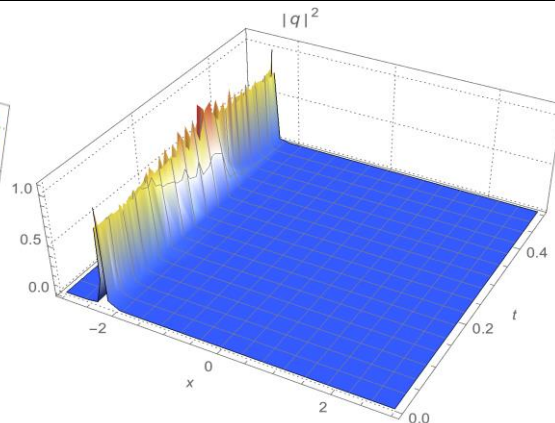
$$\beta = \sqrt{\frac{-2\alpha_1^2\alpha_3 - 2\alpha_2}{2k^2\alpha_2\alpha_3 + 4v^2\alpha_2^2 - 4v\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1^2}},$$

$$\varkappa = x + \frac{\sqrt{4\alpha_1\alpha_3v - 2k^2\alpha_3^2 - 4\alpha_2\alpha_3v^2 + 1}}{\sqrt{2k^2\alpha_2\alpha_3 + 4v^2\alpha_2^2 - 4v\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1^2}}t.$$

دسته ۷: برای $s = [-i, i, -i, i]$ و $r = [1 - i, 1 + i, 1, 1]$ داریم



(ب)



(الف)

نمودار ۵. (الف) شمایل جواب دقیق $q_{11}(x,t)$ ، (ب) خطای حاصل از روش عددی؛ با در استفاده از مقادیر $\omega = 2$ ، $\kappa = 0.25$ ، $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (1, -9, 2)$ و $\nu = 2$

با استفاده از این مقادیر در (۱۷)، نتیجه می‌شود.

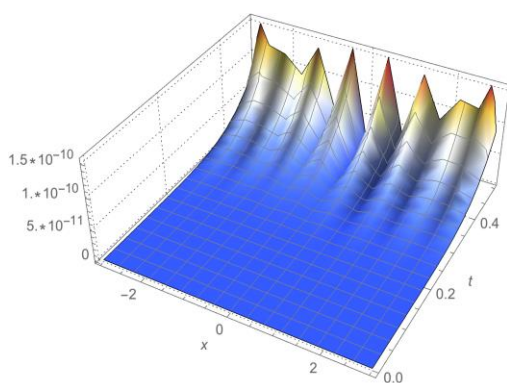
$$\Phi(\varphi) = \frac{\sin(\varphi) - 2\cos(\varphi)}{\cos(\varphi)} \quad (25)$$

حالت ۱:

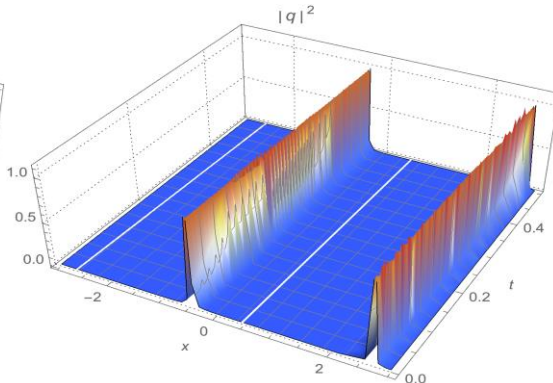
$$k = k, \nu = \nu, \omega = \frac{k\sqrt{4\alpha_2\alpha_3\nu - 8k^2\alpha_3^2 - 4\alpha_1\alpha_3\nu - 1}}{\sqrt{8k^2\alpha_2\alpha_3 - 4\nu^2\alpha_2^2 + 4\nu\alpha_1\alpha_2 - \alpha_1^2}}$$

$$A_0 = \frac{2\sqrt{2}\sqrt{\alpha_1^2\alpha_3 + \alpha_2}k}{\sqrt{8k^2\alpha_2\alpha_3 - 4\nu^2\alpha_2^2 + 4\nu\alpha_1\alpha_2 - \alpha_1^2}}, A_1 = 0,$$

$$B_1 = \frac{5\sqrt{2}\sqrt{\alpha_1^2\alpha_3 + \alpha_2}k}{\sqrt{8k^2\alpha_2\alpha_3 - 4\nu^2\alpha_2^2 + 4\nu\alpha_1\alpha_2 - \alpha_1^2}}$$



(ب)



(الف)

نمودار ۶. (الف) شمایل جواب دقیق $q_{13}(x,t)$ ، (ب) خطای حاصل از روش عددی؛ با در استفاده از مقادیر $\omega = 1$ ، $\kappa = 0.25$ ، $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (-1, 2, -1)$ و $\nu = 1$

داریم، $s = [-i, i, -i, i]$

$$\Phi(\chi) = \frac{2\sin(\chi) + \cos(\chi)}{\sin(\chi)} \quad (۲۷)$$

حالت ۱:

$$k = k, v = v, \omega = \frac{k\sqrt{4\alpha_2\alpha_3v^2 - 8k^2\alpha_3^2 - 4\alpha_1\alpha_3v - 1}}{\sqrt{8k^2\alpha_2\alpha_3 - 4v^2\alpha_2^2 + 4v\alpha_1\alpha_2 - \alpha_1^2}}$$

$$A_0 = \frac{2\sqrt{\alpha_1^2\alpha_3 + \alpha_2}\sqrt{2k}}{\sqrt{8k^2\alpha_2\alpha_3 - 4v^2\alpha_2^2 + 4v\alpha_1\alpha_2 - \alpha_1^2}}, A_1 = 0,$$

$$B_1 = -\frac{5\sqrt{\alpha_1^2\alpha_3 + \alpha_2}\sqrt{2k}}{\sqrt{8k^2\alpha_2\alpha_3 - 4v^2\alpha_2^2 + 4v\alpha_1\alpha_2 - \alpha_1^2}}.$$

با جایگذاری این مقادیر در رابطه (۱۷)، نتیجه می‌شود

$$u(\chi) = \frac{k\beta\sqrt{2}(5\cos(\chi)\sin(\chi) - 2)}{5\cos^2(\chi) - 4}.$$

بنابراین جواب دقیق معادله (۱)، به صورت زیر تعیین می‌شود

$$q_{10}(x, t) = \left(\frac{k\beta\sqrt{2}(5\cos(\chi)\sin(\chi) - 2)}{5\cos^2(\chi) - 4} \right) \times e^{i(\eta x - vt)},$$

که در آن

$$\beta = \sqrt{\frac{\alpha_1^2\alpha_3 + \alpha_2}{8k^2\alpha_2\alpha_3 - 4v^2\alpha_2^2 + 4v\alpha_1\alpha_2 - \alpha_1^2}},$$

$$\chi = x - \frac{k\sqrt{4\alpha_2\alpha_3v^2 - 8k^2\alpha_3^2 - 4\alpha_1\alpha_3v - 1}}{\sqrt{8k^2\alpha_2\alpha_3 - 4v^2\alpha_2^2 + 4v\alpha_1\alpha_2 - \alpha_1^2}}t.$$

دسته ۱۱: برای $r = [1 - i, -1 - i, 1, -1]$ و

داریم، $s = [-i, i, -i, i]$

$$\Phi(\chi) = \frac{\sin(\chi) + \cos(\chi)}{\sin(\chi)} \quad (۲۸)$$

حالت ۱:

$$k = k, v = v, \omega = \frac{k\sqrt{4\alpha_2\alpha_3v^2 - 8k^2\alpha_3^2 - 4\alpha_1\alpha_3v - 1}}{\sqrt{8k^2\alpha_2\alpha_3 - 4v^2\alpha_2^2 + 4v\alpha_1\alpha_2 - \alpha_1^2}}$$

$$A_0 = \frac{\sqrt{\alpha_1^2\alpha_3 + \alpha_2}\sqrt{2k}}{\sqrt{8k^2\alpha_2\alpha_3 - 4v^2\alpha_2^2 + 4v\alpha_1\alpha_2 - \alpha_1^2}}, A_1 = 0,$$

$$B_1 = -\frac{2\sqrt{\alpha_1^2\alpha_3 + \alpha_2}\sqrt{2k}}{\sqrt{8k^2\alpha_2\alpha_3 - 4v^2\alpha_2^2 + 4v\alpha_1\alpha_2 - \alpha_1^2}}.$$

$$u(\chi) = \frac{k\beta\sqrt{2}(2\sin(\chi) + \cos(\chi))}{2\cos(\chi) - \sin(\chi)}.$$

از این رو جواب دقیق معادله (۱)، به صورت زیر حاصل می‌شود

$$q_{10}(x, t) = \left(\frac{k\beta\sqrt{2}(2\sin(\chi) + \cos(\chi))}{2\cos(\chi) - \sin(\chi)} \right) \times e^{i(\eta x - vt)},$$

که در آن

$$\beta = \sqrt{\frac{\alpha_1^2\alpha_3 + \alpha_2}{8k^2\alpha_2\alpha_3 - 4v^2\alpha_2^2 + 4v\alpha_1\alpha_2 - \alpha_1^2}},$$

$$\chi = x - \frac{k\sqrt{4\alpha_2\alpha_3v^2 - 8k^2\alpha_3^2 - 4\alpha_1\alpha_3v - 1}}{\sqrt{8k^2\alpha_2\alpha_3 - 4v^2\alpha_2^2 + 4v\alpha_1\alpha_2 - \alpha_1^2}}t.$$

دسته ۹: برای $r = [i + 2, -i + 2, 1, 1]$ و $s = [-i, i, -i, i]$ داریم

$$\Phi(\chi) = \frac{\sin(\chi) + 2\cos(\chi)}{\cos(\chi)} \quad (۲۶)$$

حالت ۱:

$$k = k, v = \frac{2\sqrt{2}k\sqrt{(A_0^2\alpha_2 - \alpha_1^2)\alpha_3 - \alpha_2} + \alpha_1 A_0}{2\alpha_2 A_0},$$

$$\omega = -\frac{\sqrt{2}\sqrt{8k^2\alpha_3 + A_0^2}}{4\sqrt{-\alpha_2}}, A_0 = A_0, A_1 = 0, B_1 = -\frac{5}{2}A_0.$$

پس از قراردادن این مقادیر در (۱۷)، داریم

$$u(\chi) = -\frac{A_0(\cos(\chi) - 2\sin(\chi))}{2\sin(\chi) + 4\cos(\chi)}.$$

بنابراین جواب دقیق معادله (۱)، به صورت زیر تعیین می‌شود

$$q_{11}(x, t) = \left(-\frac{A_0(\cos(\chi) - 2\sin(\chi))}{2\sin(\chi) + 4\cos(\chi)} \right) \times e^{i(\eta x - vt)},$$

که در آن

$$\chi = kx + \frac{\sqrt{2}\sqrt{8k^2\alpha_3 + A_0^2}}{4\sqrt{-\alpha_2}}t.$$

دسته ۱۰: برای $r = [2 - i, -2 - i, 1, -1]$ و

نکته ۱: صحت تمامی جواب‌های دقیق به دست آمده با جایگذاری مستقیم آن‌ها در معادله اصلی بررسی شده‌اند.

نکته ۲: تمامی نتایج و جواب‌های دقیق به دست آمده در این مقاله جدید هستند و برای بار اول ارائه می‌شود.

۵- تعیین جواب‌های عددی معادله (۱)
با استفاده از معادله (۱۰) و دنبال کردن مراحل روش، روند‌های تکراری زیر در تقریب جواب معادله حاصل می‌شود.

$$q_0(x,t) = \left(\frac{\alpha_2 + i\alpha_1}{\alpha_2}\right)q(x,0) + t \frac{\partial q}{\partial t}(x,0),$$

$$q_1(x,t) = -i \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \int_0^t q_0(x,s) ds$$

$$- \frac{1}{\alpha_2} \int_0^t \int_0^t \left(i \frac{\partial q_0}{\partial x} + \alpha_3 \frac{\partial^2 q_0}{\partial x^2} + |q_0|^2 q_0 \right) ds dr,$$

و نیز برای $m=1,2,\dots$ خواهیم داشت

$$q_{m+1}(x,t) = \sum_{j=0}^m \left(-i \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \int_0^t q_j(x,s) ds \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\alpha_2} \int_0^t \int_0^t \left(i \frac{\partial q_j}{\partial x} + \alpha_3 \frac{\partial^2 q_j}{\partial x^2} + |q_j|^2 q_j \right) ds dr \right)$$

$$- \sum_{j=0}^{m-1} \left(-i \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \int_0^t q_j(x,s) ds \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\alpha_2} \int_0^t \int_0^t \left(i \frac{\partial q_j}{\partial x} + \alpha_3 \frac{\partial^2 q_j}{\partial x^2} + |q_j|^2 q_j \right) ds dr \right).$$

سرانجام، جواب دقیق معادله (۱) به صورت زیر به دست می‌آید

$$q(x,t) = q_0(x,t) + \sum_{j=1}^{\infty} q_j(x,t). \quad (30)$$

با در نظر گرفتن m جمله اول بسط (۳۲)، یک جواب تقریبی برای معادله به صورت زیر تعیین می‌شود.

$$q(x,t) = \sum_{j=0}^{m-1} q_j(x,t). \quad (31)$$

۶- نتایج عددی

به منظور بررسی رفتارهای دینامیکی جواب‌های دقیق به دست آمده در بخش ۴ و نیز بررسی دقت جواب‌های عددی

با جایگذاری این مقادیر در (۱۷)، داریم

$$u(\varphi) = \frac{k\beta\sqrt{2}(2\cos(\varphi)\sin(\varphi)-1)}{2\cos^2(\varphi)-1}.$$

از این رو جواب دقیق معادله (۱)، به صورت زیر تعیین می‌شود

$$q_{13}(x,t) = \left(\frac{k\beta\sqrt{2}(2\cos(\varphi)\sin(\varphi)-1)}{2\cos^2(\varphi)-1} \right) \times e^{i(\eta x - vt)},$$

که در آن

$$\beta = \sqrt{\frac{\alpha_1^2 \alpha_3 + \alpha_2}{8k^2 \alpha_2 \alpha_3 - 4v^2 \alpha_2^2 + 4v\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_1^2}},$$

$$\varphi = x - \frac{\sqrt{4\alpha_2 \alpha_3 v^2 - 8k^2 \alpha_3^2 - 4\alpha_1 \alpha_3 v - 1}}{\sqrt{8k^2 \alpha_2 \alpha_3 - 4v^2 \alpha_2^2 + 4v\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_1^2}} t.$$

دسته ۱۲: برای $s=[i,-i,i,-i]$ و $r=[i,-i,1,1]$ داریم

$$\Phi(\varphi) = -\frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)}. \quad (29)$$

حالت ۱:

$$k = k, v = v, \omega = \frac{k\sqrt{4\alpha_2 \alpha_3 v^2 - 8k^2 \alpha_3^2 - 4\alpha_1 \alpha_3 v - 1}}{\sqrt{8k^2 \alpha_2 \alpha_3 - 4v^2 \alpha_2^2 + 4v\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_1^2}},$$

$$A_0 = 0, A_1 = \frac{\sqrt{2\alpha_1^2 \alpha_3 + 2\alpha_2} k}{\sqrt{8k^2 \alpha_2 \alpha_3 - 4v^2 \alpha_2^2 + 4v\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_1^2}}, B_1 = 0.$$

پس از قرار دادن این مقادیر در (۱۷)، خواهیم داشت

$$u(\varphi) = \frac{\sqrt{2}\beta k \sin(\varphi)}{\cos(\varphi)}.$$

در این حالت نیز جوابی دقیق برای معادله (۱)، به صورت زیر حاصل می‌شود

$$q_{14}(x,t) = \left(\frac{\sqrt{2}\beta k \sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} \right) \times e^{i(\eta x - vt)},$$

که در آن

$$\beta = \sqrt{\frac{\alpha_1^2 \alpha_3 + \alpha_2}{8k^2 \alpha_2 \alpha_3 - 4v^2 \alpha_2^2 + 4v\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_1^2}},$$

$$\varphi = x - \frac{\sqrt{4\alpha_2 \alpha_3 v^2 - 8k^2 \alpha_3^2 - 4\alpha_1 \alpha_3 v - 1}}{\sqrt{8k^2 \alpha_2 \alpha_3 - 4v^2 \alpha_2^2 + 4v\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_1^2}} t.$$

به دست آمده در بخش ۵ نمودارهای ۱-۶ ترسیم شده‌اند. تعداد تکرارهای استفاده شده در روش عددی برابر $m = 12$ در نظر گرفته شده است.

نتیجه گیری

هدف اصلی این مقاله ارائه جواب‌های جدید دقیق و عددی برای یک فرم تعمیم یافته از معادلات غیرخطی شرودینگر است. روش تحلیلی به کار رفته GERFM است. درستی کلیه جواب‌های دقیق ارائه شده با استفاده از نرم افزار محاسبات نمادین متمتیکا بررسی شده‌اند. و ملاحظه شد که همگی آن‌ها در معادله اصلی صدق می‌کنند. به علاوه یک روند تکراری عددی در تعیین جواب تقریبی این معادله ارائه شده است. اهمیت نتایج این پژوهش مربوط به ارائه دسته‌های جدید از جواب‌های دقیق برای این معادله است. روش‌های استفاده شده را می‌توان در حل سایر معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی در ریاضی، فیزیک و مهندسی غیرخطی نیز به کار برد.

فهرست منابع

- [8] M. Arshad and Aly Seadawy, and Dianchen Lu, Modulation stability and optical soliton solutions of nonlinear Schrödinger equation with higher order dispersion and nonlinear terms and its applications, Superlattices and Microstructures 112 (2017) 422-434
- [9] Muhammad Nasir Ali, Aly R. Seadawy, Syed Muhammad Husnine, Kalim U. Tariq, Optical pulse propagation in monomode fibers with higher order nonlinear Schrödinger equation, Optik, 156 (2018) 356-364.
- [10] G. Witham, Linear and Nonlinear Waves, Wiley, New York, (1974).
- [11] G.P. Agrawal Nonlinear Fiber Optics (fifth ed.), Academic Press, New York (2013).
- [12] J.M. Christian, G.S. McDonald, T.F. Hodgkinson, P. Chamorro-Posada, Wave envelopes with second-order spatiotemporal dispersion. II. Modulational instabilities and dark Kerr solitons, Phys. Rev. A 86 (2012) 023838023839.
- [13] Kalim Ul-Haq Tariq and Aly Seadawy, Optical soliton solutions of higher order nonlinear Schrödinger equation in monomode fibers and its applications, Optik, 154 (2018) 785-798.
- [14] Aly Seadawy, Modulation instability analysis for the generalized derivative higher order nonlinear Schrödinger equation and its the bright and dark soliton solutions, Journal of Electromagnetic Waves and Applications, 31(2017) 14: 1353-1362.
- [15] M. Inc, A. I. Aliyu, A. Yusuf, D. Baleanu, Optical solitons, explicit solutions and modulation instability analysis with second-order spatio-temporal dispersion, Eur. Phys. J. Plus 132 (2017) 528.
- [1] Aly Seadawy, The generalized nonlinear higher order of KdV equations from the higher order nonlinear Schrödinger equation and its solutions, Optik, 139 (2017) 31-43.
- [2] M. Arshad, Aly Seadawy and Dianchen Lu, Exact Bright-Dark solitary wave solutions of the higher-order cubic-quintic nonlinear Schrödinger equation and its stability, Optik, 138 (2017) 40-49.
- [3] Aly Seadawy and Dianchen Lu, Bright and dark solitary wave soliton solutions for the generalized higher order nonlinear Schrödinger equation and its stability, Results in Physics 7 (2017) 43-48.
- [4] S. Kheybari, M.T. Darvishi, M.S. Hashemi, Numerical simulation for the space-fractional diffusion equations, Applied Mathematics and Computation 348, 57-69
- [5] M.S. Hashemi, Z Balmeh, On invariant analysis and conservation laws of the time fractional variant Boussinesq and coupled Boussinesq-Burger's equations, The European Physical Journal Plus 133 (10), 427
- [6] Asghar Ali, Aly Seadawy and Dianchen Lu, Soliton solutions of the nonlinear Schrödinger equation with the dual power law nonlinearity and resonant nonlinear Schrödinger equation and their modulation instability analysis, Optik , 145 (2017) 79-88.
- [7] M. Arshad, Aly Seadawy and Dianchen Lu, Elliptic function and Solitary Wave solutions of the higher-order nonlinear Schrödinger dynamical equation with fourth-order dispersion and cubic-quintic nonlinearity and its stability, The European Physical Journal Plus, (2017) 132: 371.

- [24] S. Bhalekar, V. Daftardar-Gejji, Convergence of the new iterative method, *Int. J. of Differential Equations*, (2011), Article ID 989065.
- [25] E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley & Sons, New York (1978).
- [16] B. Ghanbari, M. Inc. A new generalized exponential rational function method to find exact special solutions for the resonance nonlinear Schrödinger equation, *Eur. Phys. J. Plus.*, (2018), 133, 1-19.
- [17] M.S. Osman, B. Ghanbari, New optical solitary wave solutions of Fokas-Lenells equation in presence of perturbation terms by a novel approach. *Optik* 2018, 175, 328-333.
- [18] B. Ghanbari, N. Raza, An analytical method for soliton solutions of perturbed Schrödinger's equation with quadratic-cubic nonlinearity. *Mod. Phys. Lett. B* 2019, 33.
- [19] M.S. Osman, Behzad Ghanbari and J.A.T. Machado New complex waves in nonlinear optics based on the complex Ginzburg-Landau equation with Kerr law nonlinearity, *Eur. Phys. J. Plus* (2019) 134: 20.
- [20] B. Ghanbari, A. Yusuf, M. Inc, D. Baleanu, The new exact solitary wave solutions and stability analysis for the $(2 + 1)$ -dimensional Zakharov-Kuznetsov equation, *Advances in difference equations* (2019) 2019:49.
- [21] B. Ghanbari, Abundant soliton solutions for the Hirota-Maccari equation via the generalized exponential rational function method, *Modern Physics Letters B* (2019),1950106.
- [22] B. Ghanbari, M. Inc, L. Rada, Solitary wave solutions to the tzitzeica type equations obtained by a new efficient approach, *Journal of Applied Analysis and Computation*, 9(2) 2019, 1-22.
- [23] V. Daftardar-Gejji, H. Jafari, An iterative method for solving nonlinear functional equations, *J. Math. Anal. Appl.*,316 (2006), 753-763.