دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال ششم، شماره بیست و هفتم، آذر و دی ۱۳۹۹
شماره شاپا: ۲۵۸۸X–۵۸۸

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
پژوهش‌های نوین در ریاضی

وجود بهترین نقطه تقریبی سه‌گانه برای یک انقباض دوری جمعی میر-کیلر از مرتبه ۳

اکرم صفری هفشجانی*

گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، ص. پ. ۳۶۹۷-۱۹۳۹۵، تهران، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۷/۰۶/۰۳ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۹/۰۳/۲۵

چکیده

فرض کنید A_1، A_2 و A_3 زیرمجموعه‌هایی ناتهی از یک فضای متریک (X,d) باشند. خودنگاشت $T:\bigcup_{i=1}^{3}A_i\to\bigcup_{i=1}^{3}A_i$ را یک نگاشت دوری می‌نامیم هرگاه $T(A_1)\subseteq A_2$، $T(A_2)\subseteq A_3$ و $T(A_3)\subseteq A_1$. برای هر $(x_1,x_2,x_3)\in A_1\times A_2\times A_3$ فرض کنید $D(x_1,x_2,x_3):=d(x_1,x_2)+d(x_2,x_3)+d(x_3,x_1)$ و مسأله بهینه سازی زیر را در نظر بگیرید:

$$\min_{x\in A_1\cup A_2\cup A_3} D(x,Tx,T^2x).$$

با فرض $d(A_i,A_j):=\inf\{d(x_i,x_j): x_i\in A_i,\ x_j\in A_j\}$ گیریم $P:=d(A_1,A_2)+d(A_2,A_3)+d(A_3,A_1)$، مسلماً اگر عنصر $z\in\bigcup_{i=1}^{3}A_i$ در شرط $D(z,Tz,T^2z)=P$ صدق کند آنگاه بهترین جواب مسأله بهینه‌سازی فوق خواهد بود که آنرا بهترین نقطه تقریبی سه‌گانه نگاشت T می‌نامیم. در این مقاله ابتدا به معرفی انقباض‌های دوری جمعی میر-کیلر از مرتبه ۳ به عنوان تعمیمی از انقباض‌های دوری جمعی از مرتبه ۳ پرداخته سپس به بررسی شرایط وجود بهترین نقطه تقریبی سه‌گانه برای این دسته از نگاشت‌ها در فضاهای متریک دارای خاصیت UC می‌پردازیم. توجه کنید که نتایج اصلی این مقاله تعمیم برخی از قضایای موجود با اثبات‌های ساده‌تر و کوتاه‌تر می‌باشند که برای یک انقباض دوری جمعی میر-کیلر از مرتبه دلخواه p هم درست خواهند بود.

واژه‌های کلیدی: نقطه ثابت، بهترین نقطه تقریبی، انقباض دوری جمعی میر-کیلر از مرتبه p، خاصیت UC.

*. عهده‌دار مکاتبات:
Email: asafari@pnu.ac.ir

۱- مقدمه

فرض کنید (X,d) یک فضای متریک باشد. عنصر $z\in X$ یک نقطه ثابت خودنگاشت $T:X\to X$ نامیده می‌شود هرگاه $Tz=z$. همچنین اگر A و B دو زیرمجموعه غیر تهی فضای X باشند، خودنگاشت $T:A\cup B\to A\cup B$ دوری نامیده می‌شود هرگاه $T(A)\subseteq B$ و $T(B)\subseteq A$. نقطه $z\in A\cup B$ را یک بهترین نقطه تقریبی نگاشت دوری $T:A\cup B\to A\cup B$ می‌گوییم چنان‌چه
$$d(z,Tz)=d(A,B).$$

در واقع می‌دانیم که نقطه z بهترین جواب مسأله بهینه سازی زیر است:
$$\min_{x\in A\cup B} d(x,Tx). \qquad \text{(I)}$$

در سال‌های اخیر یافتن شرایطی برای تضمین وجود، یکتایی و همگرایی نقاط ثابت و بهترین نقاط تقریبی کلاس‌های متفاوتی از خودنگاشت‌های انقباضی دوری به منظور بدست آوردن تعمیم‌هایی از اصل انقباض باناخ، مورد توجه بسیاری از نویسندگان قرار گرفته است [۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۱۱، ۱۳]. در [۲]، الدرد و ویرامانی تعمیم زیر از اصل انقباض باناخ را برای یک انقباض دوری بدست آوردند.

قضیه ۱. [۲] فرض کنید A و B زیر مجموعه‌هایی ناتهی، بسته و محدب از یک فضای باناخ به طور یکنواخت محدب باشند. گیریم که نگاشت $T:A\cup B\to A\cup B$ یک انقباض دوری باشد، یعنی مقدار ثابت $c\in(0,1)$ موجود باشد به‌گونه‌ای که برای هر $(x,y)\in A\times B$ داشته باشیم
$$d(Tx,Ty)\le cd(x,y)+(1-c)d(A,B),$$

در این صورت T دارای بهترین نقطه تقریبی یکتایی در A مانند z است که به ازای هر $x_0\in A$ دنباله $\{T^{2n}x_0\}$ همگرا به آن می‌باشد.

فرض کنید A_1، A_2، ... و A_p زیرمجموعه‌هایی غیر تهی از فضای متریک (X,d) باشند. در این صورت نگاشت $T:\bigcup_{i=1}^{p}A_i\to\bigcup_{i=1}^{p}A_i$ یک نگاشت دوری از مرتبه p نامیده می‌شود هرگاه با فرض $A_{p+1}=A_1$ برای هر $1\le i\le p$ داشته باشیم $T(A_i)\subseteq A_{i+1}$. همچنین $z\in A_i$ بهترین نقطه تقریبی نگاشت T در A_i نامیده می‌شود هرگاه داشته باشیم:
$$d(z,Tz)=d(A_i,A_{i+1}).$$

بعد از الدرد و ویرامانی بسیاری از نویسندگان ضمن معرفی کلاس‌های جدیدی از انقباض‌های دوری از مرتبه p شرایط وجود و یکتایی بهترین نقاط تقریبی آنها را مورد بررسی قرار دادند [۴، ۵، ۶، ۷]. از جمله پتریک و زلاتانو قضیه زیر را برای کلاس خاصی از انقباض‌های دوری مرتبه ۳ ثابت کردند و نشان دادند این قضیه برای انقباض‌های مشابه از مرتبه p هم صحیح می‌باشد.

قضیه ۲. [۱۰] فرض کنید A_1، A_2 و A_3 زیرمجموعه‌هایی ناتهی، بسته و محدب از فضای به طور یکنواخت محدب X باشند. گیریم نگاشت دوری $T:\bigcup_{i=1}^{3}A_i\to\bigcup_{i=1}^{3}A_i$ یک انقباض دوری جمعی از مرتبه ۳ باشد بدین معنا که مقدار ثابت $c\in[0,1)$ موجود باشد به‌گونه‌ای که به ازای هر $(x_1,x_2,x_3)\in A_1\times A_2\times A_3$ نابرابری زیر برقرار باشد
$$\begin{aligned}&\|Tx_1-Tx_2\|+\|Tx_2-Tx_3\|+\|Tx_3-Tx_1\|\\&\le c\left(\|x_1-x_2\|+\|x_2-x_3\|+\|x_3-x_1\|\right)+(1-c)P\end{aligned}$$

که در آن $P:=d(A_1,A_2)+d(A_2,A_3)+d(A_3,A_1)$. در این صورت به ازای هر $i=1,2,3$ نگاشت T داری بهترین نقطه تقریبی یکتایی مانند $z_i\in A_i$ می‌باشد به‌گونه‌ای که نقطه ثابت T^3 نیز است و به ازای هر $x_0\in A_i$ دنباله $\{T^{3n}x_0\}$ همگرا به نقطه z_i است. علاوه بر این برای $j=1,2$، T^jz_i بهترین نقطه تقریبی T در A_{i+j} (با فرض $A_4=A_1$ و $A_5=A_2$) است. از طرفی دی باری، سوزوکی و وترو [۱] تعمیمی از قضیه ۱ با معرفی انقباض‌های دوری میر-کیلر [۹] بدست آورده و قضیه وجودی زیر را ثابت کردند.

قضیه ۳. [۱] فرض کنید A و B دو زیرمجموعه

ناتهی از یک فضای باناخ به طور یکنواخت محدب باشند. گیریم A بسته و محدب باشد. اجازه دهید که خودنگاشت $T: A\cup B \to A\cup B$ یک انقباض دوری میر–کیلر باشد، بدین معنا که به ازای هر $\varepsilon>0$، عددی مانند $\delta>0$ موجود باشد به‌گونه‌ای که برای هر $(x,y)\in A\times B$ شرط $d(x,y)<d(A,B)+\varepsilon+\delta$ ایجاب کند که $d(Tx,Ty)<d(A,B)+\varepsilon.$ در این صورت T دارای بهترین نقطه تقریبی یکتایی در A می‌باشد که به ازای هر $x_0\in A$ دنباله $\{T^{2n}x_0\}$ همگرا به آن است.

در این مقاله ابتدا به معرفی یک انقباض دوری جمعی میر–کیلر از مرتبه ۳ به عنوان تعمیمی از یک انقباض دوری جمعی از مرتبه ۳ پرداخته، سپس با معرفی یک مسأله بهینه سازی مشابه (I) و معرفی مفهوم بهترین نقطه تقریبی سه‌گانه به عنوان بهترین جواب آن، به یافتن شرایطی برای وجود و یکتایی چنین جوابی برای این نوع نگاشت‌ها در فضاهای متریک با خاصیت UC می‌پردازیم. توجه کنید که نتایج اصلی این مقاله تعمیم برخی از قضایای موجود با اثبات‌های ساده‌تر و کوتاه‌تر می‌باشند که همچنین برای یک انقباض دوری جمعی میر–کیلر از مرتبه دلخواه p هم درست خواهند بود، ما فقط برای سادگی و کوتاه‌تر بودن اثبات‌ها با مرتبه ۳ کار می‌کنیم.

۲- مفاهیم و تعاریف مقدماتی

این بخش را با تعریف یک L–تابع و بیان دو لم کاربردی آغاز می‌کنیم.

تعریف ۱. [۷] تابع $\varphi:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ یک L–تابع نامیده می‌شود هرگاه در سه شرط زیر صدق کند:

۱) $\varphi(0)=0$،

۲) به ازای هر $s\in(0,+\infty)$ داشته باشیم $\varphi(s)>0$،

۳) به ازای هر $s\in(0,\infty)$ عددی مانند $\delta>0$ موجود باشد به‌گونه‌ای که برای هر $t\in[s,s+\delta]$ داشته باشیم $\varphi(t)\le s$.

لم ۱.[۸، ۱۲] فرض کنید f و g توابعی از مجموعه ناتهی Y به $[0,+\infty)$ باشند. در این صورت گزاره‌های زیر معادل هستند:

۱) برای هر $\varepsilon>0$، عددی مانند $\delta>0$ موجود است به‌گونه‌ای که

$$x\in Y,\ f(x)<\varepsilon+\delta \ \Rightarrow\ g(x)<\varepsilon.$$

۲) L–تابع(صعودی و پیوسته) φ موجود است به‌گونه‌ای که

$$x\in Y,\ f(x)>0 \ \Rightarrow\ g(x)<\varphi(f(x)),$$
$$x\in Y,\ f(x)=0 \ \Rightarrow\ g(x)=0.$$

لم ۲. [۱۲] L–تابع φ و دنباله صعودی $\{s_n\}$ از اعداد حقیقی غیر منفی را در نظر بگیرید. فرض کنید به ازای هر $n\in\mathbb{N}$ که $s_n>0$ داشته باشیم $s_{n+1}\le\varphi(s_n)$. در این صورت داریم $\lim_{n\to\infty}s_n=0$.

اکنون به معرفی خاصیت هندسی UC در یک فضای متریک می‌پردازیم.

تعریف ۲.[۱۳] فرض کنید A و B دو زیرمجموعه غیر تهی فضای متریک (X,d) باشند. در این صورت می‌گوییم زوج (A,B) دارای خاصیت UC است هرگاه اگر دنباله‌های $\{x_n\}$ و $\{x'_n\}$ دنباله‌هایی در مجموعه A و $\{y_n\}$ دنباله‌ای در مجموعه B باشد به‌گونه‌ای که

$$\lim_{n\to\infty}d(x_n,y_n)=\lim_{n\to\infty}d(x'_n,y_n)=d(A,B),$$

آنگاه داشته باشیم $\lim_{n\to\infty}(x_n,x'_n)=0$.

به عنوان مثال چنان‌چه A و B دو زیر مجموعه غیر تهی از یک فضای متریک (X,d) باشند که $d(A,B)=0$؛ یا اگر A و B دو زیرمجموعه غیر تهی از یک فضای باناخ به طور یکنواخت محدب X باشند چنان‌که A محدب باشد، آنگاه زوج (A,B) دارای خاصیت UC است. برای مشاهده مثال‌ها و توضیحات بیشتر در مورد خاصیت UC می‌توان به [۱۳] مراجعه کرد. لم بعد را در اثبات قضایا و نتایج این مقاله چندین بار به کار خواهیم برد.

لم ۳.[۱۱] فرض کنید زوج (A,B) از زیرمجموعه‌های غیر تهی فضای متریک (X,d) دارای

خاصیت UC باشد. گیریم $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ دنباله‌هایی به ترتیب در مجموعه‌های A و B باشند به‌گونه‌ای که در یکی از تساوی‌های زیر:

$$\lim_{m\to\infty}\sup_{n\geq m} d(x_m,y_n)=d(A,B),$$

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{m\geq n} d(x_m,y_n)=d(A,B),$$

صدق کنند، در این صورت دنباله $\{x_n\}$ کشی است.

۳- نتایج و بحث اصلی

فرض کنید A_1، A_2 و A_3 زیرمجموعه‌هایی ناتهی از یک فضای متریک (X,d) باشند. برای اختصار در نوشتن نماد P را به صورت

$$P:=d(A_1,A_2)+d(A_2,A_3)+d(A_3,A_1),$$

تعریف کرده و برای هر $(x_1,x_2,x_3)\in X$ گیریم

$$D(x_1,x_2,x_3):=d(x_1,x_2)+d(x_2,x_3)+d(x_3,x_1).$$

برای نگاشت دوری $T:\overset{3}{\underset{i=1}{\cup}}A_i\to\overset{3}{\underset{i=1}{\cup}}A_i$ مسأله بهینه سازی زیر را در نظر بگیرید

$$\min_{x\in A_1\cup A_2\cup A_3} D(x,Tx,T^2x). \qquad \text{(II)}$$

بدیهی است که چنان‌چه عنصر $z\in\overset{3}{\underset{i=1}{\cup}}A_i$ در شرط $D(z,Tz,T^2z)=P$ صدق کند آنگاه بهترین جواب مسأله بهینه سازی (II) خواهد بود که ما در این مقاله آنرا بهترین نقطه تقریبی سه‌گانه T می‌نامیم. توجه کنید که اگر $z\in A_1$ بهترین نقطه تقریبی سه‌گانه T باشد آنگاه به وضوح z و Tz بهترین نقاط تقریبی نگاشت T به ترتیب در مجموعه‌های A_1 و A_2 هستند. بعلاوه اگر z یک نقطه ثابت نگاشت T^3 هم باشد آنگاه T^2z نیز بهترین نقطه تقریبی نگاشت T در مجموعه A_3 است (توجه کنید که در قضیه ۲ نقطه $z_i\in A_i$ یک بهترین نقطه تقریبی سه‌گانه نگاشت T است).

اکنون به معرفی یک انقباض دوری جمعی میر–کیلر از مرتبه ۳ به عنوان تعمیمی از یک انقباض دوری جمعی از مرتبه ۳ می‌پردازیم.

تعریف ۳. فرض کنید A_1، A_2 و A_3 زیرمجموعه‌هایی ناتهی از فضای متریک (X,d) بوده و T خودنگاشتی دوری روی $\overset{3}{\underset{i=1}{\cup}}A_i$ باشد. در این صورت T یک انقباض دوری جمعی میر–کیلر از مرتبه ۳ نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر $\varepsilon>0$، عددی مانند $\delta>0$ موجود باشد به‌گونه‌ای که برای هر $(x_1,x_2,x_3)\in A_1\times A_2\times A_3$ شرط $D(x_1,x_2,x_3)-P<\varepsilon+\delta$ ایجاب کند که $D(Tx_1,Tx_2,Tx_3)-P<\varepsilon.$

گزاره زیر ارتباط بین یک L–تابع و یک انقباض دوری جمعی میر–کیلر از مرتبه ۳ را بیان می‌کند.

گزاره ۱. فرض کنید A_1، A_2 و A_3 درست مانند تعریف قبل باشند. گیریم $T:\overset{3}{\underset{i=1}{\cup}}A_i\to\overset{3}{\underset{i=1}{\cup}}A_i$ یک نگاشت دوری باشد. در این صورت T یک انقباض دوری جمعی میر–کیلر از مرتبه ۳ است اگر و تنها اگر L–تابعی مانند φ (صعودی و پیوسته) موجود باشد به‌گونه‌ای که به ازای هر $(x_1,x_2,x_3)\in A_1\times A_2\times A_3$ شرط $D(x_1,x_2,x_3)-P>0$ ایجاب کند که

$$D(Tx_1,Tx_2,Tx_3)-P<\varphi(D(x_1,x_2,x_3)-P).$$

و شرط $D(x_1,x_2,x_3)-P=0$ ایجاب کند که

$$D(Tx_1,Tx_2,Tx_3)-P=0.$$

اثبات. کافی است در لم ۱ قرار دهیم $Y=A_1\times A_2\times A_3$ و توابع f و g از Y به $[0,+\infty)$ را با ضوابط زیر تعریف کنیم

$$f(x_1,x_2,x_3)=D(x_1,x_2,x_3)-P,$$

$$g(x_1,x_2,x_3)=D(Tx_1,Tx_2,Tx_3)-P.$$

در این صورت چون T یک انقباض دوری جمعی میر–کیلر از مرتبه ۳ است، درستی احکام از لم ۱ نتیجه می‌شوند. لم ساده زیر در اثبات نتایج اصلی ما مفید می‌باشد.

لم ٤. فرض کنید A_1، A_2 و A_3 زیرمجموعه‌هایی ناتهی از فضای متریک (X,d) باشند. همچنین فرض

کنید که خودنگاشت $T:\bigcup_{i=1}^{3}A_i\to\bigcup_{i=1}^{3}A_i$ یک انقباض دوری جمعی میر–کیلر از مرتبه ۳ باشد. L–تابع φ را مانند گزاره قبل در نظر بگیرید. در این صورت به ازای هر $(x_1,x_2,x_3)\in A_1\times A_2\times A_3$ همواره داریم

$$D(Tx_1,Tx_2,Tx_3)\le D(x_1,x_2,x_3)$$

و

$$D(Tx_1,Tx_2,Tx_3)-P\le\varphi(D(x_1,x_2,x_3)-P).$$

اثبات. از گزاره قبل برای هر $(x_1,x_2,x_3)\in A_1\times A_2\times A_3$ شرط $D(x_1,x_2,x_3)-P=0$ ایجاب می‌کند

$$\begin{aligned}D(Tx_1,Tx_2,Tx_3)-P&=0=\varphi(0)\\&=\varphi(D(x_1,x_2,x_3)-P)\\&\le D(x_1,x_2,x_3)-P.\end{aligned}$$

با استفاده مجدد از گزاره قبل به ازای هر $(x_1,x_2,x_3)\in A_1\times A_2\times A_3$ شرط $D(x_1,x_2,x_3)-P>0$ ایجاب می‌کند

$$\begin{aligned}D(Tx_1,Tx_2,Tx_3)-P&<\varphi(D(x_1,x_2,x_3)-P)\\&\le D(x_1,x_2,x_3)-P.\end{aligned}$$

اکنون احکام مورد نظر از دو رابطه قبل نتیجه می‌شوند. □

لم ۵. فرض کنید A_1، A_2 و A_3 زیرمجموعه‌هایی ناتهی از فضای متریک (X,d) باشند. همچنین فرض کنید که خودنگاشت $T:\bigcup_{i=1}^{3}A_i\to\bigcup_{i=1}^{3}A_i$ یک انقباض دوری جمعی میر–کیلر از مرتبه ۳ باشد. در این صورت چنان‌چه عنصر $x_0\in A_1$ و دنباله $\{x_n\}$ در $\bigcup_{i=1}^{3}A_i$ را به صورت $x_n:=Tx_{n-1}$ در نظر بگیریم خواهیم داشت $\lim_{n\to\infty}D(x_n,x_{n+1},x_{n+2})=P$.

اثبات. دنباله $\{s_n\}\subseteq[0,\infty)$ را به صورت

$$s_n:=D(x_n,x_{n+1},x_{n+2})-P,$$

تعریف کنید. L–تابع φ را مانند گزاره۱ در نظر بگیرید. در این صورت از تعریف یک انقباض دوری جمعی میر–کیلر از مرتبه ۳ بدیهی است که $s_n>0$ ایجاب می‌کند $s_{n+1}<\varphi(s_n)$ لذا بنابر لم ۲ داریم $\lim_{n\to\infty}s_n=0$. □

لم ٦. فرض کنید (X,d)، A_1، A_2، A_3، T و $\{x_n\}$ مانند لم قبل تعریف شوند. بعلاوه فرض کنید (A_1,A_2) دارای خاصیت UC باشد. در این صورت اگر زیر دنباله $\{x_{3n_k}\}$ از دنباله $\{x_{3n}\}$ همگرا به نقطه $z\in A_1$ باشد، آنگاه z یک بهترین نقطه تقریبی سه‌گانه نگاشت T است.

اثبات. کافی است ثابت کنیم $D(z,Tz,T^2z)=P$. با استفاده از لم ۴ و ۵ داریم

$$\begin{aligned}P\le D(z,Tz,T^2z)&=\lim_{n\to\infty}D(x_{3n_k},Tz,T^2z)\\&\le\lim_{n\to\infty}D(x_{3n_k-1},z,Tz)\\&=\lim_{n\to\infty}D(x_{3n_k-1},x_{3n_k},Tz)\\&\le\lim_{n\to\infty}D(x_{3n_k-2},x_{3n_k-1},z)\\&=\lim_{n\to\infty}D(x_{3n_k-2},x_{3n_k-1},x_{3n_k})\\&=P\end{aligned}$$

لذا حکم برقرار است. □

لم ۷. فرض کنید A_1، A_2 و A_3 زیرمجموعه‌هایی ناتهی از فضای متریک (X,d) باشند که (A_1,A_2) دارای خاصیت UC است. گیریم $T:\bigcup_{i=1}^{3}A_i\to\bigcup_{i=1}^{3}A_i$ یک انقباض دوری جمعی میر–کیلر از مرتبه ۳ باشد. به ازای $x_0\in A$ دنباله $\{x_n\}$ در $\bigcup_{i=1}^{3}A_i$ را به صورت $x_n:=Tx_{n-1}$ تعریف کنید. در این صورت داریم

$$\lim_{m\to\infty}\sup_{n\ge m}d(x_{3m},x_{3n+1})=d(A_1,A_2).$$

اثبات. بنابر لم ۵ داریم

$$\lim_{m\to\infty}d(x_{3m},x_{3m+1})=d(A_1,A_2),$$
$$\lim_{m\to\infty}d(x_{3m+3},x_{3m+1})=d(A_1,A_2).$$

لذا چون (A_1,A_2) دارای خاصیت UC است خواهیم داشت $\lim_{m\to\infty}d(x_{3m},x_{3m+3})=0$.

$\varepsilon>0$ را دلخواه ولی ثابت در نظر بگیرید، بنابر تعریف

L–تابع φ می‌توان $\delta\in(0,\varepsilon)$ را به‌گونه‌ای انتخاب کرد که $\varphi(\varepsilon+\delta)\le\varepsilon$. اکنون از لم ۵ عدد $L\in\mathbb{N}$ را به‌گونه‌ای انتخاب کنید که برای هر $m\ge L$ داشته باشیم

$$D(x_{3m},x_{3m+1},x_{3m+2})-P<\varepsilon \qquad (۱)$$

و

$$d(x_{3m},x_{3m+3})<\frac{\delta}{2}. \qquad (۲)$$

عدد $m\in\mathbb{N}$ که $m\ge L$ را ثابت در نظر بگیرید، برای تکمیل برهان کافی است ثابت کنیم که برای هر $n\ge m$ داریم

$$d(x_{3m},x_{3n+1})-d(A_1,A_2)<\varepsilon+\delta<2\varepsilon.$$

به این منظور کافی است برای هر $n\ge m$ به روش استقراء ثابت کنیم

$$D(x_{3m},x_{3n+1},x_{3n+2})-P<\varepsilon+\delta<2\varepsilon. \qquad (۳)$$

اگر $n=m$ که رابطه (۳) بنابر رابطه (۱) برقرار است. فرض کنیم رابطه (۳) برای یک $n\ge m$ برقرار باشد، در این صورت آنرا برای $n+1$ بدست می‌آوریم. بنابر فرض استقراء، رابطه (۲)، لم ۴ و صعودی بودن φ داریم

$$\begin{aligned}
&D(x_{3m},x_{3n+4},x_{3n+5})-P\\
&\le 2d(x_{3m},x_{3m+3})+D(x_{3m+3},x_{3n+4},x_{3n+5})-P\\
&\le 2d(x_{3m},x_{3m+3})+\varphi\big(D(x_{3m+2},x_{3n+3},x_{3n+4})-P\big)\\
&\le 2d(x_{3m},x_{3m+3})+D(x_{3m+2},x_{3n+3},x_{3n+4})-P\\
&\le 2d(x_{3m},x_{3m+3})+\varphi\big(D(x_{3m+1},x_{3n+2},x_{3n+3})-P\big)\\
&\le 2d(x_{3m},x_{3m+3})+D(x_{3m+1},x_{3n+2},x_{3n+3})-P\\
&\le 2d(x_{3m},x_{3m+3})+\varphi\big(D(x_{3m},x_{3n+1},x_{3n+2})-P\big)\\
&<\delta+\varphi(\varepsilon+\delta)\le\delta+\varepsilon<2\varepsilon
\end{aligned}$$

لذا رابطه (۳) برای $n+1$ نیز برقرار است. □

لم ۸. فرض کنید (X,d)، A_1، A_2، A_3 و T مانند لم قبل تعریف شوند. در این صورت گزاره‌های زیر معادل هستند

۱) $D(z,Tz,T^2z)=P$

۲) $T^3z=z$

اثبات. ابتدا فرض کنیم $D(z,Tz,T^2z)=P$ در این صورت از گزاره ۱ داریم $D(Tz,T^2z,T^3z)=P$ لذا $d(z,Tz)=d(T^3z,Tz)=d(A,B)$ و از آنجا که (A,B) دارای خاصیت UC است داریم $T^3z=z$.
از طرفی اگر $D(z,Tz,T^2z)>P$ و φ یک L–تابع مانند گزاره ۱ باشد داریم

$$\begin{aligned}
D(Tz,T^2z,T^3z)-P&<\varphi\big(D(z,Tz,T^2z)-P\big)\\
&\le D(z,Tz,T^2z)-P
\end{aligned}$$

که ایجاب می‌کند z نقطه ثابت T^3 نباشد. □

لم ۹. فرض کنید (X,d)، A_1، A_2، A_3 و T مانند لم ۷ تعریف شوند. در این صورت T حداکثر دارای یک بهترین نقطه تقریبی سه‌گانه در مجموعه A_1 است.

اثبات. فرض کنیم z و u هر دو از بهترین نقاط تقریبی سه‌گانه T در A_1 باشند که $D(z,Tz,T^2z)=P$ و $D(u,Tu,T^2u)=P$. L–تابع φ را مانند گزاره ۱ در نظر بگیرید. از لم ۸ می‌دانیم که z و u هر دو از نقاط ثابت T^3 هستند. چنان‌چه فرض کنیم $D(z,Tu,T^2u)>P$ در این صورت از گزاره ۱ و لم ۴ داریم

$$\begin{aligned}
D(Tz,T^2u,u)-P&=D(Tz,T^2u,T^3u)-P\\
&<\varphi\big(D(z,Tu,T^2u)-P\big)\le D(z,Tu,T^2u)-P\\
&=D(T^3z,Tu,T^2u)-P\le D(T^2z,u,Tu)-P\\
&=D(T^2z,T^3u,Tu)-P\le D(Tz,T^2u,u)-P
\end{aligned}$$

که این امکان پذیر نیست لذا $D(z,Tu,T^2u)=P$ در نتیجه $d(z,Tu)=d(u,Tu)=d(A_1,A_2)$ و از آنجا که (A_1,A_2) دارای خاصیت UC است خواهیم داشت $z=u$. □

قضیه ٤. فرض کنید A_1، A_2 و A_3 زیرمجموعه‌هایی ناتهی از فضای متریک (X,d) باشند که A_1 کامل و (A_1,A_2) دارای خاصیت UC است. گیریم $T:\bigcup_{i=1}^{3}A_i\to\bigcup_{i=1}^{3}A_i$ یک انقباض دوری جمعی میر–کیلر از مرتبه ۳ باشد. در این صورت T دارای یک بهترین

نقطه تقریبی سه‌گانه یکتا مانند $z \in A_1$ است که نقطه ثابت T^3 نیز هست و بعلاوه برای هر $x_0 \in A_1$ دنباله $\{T^{3n}x_0\}$ همگرا به z است.

اثبات. به ازای $x_0 \in A$ دنباله $\{x_n\}$ در $\bigcup_{i=1}^{3} A_i$ را به صورت $x_n := Tx_{n-1}$ تعریف کنید. بنابر لم‌های ۳ و ۷ دنباله $\{x_{3n}\}$ یک دنباله کشی در A_1 است و چون A_1 کامل است لذا نقطه $z \in A_1$ وجود دارد که دنباله $\{x_{3n}\}$ به آن همگرا است. اکنون با به کار گیری لم‌های ۶ و ۸ نقطه z بهترین نقطه تقریبی سه‌گانه T و همچنین نقطه ثابت T^3 است. یکتایی نقطه z هم از لم ۹ نتیجه می‌شود. □

به روشی کاملا مشابه مراحل اثبات قضیه قبل می‌توان قضیه زیر را ثابت کرد.

قضیه ۵. فرض کنید A_1، A_2 و A_3 زیرمجموعه‌هایی غیر تهی از فضای متریک کامل (X,d) باشند. گیریم خودنگاشت $T: \bigcup_{i=1}^{3} A_i \to \bigcup_{i=1}^{3} A_i$ یک نگاشت دوری مرتبه ۳ باشد که به ازای هر $\varepsilon > 0$، عددی مانند $\delta > 0$ موجود باشد به‌گونه‌ای که برای هر $(x_1,x_2,x_3) \in A_1 \times A_2 \times A_3$، شرط $\varepsilon \le D(x_1,x_2,x_3) < \varepsilon + \delta$ ایجاب کند که $D(Tx_1,Tx_2,Tx_3) < \varepsilon$. در این صورت خواهیم داشت $\bigcap_{i=1}^{3} A_i \neq \phi$ و برای هر $x_0 \in \bigcup_{i=1}^{3} A_i$ دنباله $\{T^{3n}x_0\}$ همگرا به نقطه ثابت یکتای T در $\bigcap_{i=1}^{3} A_i$ است.

مثال ۱. تابع $\varphi:[0,+\infty) \to [0,+\infty)$ با ضابطه زیر را در نظر بگیرید

$$\varphi(t) = \begin{cases} t^2 & t \le 1 \\ 1 & t > 1 \end{cases}$$

به سادگی می‌توان بررسی کرد که φ یک L–تابع است.
سه مجموعه

$$A_1 = \{(x,0):\ 0 \le x \le \frac{1}{4}\},$$
$$A_2 = \{(-y,0):\ 0 \le y \le \frac{1}{4}\},$$
$$A_3 = \{(0,z):\ 0 \le z \le \frac{1}{4}\},$$

را به عنوان زیرمجموعه‌هایی از $\mathbb{R}^2$ مجهز به متر اقلیدسی در نظر بگیرید. در اینجا داریم $P=0$.
خودنگاشت دوری $T: \bigcup_{i=1}^{3} A_i \to \bigcup_{i=1}^{3} A_i$ را با ضابطه زیر تعریف می‌کنیم

$$\begin{cases} T(x,0) = (-x^2,0) & (x,0) \in A_1, \\ T(-y,0) = (0,y^2) & (-y,0) \in A_2, \\ T(0,z) = (z^2,0) & (0,z) \in A_3, \end{cases}$$

در این صورت به ازای هر $0 \le x,y,z \le \frac{1}{4}$ که $D\left((x,0),(-y,0),(0,z)\right) > 0$ داریم

$$\begin{aligned} &D\left(T(x,0),T(-y,0),T(0,z)\right) \\ &= \sqrt{x^4+y^4} + \sqrt{y^4+z^4} + \sqrt{(x^2+z^2)^2} \\ &\le 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 \\ &< \varphi\left(\sqrt{(x+y)^2} + \sqrt{y^2+z^2} + \sqrt{z^2+x^2}\right) \\ &= \varphi\left(D\left((x,0),(-y,0),(0,z)\right)\right) \end{aligned}$$

و بدیهی است که اگر $D\left((x,0),(-y,0),(0,z)\right) = 0$ آنگاه داریم $D\left(T(x,0),T(-y,0),T(0,z)\right) = 0$. لذا بنابر گزاره ۱ نگاشت T یک انقباض دوری جمعی میر–کیلر از مرتبه ۳ است. می‌توان دید که تمام شرایط قضیه ۴ برقرار هستند و $z = (0,0)$ در احکام این قضیه صدق می‌کند. توجه کنید که قضیه ۲ برای این مثال کاربرد ندارد. □

فهرست منابع

[1] Di Bari, C., Suzuki, T., Vetro, C.: Best proximity points for cyclic Meir-Keeler contractions. Nonlinear Anal. 69(11), 3790-3794 (2008)

[2] Eldred, A. A., Veeramani, P.: Existence and convergence of best proximity points. J. Math. Anal. Appl. 323(2), 1001-1006 (2006)

[3] Fallahi, K., Ghahramani, H., Soleimani-Rad, Gh.: Integral type contractions in partially ordered metric spaces and best proximity point. Iran J Sci Technol Trans Sci. 44, 177-183 (2020)

[4] Felicit, J. M., Eldred, A. A.: Best proximity points for cyclical contractive mappings, Appl. Gen. Topol. 16(2) 119-126 (2015)

[5] Karpagam, S., Agrawal, S.: Best proximity point theorems for p-cyclic Meir-Keeler contractions. Fixed Point Theory Appl. Article ID: 197308 (2009)

[6] Karpagam, S., Agrawal, S.: Existence of best proximity points of p-cyclic contractions. Fixed Point Theory. 13(1), 99-105 (2012)

[7] Karpagam, S., Zlatanov, B.: Best proximity points of p-cyclic orbital Meir-Keeler contraction maps. Nonlinear Anal. 21(6), 790-806 (2016)

[8] Lim, T. C.: On characterizations of Meir-Keeler contractive maps. Nonlinear Anal. 46, 113-120 (2001)

[9] Meir, A., Keeler, E.: A theorem on contraction mappings. J. Math. Anal. Appl. 28(2), 326-329 (1969)

[10] Petric, M. A., Zlatanov, B.: Best proximity points and fixed points for p-summing maps. Fixed Point Theory Appl. (2012)

[11] Safari-Hafshejani, A., Amini-Harandi, A. Fakhar, F.: Best proximity points and fixed points results for noncyclic and cyclic Fisher quasi-contractions. Numer. Funct. Anal. Optim. 40(5), 603-619 (2019)

[12] Suzuki, T.: Some notes on Meir-Keeler contractions and L-functions, Bull. Kyushu Inst. Technol. Pure Appl. Math. 53, 1-13 (2006)

[13] Suzuki, T., Kikkawa, M., Vetro, C.: The existence of best proximity points in metric spaces with the property UC. Nonlinear Anal. 71(7), 2918-2926 (2009)