

مجموعه‌های متعامد: قضایای نقطه انطباق و ثابت در فضاهاى متریک ناکامل

حمید باغانی*، مریم رضانی^۲، حمیدخدایی^۳

(^۱) استادیار، گروه ریاضی، دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر، دانشگاه سیستان و بلوچستان، زاهدان، ایران

(^۲) استادیار، گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه بجنورد، بجنورد، ایران

(^۳) استادیار، گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی و آمار، دانشگاه ملایر، ملایر، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۸/۰۲/۰۷ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۸/۰۶/۰۴

چکیده

در این مقاله با الهام از مقاله دافر و همکاران [۶]، به بیان و اثبات چند قضیه برای نگاشت‌های مجموعه مقدار پرداخته و با استفاده از این قضایا، وجود نقاط انطباق و نقاط ثابت یک رده کلی از نگاشت‌های مجموعه مقدار که در یک شرط انقباضی تعمیم یافته صدق می‌کنند، را نتیجه‌گیری می‌کنیم. برای این منظور ابتدا مفهوم مجموعه‌های متعامد که برگرفته شده از مقاله اخیر اسحاقی و همکاران [۱۱] می‌باشد را معرفی کرده و با استفاده از این مفهوم، قضایا را در فضاهاى قویا متعامد کامل (نه لزوماً فضاهاى متریک کامل) مورد بررسی قرار می‌دهیم. به علاوه، پژوهش حاضر با نگاه جدید و متفاوت به موضوع پرداخته و با بیان چند مثال غیر بدیهی، اهمیت پرداختن به این موضوع را تشریح کرده است. همچنین با مثال‌های مطرح شده در انتهای مقاله، نشان داده‌ایم که نتایج بدست آمده، توسیعی واقعی از نتایج قبل در این زمینه هستند.

واژه‌های کلیدی: نگاشت‌های مجموعه مقدار، نقاط ثابت و انطباق، مجموعه‌های متعامد، فضاهاى قویا متعامد کامل.

۱- مقدمه

در این صورت وجود دارد. $z \in X$ به طوری که داشته باشیم $z \in T(z)$.

با الهام گرفتن از پژوهش ندلر، نظریه نقطه ثابت برای توابع مجموعه مقدار از جهات مختلفی توسط بسیاری از پژوهش‌گران توسعه یافته است. به ویژه ریچ [۲]، برابند-برابند [۳]، میزوگوچی و تاکاهاشی [۴]، دیو [۵]، دافر و همکاران [۶-۷]، امینی-هرندی [۸]، بونسری و همکاران [۹]، پتروسل و همکاران [۱۰] و بسیاری دیگر از نویسندگان را می‌توان نام برد. اخیراً دیو [۵] یک توسیعی از قضیه نقطه ثابت برابند-برابند به شرح زیر ارائه کرده است.

در این مقاله فرض می‌شود که \mathbb{N} مجموعه اعداد طبیعی، \mathbb{Q} مجموعه اعداد گویا و \mathbb{R} مجموعه اعداد حقیقی باشند. همچنین برای هر مجموعه غیر تهی X فرض می‌شود که $P^*(X)$ تمامی زیر مجموعه‌های غیر تهی X را نشان دهد. فرض کنیم (X, d) یک فضای متری باشد، در ادامه مقاله از نماد $CB(X)$ برای معرفی تمام زیر مجموعه‌های غیر تهی و کراندار X و از نماد $K(X)$ برای معرفی تمامی زیر مجموعه‌های ناتهی و فشرده X استفاده می‌کنیم. فرض کنیم $A, B \in CB(X)$ و $x \in X$ در این صورت تعریف می‌کنیم:

$$D(x, A) := \inf\{d(x, a) : a \in A\}$$

و

$$H(A, B) = \max\left\{\sup_{a \in A} D(a, B), \sup_{b \in B} D(b, A)\right\}.$$

قضیه ۲.۱. فرض کنیم (X, d) یک فضای متری کامل، T از X به $CB(X)$ یک نگاشت مجموعه مقدار، $f : X \rightarrow X$ خود نگاشت پیوسته و $\beta : [0, \infty) \rightarrow [0, 1)$ یک تابع باشد به طوری که برای هر $t \geq 0$ شرط $\limsup_{s \rightarrow t^+} \beta(s) < 1$ برقرار باشد. فرض کنیم که:

$$\{fy : y \in Tx\} \subseteq Tx.$$

(ب). وجود داشته باشد یک تابع مانند $h : X \rightarrow [0, 1)$ به طوری که برای هر $x, y \in X$ داشته باشیم

$$H(Tx, Ty) \leq \beta(d(x, y)).d(x, y) + h(fy)D(fy, Tx).$$

در این صورت

$$COP(f, T) \cap F(T) \neq \emptyset.$$

در ادامه به بیان قضیه نقطه ثابت برابند-برابند می‌پردازیم.

قضیه ۳.۱. فرض کنیم (X, d) یک فضای متری کامل، T از X به $CB(X)$ یک نگاشت مجموعه مقدار و $\beta : [0, \infty) \rightarrow [0, 1)$ یک تابع باشد به طوری که برای هر $t \geq 0$ داشته باشیم: $\limsup_{s \rightarrow t^+} \beta(s) < 1$

حال فرض کنیم برای هر $x, y \in X$ رابطه زیر برقرار باشد:

$$H(Tx, Ty) \leq \beta(d(x, y)).d(x, y) + L.D(y, Tx)$$

تابع H بر روی $CB(X)$ یک متر است که آن را متر هاسدورف القا شده توسط متر d می‌گوییم. می‌توان نشان داد، اگر X یک فضای متری کامل باشد آن‌گاه $(CB(X), H)$ نیز یک فضای متری کامل خواهد بود. برای اطلاعات بیشتر به مرجع [۱] مراجعه شود.

فرض می‌کنیم $f : X \rightarrow X$ یک خود نگاشت و T از X به $CB(X)$ یک نگاشت مجموعه مقدار باشد. نقطه $x \in X$ یک نقطه انطباق^۱ از f و T می‌باشد اگر $fx \in Tx$ اگر $f = id$ (تابع همانی) آن‌گاه $x = fx \in Tx$ و به x نقطه ثابت^۲ نگاشت T گفته می‌شود. مجموعه نقاط ثابت T را با نماد $F(T)$ و مجموعه نقاط انطباق f و T را با نماد $COP(f, T)$ نشان می‌دهیم.

در سال ۱۹۶۹ ندلر [۱] قضیه نقطه ثابت باناخ را برای نگاشت‌های مجموعه مقدار به شرح زیر بیان کرد.

قضیه ۱.۱. فرض کنیم (X, d) یک فضای متری کامل و T یک نگاشت از X به $CB(X)$ باشد. فرض کنیم که $r \in [0, 1)$ وجود دارد به طوری که برای هر $x, y \in X$ داشته باشیم $H(Tx, Ty) \leq rd(x, y)$

$$H(Tx, Ty) \leq k \cdot \max \{d(x, y), D(x, Tx), D(y, Ty), D(x, Ty), D(y, Tx)\}$$

که در آن $0 < k < 1/2$. در این صورت $F(T) \neq \emptyset$. از طرفی دیگر بونسری و همکاران در [۹] نشان دادند که نتایج دافر و کانو [۶] با حذف شرط نیم پیوستگی پایینی^۲ برای تابع $x \mapsto D(x, Tx)$ همچنان برقرار است و قضیه زیر را بیان و اثبات کردند.

قضیه ۷.۱. فرض می‌کنیم (X, d) یک فضای متریک

کامل و T از X به $CB(X)$ یک نگاشت مجموعه مقدار باشد. حال فرض کنیم برای هر $x, y \in X$ داشته باشیم

$$H(Tx, Ty) \leq k \cdot \max \left\{ d(x, y), D(x, Tx), D(y, Ty), \frac{D(x, Ty) + D(y, Tx)}{2} \right\}$$

که در آن $0 < k < 1$. در این صورت $F(T) \neq \emptyset$. با توجه به پژوهش‌های فوق، در این مقاله با معرفی یک شرط انقباضی تعمیم یافته برای توابع مجموعه مقدار، چند قضیه نقطه ثابت را بیان و اثبات می‌کنیم.

۲- مجموعه‌های متعامد

اخیرا اسحاقی و همکاران [۱۱] نظریه مجموعه‌های متعامد^۳ را معرفی کردند و تعمیمی واقعی از قضیه نقطه ثابت باناخ در فضای متریک ناکامل^۴ ارائه دادند. این نظریه به آن‌ها کمک کرد تا جواب‌های یک معادله انتگرالی را در فضاهای متریک ناکامل بیابند. برای جزئیات بیشتر به مراجع [۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۷] مراجعه شود. اکنون به تعریف زیر که تعریف اصلی در مقاله حاضر می‌باشد توجه می‌کنیم.

تعریف ۱.۲. [۱۱] فرض کنیم X یک مجموعه ناتهی و

\perp یک رابطه دوتایی باشد. اگر \perp در شرط زیر صدق کند $x_0 \in X: (\forall y, y \perp x_0)$ یا $(\forall y, x_0 \perp y)$

که در آن $L \geq 0$. در این صورت $F(T) \neq \emptyset$ خواهد بود. لازم به ذکر است که اگر در قضیه فوق $L = 0$ در نظر گرفته شود، قضیه نقطه ثابت میزوگوچی و تاکاهاشی حاصل خواهد شد که یک پاسخ جزئی از مسئله ۹ در [۲] می‌باشد.

قضیه ۴.۱. فرض می‌کنیم (X, d) یک فضای متریک

کامل، T از X به $K(X)$ یک نگاشت مجموعه مقدار و همچنین تابع $\beta: [0, \infty) \rightarrow (0, 1)$ به گونه‌ای باشد که برای هر $t > 0$ داشته باشیم: $\limsup_{s \rightarrow t^+} \beta(s) < 1$. حال اگر برای هر $x, y \in X$ داشته باشیم:

$$H(Tx, Ty) \leq \beta(d(x, y)) \cdot d(x, y),$$

آنگاه

$$F(T) \neq \emptyset.$$

ریچ [۲] این سوال را مطرح کرد که آیا قضیه فوق نیز برای نگاشت $T: X \rightarrow CB(X)$ برقرار است یا نه؟ میزوگوچی و تاکاهاشی [۴] در ۱۹۸۹ به این سوال پاسخ دادند و قضیه زیر را اثبات کردند، که عمومیت بیشتری نسبت به قضیه نذر دارد.

قضیه ۵.۱. فرض می‌کنیم (X, d) یک فضای متریک

کامل، T از X به $CB(X)$ نگاشت مجموعه مقدار و همچنین تابع $\beta: [0, \infty) \rightarrow [0, 1)$ به گونه‌ای باشد که برای هر $t \geq 0$ شرط $\limsup_{s \rightarrow t^+} \beta(s) < 1$ برقرار باشد. حال فرض کنیم برای هر $x, y \in X$ داشته باشیم

$$H(Tx, Ty) \leq \beta(d(x, y)) \cdot d(x, y).$$

در این صورت $F(T)$ یک مجموعه ناتهی خواهد بود. در سال ۲۰۱۱، امینی-هرندی مفهوم شبه انقباضی^۱ برای توابع مجموعه مقدار معرفی و قضیه جالب زیر را بیان و اثبات کرد.

قضیه ۶.۱. فرض می‌کنیم (X, d) یک فضای متریک

کامل و T از X به $CB(X)$ یک نگاشت مجموعه مقدار باشد. حال فرض کنیم برای هر $x, y \in X$ داشته باشیم:

3. Orthogonal sets

4. Incomplete metric spaces

1. Quasi contraction

2. Lower semicontinuous

تعریف ۴.۲. فرض کنید (X, d, \perp) یک فضای متریک متعامد (یعنی (X, \perp)) یک مجموعه متعامد و (X, d) یک فضای متریک و T از X به $CB(X)$ یکنگاشت مجموعه مقدار باشد. در این صورت به T یک نگاشت حافظ تعامد \perp گفته می‌شود اگر

$$x, y \in X, x \perp y \Rightarrow Tx \hat{\perp} Ty.$$

مثال ۵.۲. فرض کنیم $X = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots \right\} \cup \{0, 1\}$ ، رابطه دوتایی \perp را روی X به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$x \perp y \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{y} \in \mathbb{N} \\ \text{یا } x = y = 0 \end{cases}$$

فرض کنیم $T: X \rightarrow CB(X)$ به صورت زیر تعریف شود.

$$Tx = \begin{cases} \left\{ \frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n+1}} \right\}, & x = \frac{1}{2^n}, n = 1, 2, \dots, \\ \{0\}, & x = 0, \\ \left\{ \frac{1}{4} \right\}, & x = 1, \end{cases}$$

کاملاً مشخص است که T یک نگاشت حافظ تعامد نیست. چون $1 \perp \frac{1}{2}$ اما $T(1) = \left\{ \frac{1}{4} \right\}$ نسبت به $T\left(\frac{1}{2}\right) = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{4} \right\}$ متعامد نیست.

مثال ۶.۲. فرض کنیم $X = [0, 1)$ و متر روی X متر اقلیدسی باشد. رابطه دوتایی \perp روی X به وسیله $x \perp y$ اگر و تنها اگر $xy \in \{x, y\}$ تعریف می‌شود. فرض کنید نگاشت T از X به $CB(X)$ یک به صورت زیر تعریف شود

$$T(x) = \begin{cases} \left\{ \frac{1}{2}x^2, x \right\} & x \in \mathbb{Q} \cap X \\ \{0\}, & x \in \mathbb{Q}^c \cap X \end{cases}$$

کاملاً مشخص است که T یک نگاشت حافظ تعامد \perp است.

آن‌گاه \perp را یک رابطه تعامد و جفت (X, \perp) را یک مجموعه متعامد^۱ نامید.

لازم به ذکر است که در تعریف فوق x_0 را عنصر تعامد^۲ می‌نامیم. اگر (X, \perp) تنها یک عنصر تعامد داشته باشد، آنگاه (X, \perp) را مجموعه متعامد منحصر^۳ به فرد می‌نامیم. در پایان عناصر $x, y \in X$ را \perp - مقایسه‌پذیر^۴ می‌نامیم اگر و تنها اگر $x \perp y$ یا $x \perp y$. اکنون مثال‌های زیر را در نظر بگیرید.

مثال ۲.۲. [۱۱] فرض کنید X مجموعه تمام مردم جهان باشد. تعریف می‌کنیم $x \perp y$ اگر x بتواند به y خون بدهد. مطابق جدول زیر اگر x_0 یک شخص باشد که دارای گروه خونی $AB+$ باشد، آن‌گاه برای هر $y \in X$ داریم $x_0 \perp y$. این بدان معنی است که (X, \perp) مجموعه متعامد است.

نوع گروه خون	گروه خونی دهنده	گروه خونی گیرنده
A+	A+ AB+	A+ A- O+ O
O+	O+ A+ B+ AB+	O+ O
B+	B+ AB+	B+ B- O+ O
AB+	AB+	همه افراد
A-	A+ A- AB+ AB-	A- O-
O-	همه افراد	O-
B-	B+ B- AB+ AB-	B- O-
AB-	AB+ AB-	AB- B- O- A-

مثال ۳.۲. فرض کنیم Σ گردابه‌ای از زیرمجموعه‌های ناتهی از X باشد. فرض کنیم μ مجموعه‌ای از تمام σ -جبرهای شامل Σ است. تعریف می‌کنیم $A \perp_{\mu} B$ اگر $B \subset A$. بنابراین (μ, \perp_{μ}) یک مجموعه متعامد منحصر به فرد است به طوری که σ -جبر تولید شده توسط Σ یک عنصر متعامد منحصر به فرد از μ است.

فرض کنیم (X, \perp) یک مجموعه متعامد و $A, B \subseteq X$ باشد. رابطه دوتایی $\hat{\perp}$ بین A و B به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A \hat{\perp} B \text{ اگر } a \perp b \forall a \in A, \forall b \in B.$$

4. \perp -comparable
5. \perp -preserving mapping

1. Orthogonal set
2. Orthogonal element
3. Uniqually orthogonal set

مثال ۱۱.۲. فرض کنیم $X = \mathbb{Q}$. تعریف می‌کنیم $x \perp y$ اگر و فقط اگر $x = 0$ یا $y = 0$. واضح است \mathbb{Q} که با متر اقلیدسی یک فضای متریک کامل نیست اما قویا متعامد کامل است. در حقیقت اگر $\{x_k\}$ یک دنباله دلخواه قویا متعامد کوشی باشد آن‌گاه زیر دنباله‌ی $\{x_{k_n}\}$ از $\{x_k\}$ وجود دارد که $x_{k_n} = 0$ برای هر $n \geq 1$. از طرف دیگر می‌دانیم که هر دنباله کوشی با زیر دنباله‌های همگرا، همگرا می‌باشد. از این نتیجه می‌گیریم که $\{x_k\}$ همگراست. واضح است که (X, d, \perp) نیز یک فضای متری \perp -منظم است.

مثال ۱۲.۲. فرض کنیم $X = [0, 1)$ و

$$x \perp y \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq y \leq \frac{1}{4} \\ \text{or } x = 0 \end{cases}$$

واضح است که X با متر اقلیدسی یک فضای متری کامل نیست اما قویا متعامد کامل است. در حقیقت اگر $\{x_k\}$ یک دنباله دلخواه قویا متعامد کوشی باشد آن‌گاه زیر دنباله‌ی $\{x_{k_n}\}$ از $\{x_k\}$ وجود دارد که $x_{k_n} = 0$ برای هر $n \geq 1$ یا دنباله $\{x_k\}$ یک دنباله یکنوا در بازه $[0, \frac{1}{4}]$ خواهد بود. از این نتیجه می‌گیریم که $\{x_k\}$ به نقطه‌ای در $X \subseteq [0, \frac{1}{4}]$ همگراست. از طرف دیگر می‌دانیم که هر دنباله کوشی با زیر دنباله‌های همگرا، همگرا می‌باشد. از این نتیجه می‌گیریم که $\{x_k\}$ همگراست. واضح است که (X, d, \perp) نیز یک فضای متری \perp -منظم است.

تعریف ۱۳.۲. [۱۷] فرض کنیم (X, d, \perp) یک فضای متری متعامد باشد. یک نگاشت $f: X \rightarrow X$ در $X, a \in X$ - پیوسته^۴ است، اگر برای هر دنباله قویا متعامد $\{a_n\}$ در X اگر $a_n \rightarrow a$ آن‌گاه

تعریف ۷.۲. [۱۷] فرض کنیم (X, \perp) یک مجموعه متعامد باشد. دنباله $\{x_n\}$ قویا متعامد^۱ نامیده می‌شود اگر $(\forall n, k: x_n \perp x_{n+k})$ یا $(\forall n, k: x_{n+k} \perp x_n)$.

تعریف ۸.۲. [۱۷] فرض کنیم (X, d, \perp) یک فضای متری متعامد باشد. در این صورت فضای X را قویا متعامد کامل^۲ می‌نامیم اگر هر دنباله قویا متعامد کوشی در این فضا همگرا باشد.

تعریف ۹.۲. فرض کنید (X, d, \perp) یک فضای متری متعامد باشد. در این صورت فضای X را \perp -منظم^۳ نامیم هرگاه شرایط زیر برقرار باشد:

۱. برای هر دنباله $\{x_n\}$ به‌طوری که $x_n \perp x_{n+k}$ برای هر $n, k \in \mathbb{N}$ و $x_n \rightarrow x$ که $x \in X$ ، آن‌گاه وجود دارد یک هر زیردنباله $\{x_{n_k}\}$ از $\{x_n\}$ به‌طوری که $x \perp x_{n_k}$ برای هر $n_k \in \mathbb{N}$.

۲. برای هر دنباله $\{x_n\}$ به‌طوری که $x_n \perp x_{n+k}$ برای هر $n, k \in \mathbb{N}$ و $x_n \rightarrow x$ که $x \in X$ ، آن‌گاه وجود دارد یک زیردنباله $\{x_{n_k}\}$ از $\{x_n\}$ به‌طوری که $x \perp x_{n_k}$ برای هر $n_k \in \mathbb{N}$.

مثال ۱۰.۲. فرض کنیم $X = [0, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, 2]$ که با

متر اقلیدسی تجهیز شده است. رابطه \perp بر روی X به وسیله $\perp = \{(0, x): x \in X\}$ تعریف می‌کنیم. می‌خواهیم نشان دهیم که (X, d, \perp) یک متری \perp -منظم می‌باشد. دنباله قویا متعامد $\{x_n\}$ را در نظر بگیرید به‌طوری که $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ از آن‌جا که $\{x_n\}$ دنباله قویا متعامد می‌باشد، لذا وجود دارد $k \in \mathbb{N}$ که برای هر $x_n = 0, n \geq k$ بنابراین برای هر $x, n \geq k$ و x_n عضوهای \perp -مقایسه‌پذیر می‌باشند.

3. \perp -regular
4. \perp -continuous

1. Strongly orthogonal sequence
2. Strongly orthogonal complete

$$(IV): \phi_4(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5) = \hat{\alpha}t_1 + \hat{\beta}t_2 + \hat{\gamma}t_3, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma} > 0, \hat{\alpha} + \hat{\beta} + \hat{\gamma} < 1.$$

$f(a_n) \rightarrow f(a)$ همچنین f روی $X \perp$ پیوسته است، اگر f روی هر $a \in X \perp$ پیوسته باشد.

مثال ۱۴.۲. فرض کنیم $X = [0, 2]$ متری اقلیدسی باشد. فرض کنیم $x \perp y$ اگر و فقط اگر $xy = 0$ خود نگاشت f را روی X به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1+x}{2}, & x \in [0, 1] \\ 0, & x \in (1, 2) \end{cases}$$

توجه کنید که f پیوسته نیست اما $f \perp$ پیوسته هست.

مثال ۱۷.۲. فرض کنید $\phi \in \Lambda$. اگر $\tilde{\phi}$ با رابطه زیر تعریف شود

$$\tilde{\phi} = (t_1, t_2, t_3, t_4, t_5) = \phi(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5) + L.t_5$$

که $L \geq 0$ ، آن گاه واضح است که $\tilde{\phi} \in \Lambda$

۳- نتایج اصلی

در ادامه به بیان و اثبات قضیه‌ی اصلی پژوهش حاضر می‌پردازیم.

قضیه ۱.۳. فرض کنیم (X, d, \perp) یک فضای متری قویا متعامد کامل، \perp - منظم و $T: X \rightarrow CB(X)$ یک نگاشت مجموعه مقدار باشد که حافظ \perp است. اگر $f: X \rightarrow X$ یک خود نگاشت \perp - پیوسته و $\alpha: [0, \infty) \rightarrow (0, 1]$ تابعی باشد به طوری که برای هر $t \geq 0$ داشته باشیم $\limsup_{s \rightarrow t^+} \alpha(s) < 1$. فرض کنیم:

۱. برای هر $x \in X$ داریم $\{fy : y \in Tx\} \subseteq Tx$.
۲. وجود دارد تابعی مانند $h: X \rightarrow [0, \infty)$ و $\phi \in \Lambda$ به طوری که برای هر $x, y \in X$ ، \perp - مقایسه پذیر داشته باشیم.

$$H(Tx, Ty) \leq \alpha(d(x, y)) \cdot \phi_x^y + h(fy)D(fy, Tx) \quad (1-3)$$

که در آن

$$\phi_x^y = \phi(d(x, y), D(x, Tx), D(y, Ty), D(x, Ty), D(y, Tx)).$$

در این صورت $COP(f, T) \cap F(T) \neq \emptyset$.
اثبات: واضح است که اگر $x \in T(x)$ آن گاه با استفاده از شرط ۱ از قضیه داریم، $x \in COP(f, T) \cap F(T)$ به همین دلیل فرض می‌کنیم T نقطه ثابت ندارد.

تعریف ۱۵.۲. فرض کنید Λ گردایه‌ای از توابع $\varphi: \mathbb{R}_+^5 \rightarrow \mathbb{R}_+$ باشد که در شرایط زیر صدق کند.

شرط (Λ_1) : نسبت به متغیرهای t_2, t_3, t_4 و t_5 صعودی باشد.

شرط (Λ_2) : برای هر $u, v \in \mathbb{R}_+$ اگر $v \leq u$ آنگاه داریم $\varphi(u, u, v, u + v, 0)$

شرط (Λ_3) : اگر $t_n, s_n, p_n \rightarrow 0$ و $u_n \rightarrow \gamma > 0$ آنگاه داریم:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \varphi(t_n, s_n, \gamma, u_n, p_n) \leq \gamma$$

شرط (Λ_4) : برای هر $u \in \mathbb{R}_+$ داریم: $\varphi(u, u, u, 2u, 0) \leq u$.

شرط (Λ_5) : اگر $i \in \{1, 2, 3\}$ ، $t_i \neq 0$ آنگاه داریم: $\varphi(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5) \neq 0$.

توابع زیادی به کلاس Λ مربوط می‌شوند. مثال‌های زیر این مورد را نشان می‌دهند.

مثال ۱۶.۲.

- (I): $\phi_1(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5) = \hat{\alpha}t_1 + \hat{\beta}t_2 + \hat{\gamma}t_3 + \hat{\delta}t_4 + Lt_5, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}, \hat{\delta}, L \geq 0, \hat{\alpha} + \hat{\beta} + \hat{\gamma} + 2\hat{\delta} = 1, \hat{\gamma} \neq 1, \hat{\alpha} + \hat{\beta} + \hat{\gamma} > 0$.
- (II): $\phi_2(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5) = \frac{1}{2} \max\{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5\}$.
- (III): $\phi_3(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5) = \max\{t_1, t_2, t_3, \frac{1}{2}(t_4 + t_5)\}$.

$\phi_{x_1}^{x_2} > 0$. فرض کنید عدد صحیح و مثبت $n_2 > n_1$ به طوری باشد که:

$$\alpha^{n_2}(d(x_1, x_2)) \leq (1 - \alpha(d(x_1, x_2))) \phi_{x_1}^{x_2}$$

با در نظر گرفتن $x_3 \in Tx_2$ با $x_2 \perp x_3$ داریم:

$$d(x_2, x_3) \leq H(Tx_1, Tx_2) + \alpha^{n_2}(d(x_1, x_2))$$

سپس با استفاده از (۳-۱) و (Λ_1) داریم:

$$\begin{aligned} d(x_2, x_3) &\leq \alpha(d(x_1, x_2)) \phi_{x_1}^{x_2} \\ &+ \alpha^{n_2}(d(x_1, x_2)) \\ &= \phi_{x_1}^{x_2} = \phi(d(x_1, x_2), \\ &D(x_1, Tx_1), D(x_2, Tx_2), D(x_1, Tx_2), \\ &D(x_2, Tx_1)) \\ &\leq \phi(d(x_1, x_2), d(x_1, x_2), \\ &d(x_2, x_3), d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3), 0). \end{aligned}$$

سپس با استفاده از (Λ_2) داریم
 برای $d(x_2, x_3) \leq d(x_1, x_2)$ با انجام همین روند برای
 هر $k \in \mathbb{N}$ می‌توان عددی صحیح و مثبت مانند n_k
 انتخاب کرد به طوری که

$$\alpha^{n_k}(d(x_{k-1}, x_k)) \leq (1 - \alpha(d(x_{k-1}, x_k))) \phi_{x_{k-1}}^{x_k}$$

حال با انتخاب $x_{k+1} \in Tx_k$ با $x_k \perp x_{k+1}$ و
 داریم $x_k \neq x_{k+1}$:

$$d(x_k, x_{k+1}) \leq H(Tx_{k-1}, Tx_k) + \alpha^{n_k}(d(x_{k-1}, x_k)),$$

و در نتیجه $d(x_k, x_{k+1}) \leq d(x_{k-1}, x_k)$ بنابراین
 $d_k := d(x_{k-1}, x_k)$ یک دنباله نزولی از اعداد صحیح
 نامنفی می‌باشد. فرض می‌کنیم $\lim_{k \rightarrow \infty} d_k = c$ که در آن
 $c \geq 0$. چون $\limsup_{t \rightarrow c^+} \alpha(t) < 1$ ، بنابراین وجود دارد

$$k_0 \text{ به طوری که } k \geq k_0 \text{ و } \alpha(d_k) < h \text{ که} \\ \limsup_{t \rightarrow c^+} \alpha(t) < h < 1$$

حال با استفاده از (۳-۱)، (Λ_1) و (Λ_4) و با دانستن
 این که $x_{k+1} \in Tx_k$ برای هر $k \in \mathbb{N}$ ، می‌توان نوشت

فرض کنیم x_0 عضو متعامد X باشد. با استفاده از تعریف
 تعامد داریم:

$$\forall y \in X, x_0 \perp y \quad \text{یا} \quad \forall y \in X, y \perp x_0.$$

که نتیجه می‌دهد:

$$\forall y \in T(x_0), x_0 \perp y \\ \text{یا} \quad \forall y \in T(x_0), y \perp x_0.$$

با حفظ کلیت مسئله، فرض کنیم:

$$\forall y \in T(x_0), x_0 \perp y.$$

فرض کنید $x_1 \in Tx_0$ آن‌گاه $x_0 \perp x_1$. از طرف دیگر
 از آن‌جا که T حافظ \perp می‌باشد، بنابراین $Tx_0 \hat{\perp} Tx_1$.
 اگر $x_0 = x_1 \in Tx$ آن‌گاه $x_0 = x_1$ نقطه ثابتی از T
 است و یک تناقض می‌باشد. بنابراین فرض می‌کنیم که
 $x_0 \neq x_1$. حال با استفاده از (Λ_5) داریم $\phi_{x_0}^{x_1} > 0$.
 فرض کنیم عدد صحیح و مثبت n_1 به طوری باشد که:

$$\alpha^{n_1}(d(x_0, x_1)) \leq (1 - \alpha(d(x_0, x_1))) \phi_{x_0}^{x_1}$$

با استفاده از رابطه فوق، تعریف متر هاسدورف و
 $Tx_0 \hat{\perp} Tx_1$ وجود دارد $x_2 \in Tx_1$ که $x_2 \perp x_1$ و
 $d(x_1, x_2) \leq H(Tx_0, Tx_1) + \alpha^{n_1}(d(x_0, x_1))$

از طرف دیگر با استفاده از (۳-۱) و (Λ_1) می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} d(x_1, x_2) &\leq \alpha(d(x_0, x_1)) \phi_{x_0}^{x_1} \\ &+ \alpha^{n_1}(d(x_0, x_1)) \\ &= \phi_{x_0}^{x_1} = \phi(d(x_0, x_1), \\ &D(x_0, Tx_0), D(x_1, Tx_1), \\ &D(x_0, Tx_1), D(x_1, Tx_0)) \\ &\leq \phi(d(x_0, x_1), d(x_0, x_1), \\ &d(x_1, x_2), d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2), 0). \end{aligned}$$

سپس با استفاده از (Λ_2) داریم
 اگر $x_2 = x_1$ ، آن‌گاه $d(x_1, x_2) \leq d(x_0, x_1)$
 x_1 نقطه ثابتی از T می‌باشد و این یک تناقض است.
 فرض کنید $x_2 \neq x_1$. آن‌گاه با استفاده از (Λ_5) داریم

برای هر $k \geq k_0$ که C_3 و C اعداد حقیقی و مثبت هستند. حال برای هر $k \geq k_0$ و $m \in \mathbb{N}$ داریم:

$$d(x_k, x_{k+m}) \leq \sum_{i=k+1}^{k+m} d_i < \sum_{i=k+1}^{k+m} Ch^{i-1} = C \frac{h^{k+1} - h^{k+m+1}}{1-h} \leq Ch^k$$

بنابراین که $\{x_k\}$ دنباله کوشی می‌باشد. همچنین x_0 یک عضو متعامد روی (X, \perp) و T یک نگاشت حافظا \perp می‌باشد. بنابراین $\{x_k\}$ یک دنباله قویا متعامد کوشی نیز می‌باشد. فرض کنید $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*$ برای یک $k \in \mathbb{N}$ از آنجا که $x_{k+1} \in Tx_k$ برای هر $k \in \mathbb{N}$ لذا با استفاده از ۱) از فرضیات قضیه، نتیجه می‌شود که $fx_{k+1} \in Tx_k$ برای هر $k \in \mathbb{N}$. از آنجا که $f \perp -f$ پیوسته می‌باشد و $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*$ داریم:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} fx_{k+1} = fx^*$$

با فرض \perp -منظمی X از آنجا که $x_n \perp x_{n+k}$ برای هر $n, k \in \mathbb{N}$ و $x_n \rightarrow x^*$ وقتی که $n \rightarrow \infty$ ، بنابراین یک زیردنباله $\{x_{n_k}\}$ از $\{x_n\}$ وجود دارد که $x_{n_k} \perp x$ برای هر $k \in \mathbb{N}$. بنابراین از (Λ_1) و (Λ_2) با فرض $x = x_{n_k}$ و $y = x^*$ به دست می‌آوریم:

$$D(x_{n_{k+1}}, Tx^*) \leq H(Tx_{n_k}, Tx^*) \leq \alpha(d(x_{n_k}, x^*)) \cdot \phi \left(\begin{matrix} d(x_{n_k}, x^*), \\ d(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}), \\ D(x^*, Tx^*), D(x_{n_k}, Tx^*), d(x^*, x_{n_{k+1}}) \end{matrix} \right) + \hat{h}(fx^*)d(fx^*, fx_{n_{k+1}})$$

برای هر $k \in \mathbb{N}$

حال از آنجا که $x^* \notin Tx^*$ سپس با استفاده از رابطه فوق و (Λ_3) داریم:

$$D(x^*, Tx^*) = \limsup_{k \rightarrow \infty} D(x_{n_{k+1}}, Tx^*) \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} (\alpha(d(x_{n_k}, x^*)) \phi(d(x_{n_k}, x^*), d(x_{n_k}, Tx_{n_k}), D(x^*, Tx^*), D(x_{n_k}, Tx^*), d(x^*, x_{n_{k+1}})) + \hat{h}(fx^*)d(fx^*, fx_{n_{k+1}})) < D(x^*, Tx^*)$$

$$d_{k+1} = d(x_k, x_{k+1}) \leq H(Tx_{k-1}, Tx_k) + \alpha^{n_k}(d_k) \leq \alpha(d(x_{k-1}, x_k)) \phi(d(x_{k-1}, x_k), D(x_{k-1}, Tx_{k-1}), D(x_k, Tx_k), D(x_{k-1}, Tx_k), D(x_k, Tx_{k-1})) + \alpha^{n_k}(d_k) \leq \alpha(d(x_{k-1}, x_k)) \phi(d(x_{k-1}, x_k), d(x_{k-1}, x_k), d(x_k, x_{k+1}), d(x_{k-1}, x_k) + d(x_k, x_{k+1}), 0) + \alpha^{n_k}(d_k) \leq \alpha(d(x_{k-1}, x_k)) \phi(d(x_{k-1}, x_k), d(x_{k-1}, x_k), d(x_k, x_{k-1}), 2d(x_{k-1}, x_k), 0) + \alpha^{n_k}(d_k) \leq \alpha(d_k)d_k + \alpha^{n_k}(d_k) \leq \alpha(d_k)\alpha(d_{k-1})d_{k-1} + \alpha(d_k)\alpha^{n_{k-1}}(d_{k-1}) + \alpha^{n_k}(d_k)$$

$$\dots \leq \prod_{i=1}^k \alpha(d_i) d_1 + \sum_{m=1}^{k-1} \prod_{i=m+1}^k \alpha(d_i) \alpha^{n_m}(d_m) + \alpha^{n_k}(d_k) \leq \prod_{i=1}^k \alpha(d_i) d_1 + \sum_{m=1}^{k-1} \prod_{i=\max\{k_0, m+1\}}^k \alpha(d_i) \alpha^{n_m}(d_m) + \alpha^{n_k}(d_k) \equiv A$$

در آخرین نامساوی از این حقیقت استفاده می‌کنیم که $\alpha(t) < 1$ برای هر $t \in [0, \infty)$. اکنون چون برای هر $k \geq k_0 + 1$ داریم:

$$\sum_{m=1}^{k-1} \prod_{i=\max\{k_0, m+1\}}^k \alpha(d_i) \alpha^{n_m}(d_m) \leq \sum_{m=1}^{k_0-1} \prod_{i=k_0}^k \alpha(d_i) \alpha^{n_m}(d_m) + \sum_{m=k_0}^{k-1} \prod_{i=m+1}^k \alpha(d_i) \alpha^{n_m}(d_m) \leq h^{k-k_0+1} \sum_{m=1}^{k_0-1} \alpha^{n_m}(d_m) + \sum_{m=k_0}^{k-1} h^{k-m} \alpha^{n_m}(d_m) \leq C_1 h^k + \sum_{m=k_0}^{k-1} h^{k-m+n_m} \leq C_1 h^k + h^{k+n_{k_0}-k_0} + h^{k+n_{k_0+1}-(k_0+1)} + \dots + h^{k+n_{k+1}-(k-1)} \leq C_1 h^k + \sum_{m=k+n_{k_0}-k_0}^{k+n_{k+1}-(k-1)} h^m = C_1 h^k + \frac{h^{k+n_{k_0}-k_0} - h^{k+n_{k+1}-(k-1)}}{1-h} \leq C_1 h^k + h^k \frac{h^{n_{k_0}-k_0}}{1-h} = C_2 h^k$$

که C_1 و C_2 اعداد حقیقی و مثبت هستند. بنابراین

$$A \leq \prod_{i=1}^k \alpha(d_i) d_1 + C_2 h^k + \alpha^{n_k}(d_k) < h^{k-k_0+1} \prod_{i=1}^{k_0-1} \alpha(d_i) d_1 + C_2 h^k + h^{n_k} \leq C_3 h^k + C_2 h^k + h^k = Ch^k$$

$$\limsup_{s \rightarrow t^+} \tilde{\beta}(s) < 1 \quad \forall t \in [0, \infty) \quad (۱)$$

$$\alpha(t) < \tilde{\beta}(t) \quad \forall t \in [0, \infty) \quad (۲)$$

$$\tilde{\beta}(t) \geq \frac{1}{2} \quad \forall t \in [0, \infty) \quad (۳)$$

حال برای هر $x, y \in X$ ، \perp - مقایسه پذیر داشته باشیم:

$$\begin{aligned} H(Tx, Ty) &\leq \alpha(d(x, y)) \\ &(\alpha \cdot d(x, y) + \beta \cdot D(x, Tx) + \\ &\gamma \cdot D(y, Ty) + \delta \cdot D(x, Ty)) \\ &+ L \cdot D(y, Tx) + h(fy) \cdot D(fy, Tx) \\ &< \tilde{\beta}(d(x, y)) \\ &(\alpha \cdot d(x, y) + \beta \cdot D(x, Tx) + \\ &\gamma \cdot D(y, Ty) + \delta \cdot D(x, Ty)) \\ &+ \frac{L \cdot \tilde{\beta}(d(x, y)) \cdot D(y, Tx)}{\tilde{\beta}(d(x, y))} \\ &+ h(fy) \cdot D(fy, Tx) \\ &\leq \tilde{\beta}(d(x, y)) \\ &(\alpha \cdot d(x, y) + \beta \cdot D(x, Tx) + \\ &\gamma \cdot D(y, Ty) + \delta \cdot D(x, Ty) \\ &2L \cdot D(y, Tx)) \\ &+ h(fy) \cdot D(fy, Tx), \end{aligned}$$

بنابراین با به کار گیری قضیه ۱.۳ و مثال I-۱۶.۲ نتیجه حاصل خواهد شد.
اکنون با تعریف

$$\phi(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5) = \max \left\{ t_1, t_2, t_3, \frac{1}{2}(t_4 + t_5) \right\}$$

به تعمیمی از قضیه ۱ در [۹]، قضیه ۲.۲ در [۵] و قضیه ۴ در [۳] دست می‌یابیم.

نتیجه ۲.۴. فرض کنیم (X, d, \perp) یک فضای متریک قویا متعامد کامل، \perp - منظم و $T: X \rightarrow CB(X)$ یک نگاشت مجموعه مقدار که حافظ \perp است. اگر $f: X \rightarrow X$ یک خود نگاشت \perp - پیوسته و $\alpha: [0, \infty) \rightarrow (0, 1)$ تابعی باشد به طوری که برای هر $t \geq 0$ داشته باشیم $\limsup_{s \rightarrow t^+} \alpha(s) < 1$ فرض کنیم

$$\{fy : y \in Tx\} \subseteq Tx \quad x \in X \quad \text{داریم}$$

که یک تناقض است. بنابراین $x^* \in Tx^*$ اکنون با استفاده از شرط ۱ از قضیه داریم $fx^* \in Tx^*$ بنابراین $x^* \in COP(f, T) \cap F(T)$ و این اثبات را کامل می‌کند.

۴- برخی از نتایج

با فرض

$$\phi(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5) = \alpha t_1 + \beta t_2 + \gamma t_3 + \delta t_4 + L t_5$$

که

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta, L > 0, \alpha + \beta + \gamma + 2\delta = 1, \gamma \neq 1$$

و $\alpha + \beta + \gamma > 0$ به تعمیمی از قضیه ۲.۲ از [۵] قضیه ۴ از [۳] و قضیه ۵ از [۴] می‌رسیم.

نتیجه ۱.۴. فرض کنیم (X, d, \perp) یک فضای متریک قویا متعامد کامل، \perp - منظم و $T: X \rightarrow CB(X)$ یک نگاشت مجموعه مقدار که حافظ \perp است. اگر $f: X \rightarrow X$ یک خود نگاشت \perp - پیوسته و $\alpha: [0, \infty) \rightarrow (0, 1)$ تابعی باشد به طوری که برای هر $t \geq 0$ داشته باشیم $\limsup_{s \rightarrow t^+} \alpha(s) < 1$

$$۱. \text{ برای هر } x \in X \text{ داریم } \{fy : y \in Tx\} \subseteq Tx$$

۲. وجود دارد تابعی مانند $h: X \rightarrow [0, \infty)$ که برای عناصر $x, y \in X$ ، \perp - مقایسه پذیر داشته باشیم:

$$\begin{aligned} H(Tx, Ty) &\leq \alpha(d(x, y)) \\ &(\alpha \cdot d(x, y) + \beta \cdot D(x, Tx) \\ &+ \gamma \cdot D(y, Ty) + \delta \cdot D(x, Ty)) \\ &+ L \cdot D(y, Tx) + h(fy) \cdot D(fy, Tx) \end{aligned}$$

که

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta, L > 0, \alpha + \beta + \gamma + 2\delta = 1, \gamma \neq 1$$

و

$$\alpha + \beta + \gamma > 0$$

آن‌گاه

$$COP(f, T) \cap F(T) \neq \emptyset$$

اثبات: با تعریف تابع $\tilde{\beta}$ از $[0, \infty)$ به $[0, 1)$ به ضابطه $\tilde{\beta}(t) = \frac{\alpha(t)+1}{2}$ برای $t \in [0, \infty)$ داریم:

$$S_n \perp S_m, T(S_n) \neq T(S_m) \Leftrightarrow (1 = n, m > 2)$$

از طرف دیگر برای عناصر \perp - مقایسه پذیر $S_n, S_m \in X$ داریم:

$$H(TS_n, TS_m) \leq \alpha(d(S_n, S_m))(\alpha.d(S_n, S_m)) + L.D(S_m, TS_n)$$

که $\alpha: [0, \infty) \rightarrow (0, 1)$ و $\alpha = 1, L = 5$ با ضابطه

$$\alpha(t) = \frac{1}{2}, t \in [0, \infty)$$

استفاده از نتیجه ۱.۴، برای هر خودنگاشت \perp - پیوسته $f: X \rightarrow X$ که در شرط ۱ از نتیجه ۱.۴ صدق کند، می‌توان نتیجه گرفت که $COP(f, T) \cap F(T) \neq \emptyset$. لازم به ذکر است که نگاشت T در شرط انقباضی قضیه ۱ در [۹]، قضیه ۲.۲ در [۵]، قضیه ۴ در [۳]، قضیه ۵ در [۴] و قضیه ۲.۲ در [۸] صدق نمی‌کند. برای این منظور کافی است $S_3 = X$ و $S_4 = Y$ در نظر گرفته شود.

مثال ۲.۵. فرض کنیم l^∞ فضای باناخ شامل تمام

دنباله‌های حقیقی و کراندار مجهز به سوپرنرم $\{e_n\}$ فرم کانونی l^∞ باشد. فرض کنیم $\{\tau_n\}$ دنباله اکیدا نزولی در $(0, \infty)$ باشد. حال برای هر $n \in \mathbb{N}$ تعریف می‌کنیم $x_n = \tau_n e_n$. اکنون اگر تعریف کنیم $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ آنگاه X یک زیر مجموعه کراندار و کامل از l^∞ است. نگاشت مجموعه مقدار T از X به $CB(X)$ با ضابطه زیر را در نظر بگیرید:

$$Tx_n = \begin{cases} \{x_{n-1}, x_{n+1}\}, & n = 3, 4, \dots, \\ \{x_1\}, & n = 1, 2. \end{cases}$$

برای هر $x_n, x_m \in X$ تعریف می‌کنیم $x_n \perp x_m$ اگر و فقط اگر $(1 = n \leq m)$. بنابراین (X, d, \perp) قویا متعامد کامل و \perp - منظم می‌باشد. واضح است که T نگاشت حافظ تعامد \perp می‌باشد. از طرف دیگر برای عناصر \perp - مقایسه‌پذیر $x_n, x_m \in X$ داریم:

$$H(Tx_n, Tx_m) \leq \alpha(d(x_n, x_m))(\alpha.d(x_n, x_m)) + L.D(x_m, Tx_n)$$

۲. وجود دارد تابعی مانند $h: X \rightarrow [0, \infty)$ که برای هر $x, y \in X$ - مقایسه‌پذیر داشته باشیم:

$$H(Tx, Ty) \leq \alpha(d(x, y)).$$

$$(\max\{d(x, y), D(x, Tx), D(y, Ty), \frac{1}{2}(D(x, Ty) + D(y, Tx))\}) + L.D(y, Tx) + h(fy).D(fy, Tx)$$

که در آن $L \geq 0$. در این صورت $COP(f, T) \cap F(T) \neq \emptyset$.

۵- مثال‌ها

در زیر با بیان چند مثال ساده نشان خواهیم داد که قضیه اصلی در این مقاله توسیعی از قضیه ۱ در [۹]، قضیه ۲.۲ در [۵]، قضیه ۵ در [۴] و قضیه ۲.۲ در [۸] است.

مثال ۱.۵. دنباله $\{S_n\}$ را به صورت زیر در نظر بگیریم.

$$S_1 = \ln 1,$$

$$S_2 = \ln(1 + 2),$$

$$S_3 = \ln(1 + 2 + 3),$$

$$\dots$$

$$S_n = \ln(1 + 2 + 3 + \dots + n)$$

$$= \ln\left(\frac{n(n+1)}{2}\right), n \in \mathbb{N}.$$

فرض کنید $X = \{S_n : n \in \mathbb{N}\}$ و $d(x, y) = |x - y|, x, y \in X$ برای هر $S_n, S_m \in X$ تعریف می‌کنیم $S_n \perp S_m$ اگر و فقط اگر $(1 = n \leq m)$. بنابراین (X, d, \perp) قویا متعامد کامل و \perp - منظم می‌باشد. نگاشت مجموعه مقدار $T: X \rightarrow CB(X)$ با ضابطه زیر را در نظر بگیریم:

$$Tx = \begin{cases} \{S_{n-1}, S_{n+1}\}, & x = S_n, n = 3, 4, \dots, \\ \{S_1\}, & x = S_1, S_2. \end{cases}$$

واضح است که T نگاشت حافظ تعامد \perp می‌باشد. حال آن‌جا که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H(T(S_n), T(S_1))}{d(S_n, S_1)} = 1,$$

بنابراین T انقباض پذیر نمی‌باشد. در وهله اول بدیهی است که

که $\alpha = 1, L = 3$ و $\alpha: [0, \infty) \rightarrow (0, 1)$ با ضابطه $\alpha(t) = \frac{1}{2}, t \in [0, \infty)$ تعریف می‌شود. بنابراین با استفاده از نتیجه ۱.۴، برای هر خودنگاشت \perp - پیوسته $f: X \rightarrow X$ که در شرط ۱ از نتیجه ۱.۴ را صدق کند، می‌توان نتیجه گرفت که $COP(f, T) \cap F(T) \neq \emptyset$. لازم به ذکر است که نگاشت T در شرط انقباضی قضیه ۱ در [۹]، قضیه ۲.۲ در [۵]، قضیه ۴ در [۳]، قضیه ۵ در [۴] و قضیه ۲.۲ در [۸] صدق نمی‌کند. برای این منظور کافی است $x = x_4$ و $y = x_5$ در نظر گرفته شود.

[11] M. Eshaghi Gordji, M. Ramezani, M. De La Sen, Y.J. Cho, (2017). On orthogonal sets and Banach fixed Point theorem, *Fixed Point Theory* 18, 569-578.

[12] H. Baghani, M. Eshaghi Gordji, M. Ramezani, (2016). Orthogonal sets: The axiom of choice and proof of a fixed point theorem, *J. Fixed Point Theory Appl.* 18, 465-477.

[13] Z. Ahmadi, R. Lashkaripour, H. Baghani, (2018). A fixed point problem with constraint inequalities via a contraction in incomplete metric spaces, *Filomat* 32, 234-254.

[14] H. Baghani, (2018). Existence and uniqueness of solutions to fractional Langevin equations involving two fractional orders, *J. Fixed Point Theory Appl.* 20:3.

[15] H. Baghani, M. Ramezani, (2017). A fixed point theorem for a new class of set-valued mappings in R-complete (not necessarily complete) metric spaces, *Filomat* 31, 3875-3884.

[16] O. Baghani, H. Baghani, (2017). A new contraction condition and its application to weakly singular Volterra integral equations of the second kind, *J. Fixed Point Theory Appl.* 19, 2601-2615.

[17] M. Ramezani, H. Baghani, (2017). The Meir-Keeler fixed point theorem in incomplete modular spaces with application, *J. Fixed Point Theory Appl.* 19, 2369-2382.

فهرست منابع

[1] S. B. Nadler Jr, (1969). Multivalued contraction mappings, *Pacific J. Math.* 30, 475-488.

[2] S. Reich, (1983). Some problems and results in fixed point theory, *Contemp. Math.* 21, 179-187.

[3] M. Berinde, V. Berinde, (2007). On a general class of multi-valued weakly picard mappings, *J. Math. Anal. Appl.* 326, 772-782.

[4] N. Mizoguchi, W. Takahashi, (1989). Fixed point theorems for multivalued mappings on complete metric space, *J. Math. Anal. Appl.* 141, 177-188.

[5] W. -S. Du, (2012). On coincidence point and fixed point theorems for nonlinear multivalued maps, *Topology. Appl.* 159, 49-56.

[6] P.Z. Daffer, H. Kaneko, (1995). Fixed points of generalized contractive multi-valued mappings, *J. Math. Anal. Appl.* 195, 655-666.

[7] P.Z. Daffer, H. Kaneko, (1996). W. Li, On a conjecture of S. Reich, *Proc. Amer. Math. Soc.* 124, 3159-3162.

[8] A. Amini-Harandi, (2011). Fixed point theory for set-valued quasi-contraction maps in metric spaces, *Appl. Math. Lett.* 24, 1791-1794.

[9] N. Boonsri, S. Saejung, (2017). Some fixed point theorems for multivalued mappings in metric spaces, *RACSAM* 111, 489-497.

[10] A. Petrusel, G. Petrugel, Jen-Chih Yao, (2018). Variational analysis concepts in the theory of multi-valued coincidence problems, *J. Nonlinear Convex Anal.* 24, 935-958.