

برخی قضایای نقطه ثابت در فضاها b - متریک C^* - جبر-مقدار

زهرا قربانی^۱، جواد برادران^۲

(^{۲۱}) گروه ریاضی، دانشگاه چهارم، چهارم، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۸/۰۲/۱۲ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۸/۰۶/۳۰

چکیده

در این مقاله مفاهیم پیوسته مداری و تام مداری روی فضای متریک C^* - جبر-مقدار تعریف می‌کنیم. اگر T یک نگاشت پیوسته مداری باشد، نشان می‌دهیم که تحت شرایطی هر دنباله کوشی به فرم $\{T^n(x)\}$ به یک نقطه ثابت T همگرا است. سپس ثابت می‌کنیم که تحت چه شرایطی یک نگاشت پیوسته مداری روی یک فضای b - متریک C^* - جبر-مقدار دارای نقطه تناوبی یا حداقل نقطه ثابت است. همچنین ثابت می‌کنیم اگر T یک خود-نگاشت روی فضای متریک C^* - جبر-مقدار (X, \mathbb{A}, d) باشد و نقطه $x \in X$ وجود داشته باشد به طوری که $x \neq T^2(x)$ و T دارای شرایط دیگری نیز باشد، آنگاه T دارای نقطه ثابت است.

واژه‌های کلیدی: نقطه ثابت، پیوسته مداری، نقطه تناوبی، فضای b - متریک C^* - جبر-مقدار.

۱- مقدمه

باختین [۱] در سال ۱۹۸۹ فضای b -متریک را به عنوان یک تعمیم از فضای متریک معرفی کرد. از آن زمان به بعد فضاهای تعمیم یافته‌ی دیگری مانند فضاهای b -متریک-متشابه [۷] معرفی شدند. اخیراً، ما و جیانگ [۸] مفهوم فضای b -متریک C^* -جبر-مقدار که تعمیم مفهوم فضاهای b -متریک است را معرفی کردند و در این فضای جدید قضایای نقطه ثابت را برای یک خود-نگاشت با شرایط انقباضی اثبات نمودند کامران و همکاران [۶] نیز در سال ۲۰۱۶ اصل انقباض باناخ را روی چنین فضاهایی تعمیم دادند.

اکنون نمادها، تعاریف اولیه و برخی نتایج بدست آمده روی C^* -جبرها را معرفی می‌نماییم. جزئیات بیشتر را می‌توان در مراجع [۹، ۵] یافت.

فضای برداری \mathbb{A} همراه با نگاشت دوخطی $\mathbb{A} \times \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ با ضابطه‌ی $(a, b) \mapsto ab$ یک جبر شرکت‌پذیر (به اختصار یک جبر) نامیده می‌شود، هرگاه به ازای هر $a, b, c \in \mathbb{A}$

$$a(bc) = (ab)c.$$

زیرفضای برداری \mathbb{B} از \mathbb{A} به‌قسمی که نسبت به عمل ضرب تعریف شده توسط نگاشت دوخطی فوق بسته باشد یک زیرجبر \mathbb{A} نامیده می‌شود. نرم $\|\cdot\|$ روی جبر \mathbb{A} زیرضربی گفته می‌شود در صورتی که به ازای هر $a, b \in \mathbb{A}$

$$\|ab\| \leq \|a\| \|b\|.$$

در این حالت زوج $(\mathbb{A}, \|\cdot\|)$ یک جبر نرم‌مدار نامیده می‌شود. فرض کنیم \mathbb{A} یک جبر باشد. نگاشت مزدوج خطی از \mathbb{A} بتوی \mathbb{A} با ضابطه‌ی $a \mapsto a^*$ به طوری که برای هر $a, b \in \mathbb{A}$ داشته باشیم:

$$(a^*)^* = a \quad \text{و} \quad (ab)^* = b^* a^*,$$

یک برگشت روی \mathbb{A} نامیده می‌شود و زوج $(\mathbb{A}, *)$ را جبر برگشت یا $*$ -جبر می‌نامند. عضو a در $*$ -جبر \mathbb{A} خود الحاقی یا هرمیتی گویند، هرگاه $a^* = a$. مجموعه‌ی تمام عضوهای هرمیتی \mathbb{A} با \mathbb{A}_h نشان داده می‌شود. $a \in \mathbb{A}$ معکوس‌پذیر است، هرگاه عضوی مانند b در \mathbb{A}

وجود داشته باشد به طوری که $ab = ba = 1_{\mathbb{A}}$. در این صورت b منحصر به فرد است و با نماد a^{-1} نوشته می‌شود. مجموعه‌ی تمام عضوهای معکوس‌پذیر \mathbb{A} را با نماد $Inv(\mathbb{A})$ نشان می‌دهند. $*$ -جبر کامل \mathbb{A} همراه با نرم زیرضربی به‌قسمی که برای هر $a \in \mathbb{A}$ داشته باشیم:

$$\|a^*\| = \|a\|,$$

یک $*$ -جبر باناخ نامیده می‌شود. اگر \mathbb{A} دارای عضو همانی $1_{\mathbb{A}}$ باشد به طوری که $\|1_{\mathbb{A}}\| = 1$ ، آنگاه \mathbb{A} یک $*$ -جبر باناخ یکانی است. اگر در $*$ -جبر باناخ \mathbb{A} به ازای هر $a \in \mathbb{A}$ داشته باشیم $\|a^* a\| = \|a\|^2$ ، آنگاه \mathbb{A} به عنوان یک C^* -جبر شناخته می‌شود.

اگر \mathbb{A} یک C^* -جبر و $a \in \mathbb{A}$ ، آنگاه عضو a نرمال گوئیم، هرگاه $a^* a = a a^*$. همچنین a یکانی است، هرگاه $a^* a = a a^* = 1_{\mathbb{A}}$.

عضو $a \in \mathbb{A}$ را مثبت گوئیم، اگر a هرمیتی باشد و $\sigma(a) \subset \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ که در آن مجموعه $\sigma(a) = \{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda 1_{\mathbb{A}} - a \notin Inv(\mathbb{A})\}$,

طیف a نامیده می‌شود. مجموعه‌ی تمام عضوهای مثبت C^* -جبر \mathbb{A} را با نماد \mathbb{A}_+ نشان می‌دهیم.

اینک می‌توان به ازای هر $a, b \in \mathbb{A}$ یک ترتیب جزئی طبیعی روی C^* -جبر \mathbb{A} بصورت زیر تعریف نمود:

$$a \leq b \quad \text{اگر} \quad b - a \in \mathbb{A}_+.$$

اگر عضو صفر C^* -جبر \mathbb{A} با \mathbb{A} نمایش داده شود و $a \in \mathbb{A}_+$ ، آنگاه می‌نویسیم $a \geq 0_{\mathbb{A}}$.

گزاره ۱-۱: اگر \mathbb{A} یک C^* -جبر یکانی و $a, b \in \mathbb{A}_h$ آنگاه $\sigma(ab) \subseteq \sigma(a)\sigma(b)$.

اثبات: به گزاره ۱۰-۲-۳ مرجع [۵] مراجعه شود.

گزاره ۲-۱: اگر \mathbb{A} یک C^* -جبر یکانی و $x \in \mathbb{A}_h$ آنگاه $\|x\| 1_{\mathbb{A}} \pm x \in \mathbb{A}_+$.

اثبات: به گزاره ۳-۲-۴ مرجع [۵] مراجعه شود.

$x, y, z \in X$ در شرایط زیر صدق کند:

1. $d_b(x, y) = 0_{\mathbb{A}}$ اگر و تنها اگر $x = y$.
2. $d_b(x, y) = d_b(y, x)$.
3. $d_b(x, y) \leq b[d_b(x, z) + d_b(z, y)]$.

در این صورت سه تایی (X, \mathbb{A}, d_b) یک فضای b - متریک C^* - جبر-مقدار با ضریب b نامیده می‌شود. تعریف زیر نتیجه‌ی طبیعی مفاهیم مشابه در فضاهای متریک C^* - جبر-مقدار است:

تعریف ۱-۸: فرض کنیم (X, \mathbb{A}, d_b) یک فضای

b -متریک C^* - جبر-مقدار، $\{x_n\}$ یک دنباله در X و $x \in X$ در این صورت

1. دنباله $\{x_n\}$ همگرا به x نسبت به \mathbb{A} گویند، هرگاه برای هر $\varepsilon > 0$ یک $N \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $n > N$ داشته باشیم $\|d_b(x_n, x)\| < \varepsilon$ در این صورت می‌نویسیم $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ یا $x_n \rightarrow x$.

2. دنباله $\{x_n\}$ را یک دنباله کوشی نسبت به \mathbb{A} گویند، اگر به ازای هر $\varepsilon > 0$ یک $N \in \mathbb{N}$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $n, m > N$ داشته باشیم:

$$\|d_b(x_n, x_m)\| < \varepsilon.$$

3. (X, \mathbb{A}, d_b) را یک فضای b - متریک C^* - جبر-مقدار کامل گویند، اگر هر دنباله کوشی در X نسبت به \mathbb{A} همگرا باشد.

نکته ۱-۹: توجه داشته باشیم:

1. اگر در تعریف (۱-۷) $\mathbb{A} = \mathbb{R}$ ، آنگاه مفهوم فضای b -متریک C^* - جبر-مقدار با تعریف فضای b -متریک حقیقی معادل می‌شود.

2. اگر در تعریف (۱-۷) $b = 1_{\mathbb{A}}$ ، آنگاه d_b یک متریک C^* - جبر-مقدار است.

مثال ۱-۱۰: فرض کنیم $X = l_p$ مجموعه تمام دنباله‌های $\{x_n\}$ در \mathbb{R} باشد به طوری که $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$ و $0 < p < 1$ و $\mathbb{A} = M_r(\mathbb{R})$. تابع $d_b: X \times X \rightarrow \mathbb{A}$ به ازای

نتیجه ۱-۳: اگر \mathbb{A} یک C^* - جبر یکانی و $a \in \mathbb{A}_+$ ، آنگاه $0_{\mathbb{A}} \leq a \leq \|a\| 1_{\mathbb{A}}$.

اثبات: از آنجا که $a \in \mathbb{A}_+$ ، پس $a \in \mathbb{A}_h$. با توجه به گزاره (۱-۲) $1_{\mathbb{A}} - a \in \mathbb{A}_+$ ، بنابراین $0_{\mathbb{A}} \leq a \leq \|a\| 1_{\mathbb{A}}$.

نتیجه ۱-۴: اگر \mathbb{A} یک C^* - جبر یکانی، $b \in \mathbb{A}$ و $a \in \mathbb{A}_+$ ، آنگاه $b^*ab \in \mathbb{A}_+$.

اثبات: به نتیجه ۱-۲-۴ مرجع [۵] مراجعه شود.

نتیجه ۱-۵: اگر \mathbb{A} یک C^* - جبر یکانی و $x \in \mathbb{A}_h$ ، آنگاه

$$\|x\| = \inf\{a \geq 0 : -a1_{\mathbb{A}} \leq x \leq a1_{\mathbb{A}}\}.$$

اثبات: به نتیجه ۱-۲-۴ مرجع [۵] مراجعه شود.

لم ۱-۶: فرض کنیم \mathbb{A} یک C^* - جبر باشد.

1. اگر $a, b \in \mathbb{A}$ ، $a, b \geq 0_{\mathbb{A}}$ و $ab = ba$ ، آنگاه $ab \geq 0_{\mathbb{A}}$.

2. اگر $a \in \mathbb{A}$ و $b, c \in \mathbb{A}_h$ ، آنگاه

$$b \leq c \Rightarrow a^*ba \leq a^*ca.$$

3. اگر $0_{\mathbb{A}} \leq a \leq b$ ، آنگاه

$$\|a\| \leq \|b\|.$$

4. اگر \mathbb{A} یک C^* - جبر یکانی و $a \in \mathbb{A}$ باشد، آنگاه a مثبت است اگر و تنها اگر به ازای $x \in \mathbb{A}$ $a = xx^*$.

اثبات: به قضیه ۱-۲-۵-۲ مرجع [۹] مراجعه شود.

تعریف ۱-۷: فرض کنیم X یک مجموعه‌ی ناتهی، \mathbb{A} یک C^* - جبر یکانی با رابطه‌ی ترتیب جزئی طبیعی \leq باشد و $b \in \mathbb{A}_+$ طوری که $\|b\| \geq 1$ و b با تمام اعضای \mathbb{A} جابجا شود.

نگاشت $d_b: X \times X \rightarrow \mathbb{A}_+$ یک b -متریک C^* - جبر-مقدار روی X نامیده می‌شود، هرگاه به ازای هر

اگر برای بعضی $x_{n+1} = x_n, n \in \mathbb{N}$ آنگاه به وضوح دنباله $\{x_n\}$ کوشی است. حال فرض کنیم به ازای هر $n \in \mathbb{N}, x_{n+1} \neq x_n$. با جایگذاری x, y به ترتیب x_{n-1}, x_n در رابطه (۱) داریم:

$$U(x_{n-1}, x_n) - d(Tx_{n-1}, x_n) \leq a^* d(x_{n-1}, x_n)a$$

و

$$U(x_{n-1}, x_n) - d(Tx_{n-1}, x_n) \in \{d(x_n, x_{n+1}), d(x_{n-1}, x_n)\}.$$

حال فرض کنیم:

$$U(x_{n-1}, x_n) - d(Tx_{n-1}, x_n) = d(x_{n-1}, x_n).$$

چون $\|a\| < 1$ ، بنابراین تناقض ایجاد می‌شود. لذا

$$U(x_{n-1}, x_n) - d(Tx_{n-1}, x_n) = d(x_n, x_{n+1}).$$

با توجه به نتیجه (۴-۱) و لم (۶-۱) اگر $b, b' \in \mathbb{A}_+$ و $b \leq b'$ آنگاه به ازای هر $x \in \mathbb{A}$ دو عضو x^*bx و $x^*b'x$ مثبت‌اند و $x^*bx \leq x^*b'x$. بنابراین

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_n) &\leq a^* d(x_n, x_{n-1})a \\ &\leq (a^*)^2 d(x_{n-1}, x_{n-2})a^2 \\ &\leq \dots \\ &\leq (a^*)^n d(x_1, x_0)a^n \\ &= (a^*)^n Ba^n. \end{aligned}$$

برای راحتی عضو $d(x_1, x_0)$ را با B نمایش دادیم اکنون نشان می‌دهیم که دنباله $\{x_n\}$ کوشی است. برای $m < n + 1$ داریم:

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_m) &\leq d(x_{n+1}, x_n) + d(x_n, x_{n-1}) + \dots + d(x_{m+1}, x_m) \\ &\leq (a^*)^n Ba^n + \dots + (a^*)^m Ba^m \\ &= \sum_{k=m}^n (a^*)^k Ba^k \\ &= \sum_{k=m}^n (a^*)^k B^{\frac{1}{2}} B^{\frac{1}{2}} a^k \\ &= \sum_{k=m}^n (B^{\frac{1}{2}} a^k)^* (B^{\frac{1}{2}} a^k) \\ &= \sum_{k=m}^n |B^{\frac{1}{2}} a^k|^2 \\ &\leq \|\sum_{k=m}^n |B^{\frac{1}{2}} a^k|^2\| \|1_{\mathbb{A}}\| \\ &\leq \sum_{k=m}^n \|B^{\frac{1}{2}}\|^2 \|a^k\|^2 \|1_{\mathbb{A}}\| \end{aligned}$$

$x = \{x_n\} \in I_p$ و $y = \{y_n\}$ تعریف می‌کنیم:

$$d_b(x, y) = \left[\frac{(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^p)^{\frac{1}{p}}}{(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^p)^{\frac{1}{p}}} \right]$$

آنگاه $d_b(\cdot, \cdot)$ یک $-b$ متریک $-C^*$ جبر-مقدار با ضریب $b = \left[\frac{2^{\frac{1}{p}}}{2^{\frac{1}{p}}} \right]$ است و $\|b\| = 2^{\frac{1}{p}}$.

تعریف ۱-۱: فرض کنیم X یک مجموعه‌ی ناتهی و $T: X \rightarrow X$ یک نگاشت باشد. $x \in X$ یک نقطه ثابت نگاشت T نامیده می‌شود، هرگاه $T(x) = x$.

۲- قضایای نقطه ثابت

در دو دهه اخیر محققان بسیاری قضایای نقطه ثابت را در فضاها $-C^*$ جبر-مقدار مورد بررسی قرار دادند.

تعریف ۲-۱: نگاشت T روی فضای متریک $-C^*$ جبر-مقدار (X, \mathbb{A}, d) پیوسته مداری گوئیم، هرگاه به ازای هر $x \in X$ و $\{n_i\}_{i \geq 1} \subset \mathbb{N}$ $\lim_{i \rightarrow \infty} T^{n_i}(x) = z$ آنگاه $\lim_{i \rightarrow \infty} T(T^{n_i})(x) = Tz$ فضای متریک $-C^*$ جبر-مقدار (X, \mathbb{A}, d) تام مداری گوئیم، هرگاه هر دنباله کوشی به فرم $\{T^{n_i}(x)\}$ در (X, \mathbb{A}, d) همگرا باشد.

قضیه ۲-۲: فرض کنیم $T: X \rightarrow X$ یک نگاشت پیوسته مداری روی فضای متریک $-C^*$ جبر-مقدار (X, \mathbb{A}, d) باشد. اگر (X, \mathbb{A}, d) تام مداری باشد و به ازای هر $x, y \in X$ نگاشت T در رابطه‌ی زیر صدق کند:

$$U(x, y) - d(T(x), y) \leq a^* d(x, y)a \quad (۱)$$

که در آن $\|a\| < 1, a \in \mathbb{A}_+$ و

$$U(x, y) \in \{d(x, Tx), d(Tx, Ty), d(Ty, y)\}.$$

آنگاه به ازای هر $x \in X$ دنباله بازگشتی $\{T^n(x)\}$ به نقطه ثابت T همگرا است.

اثبات: نقطه $x \in X$ انتخاب و قرار می‌دهیم:

$$x_{n+1} = T(x_n) = T^{n+1}(x), n = 0, 1, \dots$$

بنابر فرض قضیه $M \neq \emptyset$. فرض کنیم $m = \min M$. اگر $m = 1$ باشد با جایگذاری $y = T(x)$ در رابطه (۲) بدست می‌آوریم:

$$U(x, T(x)) \leq a^* d(x, T(x))a.$$

با توجه به این که $\|a\| < 1$ حالت

$$d(x, T(x)) \leq a^* d(x, T(x))a$$

برقرار نیست. بنابراین داریم

$$d(x, T(T(x))) = d(x, T^2(x)) \leq a^* d(x, T(x))a.$$

با توجه به اثبات قضیه قبل دنباله بازگشتی $x_{n+1} = T(x_n)$ با $x = T(x)$ بدست می‌آوریم. بنابراین برای برخی $z \in X$ ، $Tz = z$. لذا T دارای نقطه تناوب با دوره تناوب ۱ است.

اکنون فرض کنیم $m \geq 2$ که معادل است بگوییم به ازای هر $y \in X$ ،

$$\epsilon - d(y, T(y)) \neq A^+ \quad (3)$$

با استفاده از رابطه (۲) و اینکه ϵ و اینکه $d(x, T^m(x)) \leq \epsilon$ داریم:

$$U(x, T^m(x)) \leq a^* d(x, T^m(x))a$$

و با توجه به تعریف $U(x, y)$ و رابطه (۳)،

$$d(x, T^{m+1}(x)) \leq a^* d(x, T^m(x))a.$$

با قرار دادن $x_{n+1} = T^m(x_n)$ و $x = x$ مشابه اثبات قضیه قبل دنباله $\{x_n\}$ یک دنباله کوشی در (X, A, d) است. بنابراین $z \in X$ وجود دارد به طوری که $\lim_{n \rightarrow \infty} T^n(x) = z$. چون T پیوسته مداری است، داریم:

$$\begin{aligned} T^m(z) &= T^m \left(\lim_{n \rightarrow \infty} T^{nm}(x) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} T^m(T^{nm}(x)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} T^{(n+1)m}(x) = z. \end{aligned}$$

بنابراین T دارای نقطه تناوبی با دوره تناوب m است.

$$\begin{aligned} &\leq \|B^{\frac{1}{2}}\|^2 \sum_{k=m}^n \|a\|^{2k} 1_A \\ &\leq \|B^{\frac{1}{2}}\|^2 \frac{\|a\|^{2m}}{1-\|a\|^2} 1_A \rightarrow 0, \quad (m \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

با توجه به ترتیب جزئی طبیعی وقتی m به بینهایت میل می‌کند، حد سمت راست فوق صفر می‌باشد، زیرا $\|a\| < 1$. بنابراین $\{x_n\}$ یک دنباله‌ی کوشی نسبت به A است. چون فضای (X, A, d) کامل است، پس $x \in X$ وجود دارد به طوری که $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ لذا $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} T^n(x) = x$.

از آنجا که T پیوسته مداری است،

$$\begin{aligned} T(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} T(T^n(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} T^{n+1}(x) \\ &= x. \end{aligned}$$

تعریف ۲-۳: فرض کنیم X یک مجموعه‌ی ناتهی و $T: X \rightarrow X$ یک نگاشت باشد. نقطه z را یک نقطه تناوبی نگاشت T با تناوب m می‌گوییم، هرگاه $T^m(z) = z$ که در آن $T(x) = x$ و $T^m(x) = z$ در رابطه بازگشتی $T^m(x) = T(T^{m-1}(x))$ صدق می‌کند.

قضیه ۲-۴: فرض کنیم $T: X \rightarrow X$ یک نگاشت پیوسته مداری روی فضای متریک $b-C^*$ جبر-مقدار (X, A, d) و $\epsilon \in A^+$ باشد. اگر نقطه $x \in X$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای بعضی $n \in \mathbb{N}$ ، $d(x, T^n(x)) \leq \epsilon$ و

$$d(x, y) \leq \epsilon \Rightarrow U(x, y) \leq a^* d(x, y)a, \quad (2)$$

به ازای هر $a \in A_+$ که $\|a\| < 1$ و به ازای هر $x, y \in X$ نگاشت T در شرط

$$U(x, y) \in \{d(x, Tx), d(Tx, Ty), d(Ty, y)\}$$

صدق کند. آنگاه T دارای نقطه تناوبی است.

اثبات: قرار می‌دهیم

$$M = \{n \in \mathbb{N} : d(x, T^n(x)) \leq \epsilon\}.$$

$$\begin{aligned} & b^m d(x_{n+m-1}, x_{n+m}) \\ & \leq ba^n B + \dots + b^m a^{n+m-1} B \\ & = \frac{1}{b^n a} \sum_{k=n+1}^{n+m} b^k a^k B, \end{aligned}$$

با توجه به نامساوی فوق

$$\begin{aligned} \|d(x_n, x_{n+m})\| & \leq \left\| \frac{1}{b^n a} \sum_{k=n+1}^{\infty} b^k a^k B \right\| \\ & \rightarrow 0, \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

بنابراین $\{x_n\}$ یک دنباله‌ی کوشی نسبت به \mathbb{A} است. چون فضای (X, \mathbb{A}, d) کامل است، پس $x \in X$ وجود دارد به طوری که $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ لذا $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} T^n(x) = x$.

از آنجا که T پیوسته مداری است،

$$\begin{aligned} T(x) & = \lim_{n \rightarrow \infty} T(T^n(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} T^{n+1}(x) \\ & = x. \end{aligned}$$

در نتیجه x یک نقطه ثابت نگاشت T است.

لازم به ذکر است چون هر فضای متریک C^* جبر-مقدار (X, \mathbb{A}, d) یک فضای b -متریک C^* جبر-مقدار (X, \mathbb{A}, d) است قضیه فوق برای فضاهای متریک C^* جبر-مقدار (X, \mathbb{A}, d) نیز برقرار است.

قضیه ۲-۶: فرض کنیم (X, \mathbb{A}, d) یک فضای متریک C^* جبر-مقدار باشد و $\phi: \mathbb{A}_+ \rightarrow \mathbb{A}_+$ یک نگاشت با ضابطه $\phi(t) = a^* t a$ که در آن $\phi(t) \leq t$ ، $a \in \mathbb{A}$ و $\|a\| < 1$ فرض کنیم نگاشت $T: X \rightarrow X$ به ازای هر $x, y, z \in X$ که $x \neq y \neq z$ در رابطه‌ی زیر صدق کند:

$$\begin{aligned} d(T(x), T(y)) + d(T(y), T(z)) & \leq \\ \phi(d(x, y) + d(y, z)). \end{aligned} \quad (5)$$

آنگاه T دارای نقطه ثابت است، هرگاه نقطه $x \in X$ وجود داشته باشد به طوری که $T^2(x) \neq x$.

اثبات: فرض کنیم یک نقطه $x \in X$ وجود داشته باشد به طوری که $T^2(x) \neq x$. قرار می‌دهیم $x_n = T^n(x)$. اگر $n \geq 0$ ی وجود داشته باشد به طوری که $x_n = x_{n+1}$ ، آنگاه

قضیه ۲-۵: فرض کنیم $T: X \rightarrow X$ یک نگاشت پیوسته مداری روی فضای b -متریک C^* جبر-مقدار (X, \mathbb{A}, d) باشد. فرض کنیم $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{A}_+$ وجود داشته باشند به طوری که $a_4 \leq a_2$ ، $1_{\mathbb{A}} \leq a_1 + a_3 \leq 2(1_{\mathbb{A}})$ ،

و نگاشت T به ازای هر $x, y \in X$ در رابطه‌ی زیر صدق کند:

$$\begin{aligned} a_1 d(T(x), T(y)) + (1_{\mathbb{A}} - a_1)[d(x, T(x)) \\ + d(y, T(y))] \\ + a_2 [d(y, T(x)) + d(x, T(y))] \\ \leq a_3 d(x, y) + a_4 d(x, T^2(x)). \end{aligned} \quad (4)$$

آنگاه T دارای حداقل یک نقطه ثابت است.

اثبات: نقطه $x \in X$ را انتخاب و قرار می‌دهیم:

$$x_{n+1} = T(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

با جایگذاری x, y به ترتیب با x_n, x_{n+1} در رابطه (۴) داریم:

$$\begin{aligned} a_1 d(T(x_n), T(x_{n+1})) + \\ (1_{\mathbb{A}} - a_1)[d(x_n, T(x_n)) + \\ d(y, T(x_{n+1}))] + a_2 [d(x_{n+1}, T(x_n)) \\ + d(x_n, T(x_{n+1}))] \\ \leq a_3 d(x_n, x_{n+1}) + a_4 d(x, T^2(x_n)), \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} d(x_{n+1}, x_{n+2}) + (a_2 - a_4)d(x_n, x_{n+2}) & \leq \\ (a_3 + a_1 - 1_{\mathbb{A}})d(x_n, x_{n+1}). \end{aligned}$$

قرار می‌دهیم $a = a_3 + a_1 - 1_{\mathbb{A}}$ ، لذا

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) & \leq a d(x_{n-1}, x_n) \\ & \leq (a)^2 d(x_{n-2}, x_{n-1}) \\ & \leq \dots \\ & \leq (a)^n d(x_0, x_1) \\ & = (a)^n B. \end{aligned}$$

برای سهولت عضو $d(x_1, x_0)$ در \mathbb{A} را با B نمایش دادیم. اکنون نشان می‌دهیم دنباله $\{x_n\}$ کوشی است. به ازای $n < n + m$ داریم:

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+m}) & \leq b d(x_n, x_{n+1}) + \\ b^2 d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \dots + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & d(T(x), T(y)) + d(T(y), T(z)) \\ & + d(T(z), T(x)) \leq \phi(d(x, y) \\ & + d(y, z) + d(z, x)). \end{aligned}$$

آنگاه T دارای نقطه ثابت است، هرگاه یک نقطه $x \in X$ وجود داشته باشد به طوری که $T^2(x) \neq x$.

$$T(x_n) = T^{n+1}(x) = x_{n+1} = x_n,$$

بنابراین x_n نقطه ثابت نگاشت T است. اگر به ازای هر $n, x_n \neq x_{n+1}$ آنگاه داریم:

$$\begin{aligned} & d(T^n(x), T^{n+1}(x)) + \\ & d(T^{n+1}(x), T^{n+2}(x)) \leq \\ & \phi(d(T^{n-1}(x), T^n(x)) + \\ & d(T^n(x), T^{n+1}(x))) \leq \\ & \phi^2(d(T^{n-2}(x), T^{n-1}(x)) + \\ & d(T^{n-1}(x), T^n(x))) \leq \dots \leq \\ & \phi^n(d(x, T^1(x)) + d(T^1(x), T^2(x))). \end{aligned}$$

لذا برای هر $k, l, m \in \mathbb{N}$ که $k > l \geq m$ قرار می‌دهیم $t_n = d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2})$ در این صورت خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} d(x_k, x_l) & \leq \sum_{n=m}^{l-1} t_n \leq \sum_{n=m}^{l-1} \phi^n(t) \\ & \leq \sum_{n=1}^{\infty} (a^*)^n t \cdot a^n \end{aligned}$$

9

$$\|d(x_k, x_l)\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|a\|^{2n} \|t\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

بنابراین $\{x_n\}$ یک دنباله‌ی کوشی نسبت به A است. چون فضای (X, A, d) کامل است، پس $x \in X$ وجود دارد به طوری که $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ لذا

$$\begin{aligned} & d(T^{n+1}(x), T(x)) + d(T(x), T^{n+2}(x)) \\ & \leq \phi(d(T^n(x), x) + d(x, T^{n+2}(x))) \\ & \leq d(T^n(x), x) + d(x, T^{n+2}(x)) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

بنابراین

$$T(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$$

و x یک نقطه ثابت نگاشت T است.

نتیجه ۲-۷: فرض کنیم (X, A, d) یک فضای متریک $-C^*$ جبر-مقدار باشد و $\phi: A_+ \rightarrow A_+$ یک نگاشت با ضابطه $\phi(t) = a^*ta$ که در آن $\phi(t) \leq t$ و $\|a\| < 1$ و $a \in A$ اگر نگاشت $T: X \rightarrow X$ به ازای هر $x, y, z \in X$ که $x \neq y \neq z$ در رابطه‌ی زیر صدق کند:

- [1] I. A. Bakhtin. The contraction mapping principle in almost metric spaces. *Journal of Functional Analysis* 30: 26-37 (1989).
- [2] S. Czerwik. Nonlinear set-valued contraction mappings in b-metric spaces, *Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena* 46: 263-276 (1998).
- [3] N. Hussain, M. H . Shah. KKM Mappings in cone b-metric spaces. *Computer and Mathematics with Applications* 62: 1677-1684 (2011).
- [4] J. B. Conway. *A Course in functional analysis*. Springer-Verlag, NewYork, Berlin, Heidelberg Tokyo, (1985).
- [5] R. V. Kadison, J. R .Ringrose. *Fundamentals of the theory of operator algebras; Volume I: Elementary Theory*. (1997).
- [6] T. Kamran, M. Postolache, A. Ghiura, S. Batul, R. Ali. The Banach contraction principle in C^* -algebra-valued b-metric spaces with application. *Journal of Fixed Point Theory and Applications* 10: 1-7 (2016).
- [7] Z. Ma, L. Jiang. C^* -Algebra-valued b-metric spaces and related fixed point theorems. *Journal of Fixed Point Theory and Applications* 222: 1-11 (2015).
- [8] Z. Ma, L. Jiang, H. Sun. C^* -algebra-valued metric spaces and related fixed point theorems. *Journal of Fixed Point Theory and Applications* 206 (2014)
- [9] G. Murphy. *C^* -Algebras and operator theory*. Academic Press, London (1990).