

میانگین پذیری ضعیف جبر برلینگ حاصل ضرب‌های آزاد

الهام قیصری^۱، اکرم یوسف زاده^۲، محمدصادق عسگری^{۳*}

^(۳) گروه ریاضی و آمار، دانشکده علوم پایه، دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکزی، تهران، ایران

^(۲) گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه آزاد اسلامی واحد مبارکه، مبارکه، اصفهان، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۸/۰۳/۰۷ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۸/۱۱/۲۱

چکیده

در این مقاله، برای گروه گسسته $G = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}_n$ و یک تابع وزن چند جمله‌ای ω_α نشان می‌دهیم که جبر برلینگ $\ell^1(G, \omega_\alpha)$ میانگین‌پذیر ضعیف نیست و گروه دو وجهی $D_\infty = \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ میانگین‌پذیر است اما $\ell^1(D_\infty, \omega)$ میانگین‌پذیر ضعیف نیست. همچنین نشان می‌دهیم برای یک تابع وزن پیوسته ω روی گروه G ، جبر برلینگ $\ell^1(G, \omega)$ تحت شرایطی اگر میانگین‌پذیر ضعیف باشد آنگاه ω کراندار است.

واژه‌های کلیدی: مشتق، میانگین‌پذیر ضعیف، وزن، گروه فشرده موضعی، حاصلضرب آزاد.

$$f \cdot a(x) = f(ax)$$

$$a \cdot f(x) = f(xa)$$

برای هر $a \in A$ و $x \in X$ و $f \in X^*$ ، یک $-A$ دو مدول باناخ است.

تعریف ۱-۲: فرض کنید A یک جبر باناخ و X یک $-A$ دو مدول باناخ باشد. یک تابع خطی $D : A \rightarrow X$ با این ویژگی که برای هر $a, b \in A$ داشته باشیم $D(ab) = aD(b) + D(a)b$

یک مشتق نامیده می‌شود. همچنین برای هر $x \in X$ نگاشت مشتق $D : A \rightarrow X$ با ضابطه

$$D(a) = a \cdot x - x \cdot a$$

یک مشتق درونی نام دارد.

تعریف ۱-۳: جبر باناخ A میانگین پذیر گفته می‌شود اگر برای هر $-A$ دو مدول باناخ X هر مشتق $D : A \rightarrow X^*$

درونی باشد، به عبارت دیگر عنصر $\zeta \in X^*$ چنان وجود داشته باشد که

$$D(a) = a \cdot \zeta - \zeta \cdot a \quad (a \in A)$$

به ویژه اگر هر مشتق $D : A \rightarrow A^*$ درونی باشد، A را میانگین‌پذیر ضعیف می‌گویند.

یادآوری می‌کنیم که یک وزن روی گروه گسسته G ، یک تابع $\omega : G \rightarrow \mathbb{R}^+$ است به طوری که برای هر $x, y \in G$ در نامساوی $\omega(xy) \leq \omega(x)\omega(y)$ صدق می‌کند.

تعریف ۱-۴: فضای $\ell^1(G, \omega)$ که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\ell^1(G, \omega) = \{f = \sum_{x \in G} f(x)\delta_x \in \mathbb{C}^G : \sum_{x \in G} |f(x)|\omega(x) < \infty\}$$

با نرم

$$\|f\|_{\ell^1(G, \omega)} = \sum_{x \in G} |f(x)|\omega(x)$$

۱- مقدمه

میانگین‌پذیری $\ell^1(G, \omega)$ برای گروه فشرده موضعی G بطور کامل در سال ۱۹۹۰ توسط گرونباک^۱ مشخص شد. او نشان داد که $\ell^1(G, \omega)$ میانگین‌پذیر است اگر و فقط اگر G میانگین‌پذیر و تابع $\omega(t)\omega(t^{-1})$ روی G کراندار باشد [۴]. میانگین‌پذیری ضعیف ابتدا در [۱] روی $\ell^1(G, \omega)$ مطالعه شد. نویسندگان آن مقاله نشان دادند که برای گروه جمعی \mathbb{Z} از اعداد صحیح و برای وزن $\omega_\alpha = (1 + |x|)^\alpha$ روی \mathbb{Z} ، $\ell^1(\mathbb{Z}, \omega_\alpha)$ میانگین‌پذیر ضعیف است اگر و فقط اگر $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$. سپس در [۳] نشان داده شد، $\ell^1(\mathbb{Z}, \omega)$ که ω یک تابع وزن است، میانگین‌پذیر ضعیف است اگر و فقط اگر $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\omega(n)\omega(-n)}{n} = 0$

اخیرا در [۹] نشان داده شده که برای گروه آبلی G و برای هر $t \in G$ اگر

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\omega(t^n)\omega(t^{-n})}{n} = 0$$

آنگاه $\ell^1(G, \omega)$ میانگین‌پذیر ضعیف است. میانگین‌پذیری ضعیف $\ell^1(G, \omega)$ برای دو گروه غیرآبلی و فشرده موضعی G ، که عبارتند از گروه آزاد \mathbb{F}_2 که میانگین‌پذیر نیست و $(ax + b)$ -گروه، که میانگین‌پذیر است، در سال ۲۰۱۵ توسط شپلسکا^۲ [۱۰] بررسی شده است. برای جزئیات بیشتر در باره میانگین‌پذیری به مراجع [۸، ۱۲، ۱۳] رجوع شود. ما در این مقاله میانگین‌پذیری ضعیف $\ell^1(G, \omega)$ را برای گروه غیرآبلی و گسسته $G = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}_n$ که ضرب آزاد \mathbb{Z} و \mathbb{Z}_n است نشان می‌دهیم و شرایطی را برای زیر گروه‌های G بیان می‌کنیم.

در این ادامه این بخش، تعاریف اساسی میانگین‌پذیری ضعیف را یادآوری می‌کنیم.

تعریف ۱-۱: فرض کنید A یک جبر باناخ و X یک $-A$ دو مدول باناخ باشد. فضای دوگان X^* از X با عمل مدول که به صورت زیر تعریف می‌شود:

1. N. Gronbaek
2. V. Shepelska

و ضرب پیش

$$f * g(x) = \sum_{y \in G} f(y^{-1}x)g(y), \quad \forall x \in G$$

یک جبر باناخ است که جبر برلینگ گسسته نامیده می‌شود.

یادآور می‌شویم که اگر G یک گروه فشرده موضعی باشد، $\mathcal{L}^1(G)$ همواره یک جبر باناخ میانگین‌پذیر ضعیف است [۳].

۲- نتایج اصلی

مطالب زیر نتایج اصلی است که تاکنون در رابطه با میانگین‌پذیری جبر برلینگ $\mathcal{L}^1(G, \omega)$ به اثبات رسیده است.

قضیه ۱-۲: [۱۱] فرض کنید G یک گروه فشرده موضعی آبلی و ω یک وزن روی آن باشد. در این صورت $\mathcal{L}^1(G, \omega)$ میانگین‌پذیر ضعیف است اگر و فقط اگر هیچ همریختی غیر صفر $\phi: G \rightarrow (\mathbb{C}, +)$ وجود نداشته باشد بقسمی که

$$\sup_{x \in G} \frac{|\phi(x)|}{\omega(x)\omega(x^{-1})} < \infty.$$

قضیه بعد نتیجه مشابهی برای گروه گسسته دلخواه G ارائه می‌کند. این قضیه که توسط پورعباس^۳ ثابت شده است، یک شرط لازم برای میانگین‌پذیری $\mathcal{L}^1(G, \omega)$ بیان می‌کند. شایان ذکر است که عکس این قضیه برقرار نیست. برای یک مثال نقض [۲] را ببینید.

قضیه ۲-۲: [۶] فرض کنید G یک گروه گسسته و ω یک وزن روی آن باشد. اگر یک همریختی گروهی $\phi: G \rightarrow \mathbb{R}$ وجود داشته باشد به قسمی که

$$\sup_{x \in G} \frac{|\phi(x)|}{\omega(x)\omega(x^{-1})} < \infty$$

آنگاه $\mathcal{L}^1(G, \omega)$ میانگین‌پذیر ضعیف نیست.

لم کاربردی زیر شرایطی بر گروه گسسته G و وزن ω بیان می‌کند که منجر به عدم پیوستگی $\mathcal{L}^1(G, \omega)$

می‌گردد. ما از این لم در فصل بعد استفاده می‌کنیم.

قضیه ۲-۳: [۲] فرض کنید G یک گروه گسسته و ω یک وزن روی آن باشد. اگر یک تابع $\Psi: G \rightarrow \mathbb{R}$ و $x_0 \in G$ ثابت و $C > 0$ وجود داشته باشند بقسمی که ω کراندار دور از صفر روی کلاس مزدوجی $\{yx_0y^{-1}\}_{y \in G}$ باشد،

$$|\Psi(xy) - \Psi(yx)| \leq C\omega(x)\omega(y) \quad (۲-۱)$$

و

$$\sup_{y \in G} \frac{|\Psi(yx_0y^{-1})|}{\omega(yx_0y^{-1})} = \infty, \quad (۲-۲)$$

آنگاه $\mathcal{L}^1(G, \omega)$ میانگین‌پذیر ضعیف نیست.

تعریف ۲-۴: G را یک گروه تابدار گوییم هرگاه هر عضو گروه G دارای مرتبه متناهی باشد و G را یک گروه بی‌تاب گوییم هرگاه هر عضو غیرهمانی آن دارای مرتبه نامتناهی باشد.

لم ۲-۵: فرض کنید G یک گروه تابدار باشد. در این صورت هیچ همریختی غیر صفر $\phi: G \rightarrow (\mathbb{C}, +)$ وجود ندارد.

برهان. فرض کنید چنین همریختی وجود داشته باشد بنابراین برای هر $m \in \mathbb{N}$ $\phi(x^m) = m\phi(x)$ اما چون G یک گروه تابدار است پس برای هر $x \in G$ عدد $m \in \mathbb{N}$ چنان وجود دارد که $\phi(x^m) = 0$ و لذا $\phi(x) = 0$ است.

با شیوه‌ای مشابه نتیجه زیر نیز به دست می‌آید.

نتیجه ۲-۶: اگر G یک گروه آبلی تابدار یا گروهی باشد که مولدهای آن مرتبه متناهی دارند، آنگاه برای هر تابع وزن ω بر G ، $\mathcal{L}^1(G, \omega)$ میانگین‌پذیر ضعیف است.

مثال ۲-۷: فرض کنید $n \in \mathbb{N}$ و $G = \bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_n$ در این صورت G یک گروه آبلی (نامتناهی) و تابدار است. پس هیچ همریختی غیربدیهی از G به $(\mathbb{C}, +)$ وجود

لم ۳-۴: فرض کنید A و B دو گروه باشند و دو عضو x و y از حاصلضرب آزاد $B * A$ با هم جابجا شوند. در این صورت یکی از حالات زیر اتفاق می‌افتد
الف) x و y در یک گروه دوری هستند.
ب) x و y در مزدوج یکسانی از A یا B هستند.

برهان. این مطلب نتیجه مستقیمی از قضیه (۴-۵) از [۵] است.

نتیجه ۳-۵: دو عضو از حاصلضرب آزاد $B * A$ که A و B دو گروه دوری هستند، جابجا می‌شوند اگر و فقط اگر در یک زیرگروه دوری از $B * A$ باشند.

گزاره ۳-۶: فرض کنید $\alpha > 0$ باشد و ω_α یک تابع روی $G = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}_n$ باشد که برای هر $x \in G$ به صورت $\omega_\alpha = (1 + |x|)^\alpha$ تعریف می‌شود. در این صورت ω_α یک وزن روی G است که وزن چندجمله‌ای نامیده می‌شود و $\ell^1(G, \omega_\alpha)$ میانگین پذیر ضعیف نیست.

برهان. چون تابع $| \cdot |$ روی G در نامساوی مثلثی $|xy| \leq |x| + |y|$ برای هر $x, y \in G$ صدق می‌کند بنابراین ω_α یک وزن روی G است زیرا برای هر $x, y \in G$ داریم

$$\begin{aligned} \omega_\alpha(x, y) &= (1 + |xy|)^\alpha \\ &\leq (1 + |x| + |y|)^\alpha \\ &\leq (1 + |x|)^\alpha (1 + |y|)^\alpha \\ &= \omega_\alpha(x) \omega_\alpha(y). \end{aligned}$$

برای این که ثابت کنیم $\ell^1(G, \omega_\alpha)$ میانگین پذیر ضعیف نیست ابتدا حالت $\alpha > 1/2$ را در نظر می‌گیریم. چون برای هر $t \in G$ $|A(t)| \leq |t|$ است. پس دو حالت را در نظر می‌گیریم. ابتدا حالت $|t| \leq |t^{-1}|$ را بررسی می‌کنیم، چون $\alpha > 1/2$ پس داریم

$$\sup_{|t| \leq |t^{-1}|} \frac{|A(t)|}{\omega_\alpha(t) \omega_\alpha(t^{-1})}$$

ندارد (توجه کنید که G نامتناهی مولد است). لذا برای هر وزن ω ، جبر $\ell^1(G, \omega)$ میانگین پذیر ضعیف است.

۳-وزن‌های چندجمله‌ای روی $G = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}_n$
در این بخش، وزن‌های چندجمله‌ای روی گروه $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_n$ را در نظر می‌گیریم و در ادامه نشان می‌دهیم بر خلاف قضیه‌ای از میانگین‌پذیری ضعیف برای جبرهای برلینگ گسسته و آبلی، وزن‌هایی وجود دارند که این جبرها، میانگین‌پذیر ضعیف نیستند.

نتایج زیر که از مرجع [۱۰] استفاده می‌شوند در ادامه این مقاله از آن استفاده خواهیم کرد.

لم ۳-۱: فرض کنید $0 < \alpha \leq 1$. آنگاه برای هر $x, y \in \mathbb{R}$

$$||x|^\alpha - |y|^\alpha| \leq |x - y|^\alpha$$

لم ۳-۲: فرض کنید $x, y \geq 0$ و $x, y \in \mathbb{R}$ آنگاه وجود دارد $C > 0$ که $x < Cy$ است.

تعریف ۳-۳: فرض کنید a و b به ترتیب دو مولد \mathbb{Z} و \mathbb{Z}_n باشند. ضرب آزاد \mathbb{Z} و \mathbb{Z}_n ، به صورت گروه $G = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}_n$ نمایش می‌دهیم. هر $x \in \mathbb{Z} * \mathbb{Z}_n$ بصورت فرم غیرحذف‌شدنی $x = a^{k_1} b^{l_1} \dots a^{k_m} b^{l_m}$ است که $0 \leq l_i < n$ و $k_i \in \mathbb{Z}$ و همه k_i به غیر از k_1 و l_m برای هر $1 \leq i \leq m$ مخالف $m \in \mathbb{N}$ صفر هستند. طول x را به صورت

$$|x| = \sum_{i=1}^m (|k_i| + |l_i|)$$

تعریف می‌کنیم. مقدار $\sum_{i=1}^m k_i$ مجموع توان‌های a در x است و با $A(x)$ نشان می‌دهیم. توجه کنید که A یک هم‌ریختی گروهی از $G = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}_n$ به \mathbb{Z} است.

لازم به ذکر است که گزاره (۳-۶) و قضیه (۴-۴)، در [۱۰] برای گروه \mathbb{F}_2 اثبات شده است، برای گروه $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_n$ به طور دقیق قابل پیاده‌سازی نیست به همین دلیل در اینجا دو اثبات را می‌آوریم. ابتدا لم زیر را که در حالت کلی برای حاصلضرب آزاد گروه‌ها برقرار است بیان می‌کنیم.

شدنی باشند. بدون از دست دادن کلیت، فرض می‌کنیم
 که $|u| \leq |v|$ چون
 $vav^{-1} = yx = y(xy)y^{-1} = yuau^{-1}y^{-1}$
 است، پس داریم
 $(u^{-1}y^{-1}v)a = a(u^{-1}y^{-1}v)$.

بنابراین عنصرهای a و $u^{-1}y^{-1}v$ جابجایی‌اند که این
 بنابر لم (۳-۴) در یک گروه آزاد زمانی اتفاق می‌افتد که
 هر دو عنصر توانی از عنصر سومی باشند. چون a یکی از
 مولدهای G است پس تنها می‌تواند توانی از خودش باشد
 که در این صورت برای $k \in \mathbb{Z}$ ، $u^{-1}y^{-1}v = a^k$
 عبارت دیگر $yu = va^{-k}$ است. دو حالت $k = 0$ و
 $k \neq 0$ را در نظر می‌گیریم: اگر $k = 0$ باشد آنگاه
 $y = vu^{-1}$
 $x = (xy)y^{-1} = (uau^{-1})(uv^{-1})$
 $= uav^{-1}$.

پس در این حالت نامعادله (۳-۱) را ثابت می‌کنیم، یعنی
 باید نامعادله

$$||u|^\beta - |v|^\beta| \leq (1 + |vu^{-1}|)^\alpha (1 + |uav^{-1}|)^\alpha$$

را نشان دهیم. چون $0 < \alpha < 1/2$ و $0 < \alpha < 2\alpha$
 پس $0 < \beta \leq 1$ و بنابراین با استفاده از لم ۳-۱،

$$||u|^\beta - |v|^\beta| \leq ||u| - |v||^\beta$$

و چون $|u| \leq |v|$ پس

$$|vu^{-1}| \geq ||u| - |v||$$

و بنابر لم ۳-۲

$$C|uav^{-1}| \geq ||u| - |v|| - 1$$

را داریم. بنابراین:

$$\begin{aligned} & C(1 + |vu^{-1}|)^\alpha (1 + |uav^{-1}|)^\alpha \\ & \geq (1 + ||u| - |v||)^\alpha ||u| - |v||^\alpha \\ & \geq ||u| - |v||^{2\alpha} \\ & \geq ||u| - |v||^\beta \\ & \geq ||u|^\beta - |v|^\beta|, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & = \sup_{\substack{t \in G \\ |t| \leq |t^{-1}|}} \frac{|A(t)|}{(1+|t|)^\alpha(1+|t^{-1}|)^\alpha} \\ & \leq \sup_{\substack{t \in G \\ |t| \leq |t^{-1}|}} \frac{|t|}{(1+|t|)^\alpha(1+|t^{-1}|)^\alpha} \\ & \leq \sup_{\substack{t \in G \\ |t| \leq |t^{-1}|}} \frac{|t|^{\frac{1}{2}}}{(1+|t|)^\alpha} \frac{|t^{-1}|^{\frac{1}{2}}}{(1+|t^{-1}|)^\alpha} < \infty \end{aligned}$$

برای حالت $|t^{-1}| \leq |t|$ نیز بطور مشابه برقرار است و
 بنابراین خواهیم داشت

$$\sup_{t \in G} \frac{|A(t)|}{\omega_\alpha(t)\omega_\alpha(t^{-1})} < \infty.$$

چون $A: G \rightarrow \mathbb{Z}$ یک هم‌بختی گروهی است بنابر
 قضیه (۲-۲) ثابت می‌شود که $\ell^1(G, \omega_\alpha)$ میانگین
 پذیر ضعیف نیست. اکنون حالتی که $0 < \alpha < 1/2$
 است را در نظر می‌گیریم. در این حالت از لم (۳-۳)
 استفاده می‌کنیم. یک مقدار دلخواه $\beta \in (\alpha, 2\alpha)$ را
 انتخاب می‌کنیم و فرض می‌کنیم که تابع $\psi: G \rightarrow \mathbb{R}$
 بصورت زیر تعریف شود:

$$\psi(x) = \begin{cases} |t|^\beta & x = tat^{-1}, t \in G \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

که tat^{-1} غیر حذف‌شدنی است. ادعا می‌کنیم که ψ در
 شرایط لم ۲-۳ برای $x_0 = a$ صدق می‌کند. واضح است
 که وزن ω_α روی G کراندار دور از صفر است پس
 بخصوص روی $\{yay^{-1}\}_{y \in G}$ نیز چنین است. حال
 اثبات می‌کنیم که ψ در (۳-۲) برای $C > 0$ صدق
 می‌کند، به عبارت دیگر برای هر $x, y \in G$ داریم
 $|\psi(xy) - \psi(yx)| \leq C\omega_\alpha(x)\omega_\alpha(y)$ (۳-۱)

بنابر تعریف ψ تنها حالتی که x متعلق به کلاس

$$E = \{tat^{-1}\}_{t \in G}$$

است باقی می‌ماند. عنصر yx و xy همواره متعلق به
 یک کلاس هستند زیرا $yx = y(xy)y^{-1}$. ما نیاز
 داریم که (۳-۳) را در حالتی که yx و xy متعلق به
 کلاس E هستند ثابت کنیم. فرض کنید $yx =$
 vav^{-1} و $xy = uau^{-1}$ دو نمایش غیر حذف

$\ell^1(G, \omega_\alpha)$ میانگین‌پذیر ضعیف نیست.

تعریف ۳-۷: گروه D_∞ به کمک مولدها و روابط به صورت زیر تعریف می‌شود
 $D_\infty = \langle a, b : a^2 = b^2 = e \rangle$

در این صورت می‌توان دید که $D_\infty = \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ این گروه را گروه دو وجهی نامتناهی می‌نامند. به وضوح هر $x \in D_\infty$ به صورت رشته‌ای یکتا و تقلیل یافته از عناصر a, b است. طول x را حاصل جمع تعداد a و تعداد b هایی که ظاهر می‌شوند، در نظر گرفته با $|x|$ نشان می‌دهیم.

نکته ۳-۸: گروه D_∞ میانگین‌پذیر است. در واقع با توجه به تعریف $D_\infty = \langle a, b : a^2 = b^2 = e \rangle$ اگر قرار دهیم $H = \langle ab \rangle$ ، آنگاه تابع

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & |x| \text{ فرد باشد} \\ 0 & |x| \text{ زوج باشد} \end{cases}$$

یک همریختی پوشا به \mathbb{Z}_2 با هسته H تشکیل می‌دهد. در نتیجه $\frac{D_\infty}{H} \cong \mathbb{Z}_2$ بنابراین گروهی میانگین‌پذیر است.

حال در قضیه زیر نشان می‌دهیم که $\ell^1(D_\infty, \omega)$ میانگین‌پذیر ضعیف نیست.

قضیه ۳-۹: فرض کنید ω یک تابع روی $G = D_\infty$ باشد که بصورت $\omega(x) = (1 + |x|)$ برای هر $x \in G$ تعریف می‌شود. آنگاه ω یک وزن روی G است که وزن چندجمله‌ای نامیده می‌شود و $\ell^1(G, \omega)$ میانگین‌پذیر ضعیف نیست.

برهان: با توجه به لم ۲-۵ هیچ همریختی غیربدیهی $\phi: G \rightarrow (\mathbb{C}, +)$ وجود ندارد لذا شرط قضیه ۲-۲ برقرار نیست. در اینجا لم ۳-۲ را به کار می‌بریم. فرض می‌کنیم که تابع $\psi: G \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه به صورت $\psi(x) = |x|^2$ تعریف شود. اکنون قرار می‌دهیم $x_0 = a$ در این صورت همواره یکی از دو حالت

چون $\beta \leq 2\alpha$ و $\| |u| - |v| \| \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ است بنابراین (۳-۱) در حالت $k = 0$ برقرار است. حال فرض کنید $k \neq 0$ باشد. پس $yu = va^{-k}$ است. یادآوری می‌کنیم که عبارت uau^{-1} و vav^{-1} غیر حذف‌شدنی هستند این به این معنی است که هر دوی u و v ، با یک توان غیرصفر از مولد بعدی $G = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}_n$ که همان b است، به پایان می‌رسند، بنابراین برای حالت $k \neq 0$ معادله $yu = va^{-k}$ تنها زمانی که $y = tu^{-1}$ و tu^{-1} غیر حذف‌شدنی است، امکان دارد. در این حالت، $t = va^{-k}$ و $|t| = |v| + |k|$ و معادل با $|v| = |t| - |k|$ است. همچنین داریم:

$$x = (xy)y^{-1} = (uau^{-1})(ut^{-1}) = uat^{-1}$$

بنابراین همانند حالت قبلی، نامعادله (۳-۱) برقرار است.
 $\| |u|^\beta - (|t| - |k|)^\beta \| \leq (1 + |tu^{-1}|)^\alpha (1 + |uat^{-1}|)^\alpha$.

فرضیات شروع را که به صورت

$$|u| \leq |v| \leq |t| - |k|$$

بود را یادآوری می‌کنیم، همچنین با بکار بردن استدلال حالت قبلی داریم:

$$\begin{aligned} & \| |u|^\beta - (|t| - |k|)^\beta \| \\ &= (|t| - |k|)^\beta - |u|^\beta \\ &\leq \| |t| - |k| - |u| \|^\beta \\ &\leq \| |t| - |u| \|^\beta \\ &\leq (1 + |tu^{-1}|)^\alpha (1 + |uat^{-1}|)^\alpha, \end{aligned}$$

بنابراین (۳-۱) برای حالت $k \neq 0$ نیز برقرار است. سرانجام باید بررسی کنیم که برای $x_0 = a$ در رابطه (۲-۲) صدق می‌کند. چون $\beta > \alpha$ است:

$$\begin{aligned} & \sup_{y \in G} \frac{|\psi(yay^{-1})|}{\omega_\alpha(yay^{-1})} \\ &\geq \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{|\psi(b^{n-1}ab^{-(n-1)})|}{\omega_\alpha(b^{n-1}ab^{-(n-1)})} \\ &= \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{(n-1)^\beta}{(2(n-1)+2)^\alpha} = \infty \end{aligned}$$

بنابراین تابع ψ در شرایط لم (۳-۲) صدق می‌کند پس

داریم:

$$\sup_{x \in G} \frac{|\phi(x)|}{\omega(x)\omega(x^{-1})} = \infty.$$

همچنین قضیه بعدی را داریم:

قضیه ۳-۱۲: فرض کنید G یک گروه آبلی (نه لزوماً متناهی تولید شده) باشد و $\ell^1(G, \omega)$ میانگین پذیر ضعیف نباشد، در این صورت یک زیرگروه دوری از G مانند H وجود دارد بقسمی که $\ell^1(H, \omega|_H)$ میانگین پذیر ضعیف نیست.

۴- میانگین پذیری ضعیف $\ell^1(\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_n, \omega)$ روی همه‌ی وزن‌ها

تعریف ۴-۱: فرض کنید ω یک وزن روی گروه G باشد، ω را به طور قطری کراندار می‌نامیم اگر تابع $x \mapsto \omega(x)\omega(x^{-1})$

روی G کراندار باشد.

گزاره ۴-۲: ([۷، قضیه ۳-۱۴]). فرض کنید G یک گروه فشرده موضعی و ω یک وزن به طور قطری کراندار روی آن باشد. در این صورت جبر برلینگ $L^1(G, \omega)$ میانگین پذیر ضعیف است.

لم ۴-۳: فرض کنید $g: \mathbb{N} \cup \{0\} \rightarrow [1, \infty)$ یک تابع افزایشی باشد به قسمی که:

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} g(n) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{n}{g(n)} = \infty.$$

آنگاه یک تابع $f: \mathbb{N} \cup \{0\} \rightarrow [1, \infty)$ با خواص زیر وجود دارد.

$$(۱) \quad f \text{ افزایشی است؛}$$

$$(۲) \quad \text{به ازای هر } m, n \in \mathbb{N} \text{ با } m \geq n$$

$$\begin{aligned} & f(m+n) - f(m-n) \\ & \leq g(m)g(n), \\ & \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty. \end{aligned} \quad (۳)$$

برهان: [۱۰] را ببینید.

می‌افتد لذا $|zt| = ||z| - |t||$ یا $|zt| = |z| + |t|$ اتفاق

$$\begin{aligned} & |\psi(xy) - \psi(yx)| \\ & = ||xy|^2 - |yx|^2| \leq 4|x||y| \\ & \leq 4(1+|x|)(1+|y|) \\ & = 4\omega(x)\omega(y). \end{aligned}$$

از طرفی داریم

$$\begin{aligned} & \sup_{y \in G} \frac{|\psi(yay^{-1})|}{\omega_\alpha(yay^{-1})} \\ & \geq \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{|\psi(ba...bab...b)|}{\omega_\alpha(ba...ab)} \\ & = \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{|ba...bab...b|^2}{1+|ba...ab|} \\ & = \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{n^2}{(1+n)} = \infty \end{aligned}$$

بنابراین شرایط لم ۲-۳ برقرار است. از طرفی واضح است که ω بر کل G کراندار دور از صفر است پس $\ell^1(G, \omega)$ میانگین پذیر ضعیف نیست.

نکته ۳-۱۰: فرض کنید G یک گروه گسسته و ω یک وزن روی آن باشد. اگر یک همریختی غیر بدیهی $\phi: G \rightarrow (\mathbb{C}, +)$ وجود داشته باشد به قسمی که

$$\sup_{x \in G} \frac{|\phi(x)|}{\omega(x)\omega(x^{-1})} < \infty,$$

آنگاه چون ϕ غیر بدیهی است پس یک عنصر $t_0 \in G$ وجود دارد به قسمی که $\phi(t_0) \neq 0$. بنابراین اگر قرار دهیم $H = \langle t_0 \rangle$ آنگاه $\phi|_H$ غیر بدیهی است. توجه کنید که $\omega|_H$ ، یک وزن روی H است و

$$\sup_{x \in H} \frac{|\phi(x)|}{\omega(x)\omega(x^{-1})} < \infty,$$

پس $\ell^1(H, \omega|_H)$ میانگین پذیر ضعیف نیست. بنابراین قضیه زیر را داریم:

قضیه ۳-۱۱: فرض کنید G یک گروه گسسته و ω یک وزن روی آن باشد. اگر برای هر زیرگروه آبلی از G مانند H ، $\ell^1(H, \omega|_H)$ میانگین پذیر ضعیف باشد آنگاه برای هر همریختی گروهی، غیر صفر

$$\phi: G \rightarrow (\mathbb{C}, +)$$

$$\begin{aligned} \sup_{x \in G} \frac{|x|}{(g(|x|))^2} &\geq \sup_{x \in G} \frac{|A(x)|}{(g(|x|))^2} \\ &\geq \sup_{x \in G} \frac{|A(x)|}{\frac{1}{c_1^2}(\omega(x))^2} \\ &\geq \sup_{x \in G} \frac{|A(x)|}{\omega(x)\omega(x^{-1})} = \infty \end{aligned}$$

برای حالت $|x^{-1}| \leq |x|$ نیز به طور مشابه برقرار است:

$$\begin{aligned} \sup_{x \in G} \frac{|x|}{(g(|x|))^2} &\geq \sup_{x \in G} \frac{|x^{-1}|}{(g(|x|))^2} \\ &\geq \sup_{x \in G} \frac{|A(x^{-1})|}{(g(|x|))^2} \\ &\geq \sup_{x \in G} \frac{|A(x^{-1})|}{(\omega(x))^2} = \infty \end{aligned}$$

بنابراین داریم:

$$\sup_{x \in G} \frac{|x|}{(g(|x|))^2} = \infty,$$

و سپس

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{n}{g(n)} \geq \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{\sqrt{n}}{g(n)} = \infty.$$

بنابراین با اعمال لم ۳-۴ و با استفاده از تابع g که تابع افزایشی $f: \mathbb{N} \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ را می‌دهد به قسمی که

$$(1) \quad m \geq n \text{ هر } m, n \in \mathbb{N} \text{ با}$$

$$f(m+n) - f(m-n) \leq g(m)g(n),$$

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty. \quad (2)$$

باید نشان دهیم که $\psi(x) = f(|x|)$ در شرایط لم ۳-۴ برای $x_0 = a$ یا $x_0 = a^2$ صدق می‌کند، که این نشان می‌دهد که $\ell^1(\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_n, \omega)$ میانگین پذیر ضعیف نیست. توجه کنید چون $\omega(x) \geq c_1 g(|x|)$ و ω کراندار دور از صفر روی گروه $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_n$ و به خصوص روی هر کلاس هم‌دسته $\{yx_0y^{-1}\}_{y \in \mathbb{Z} * \mathbb{Z}_n}$ است. حالا هدف ما یافتن ثابت $C > 0$ است به قسمی که به ازای هر $x, y \in G$

$$|\psi(xy) - \psi(yx)| \leq C\omega(x)\omega(y), \quad (3)$$

قضیه زیر مشابه قضیه (۴-۲) در [۱۰] است که برای گروه آزاد غیر آبلی با دو مولد اثبات شده است.

قضیه ۴-۴: گروه $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_n$ با وزن ω روی آن مفروض هستند. تابع افزایشی $g: \mathbb{N} \cup \{0\} \rightarrow [1, \infty)$ و ثابت‌های $c_1, c_2 > 0$ چنان وجود دارند به قسمی که به ازای هر $x \in \mathbb{Z} * \mathbb{Z}_n$

$$c_1 g(|x|) \leq \omega(x) \leq c_2 g(|x|)$$

که $|x|$ طول x است. اگر $\ell^1(\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_n, \omega)$ میانگین پذیر ضعیف باشد، آنگاه ω کراندار است.

برهان: اگر ω یک وزن کراندار باشد، آنگاه $\ell^1(\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_n, \omega)$ با $\ell^1(\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_n)$ یکریخت است و چون $\ell^1(\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_n)$ میانگین‌پذیر ضعیف است پس $\ell^1(\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_n, \omega)$ میانگین‌پذیر ضعیف است. بنابراین حالتی را بررسی می‌کنیم که ω کراندار نباشد و در شرایط قضیه صدق کند، نشان می‌دهیم $\ell^1(\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_n, \omega)$ میانگین‌پذیر ضعیف نیست. با توجه به مطالب گفته شده در بالا، طول x به صورت

$$|x| = \sum_{i=1}^m (|k_i| + |l_i|)$$

و مقدار $\sum_{i=1}^m k_i$ مجموع توان‌های a در x است که با $A(x)$ نشان می‌دهیم. A یک هم‌ریختی پیوسته از $G = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}_n$ به \mathbb{Z} است. با استفاده از قضیه ۲-۲، اگر

$$\sup_{x \in G} \frac{|A(x)|}{\omega(x)\omega(x^{-1})} < \infty$$

آنگاه $\ell^1(\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_n, \omega)$ میانگین‌پذیر ضعیف نیست. حال فرض کنید

$$\sup_{x \in G} \frac{|A(x)|}{\omega(x)\omega(x^{-1})} = \infty.$$

چون واضح است که

$$|A(x)| \leq |x| \text{ و } \omega(x) \geq c_1 g(|x|)$$

پس دو حالت را در نظر می‌گیریم. ابتدا حالت

$$|x| \leq |x^{-1}|$$

را بررسی می‌کنیم، داریم:

$$= \frac{1}{C_2} \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{f(2n+2)}{g(2n+2)},$$

مطابق تعریف ψ داریم:

$$|\psi(xy) - \psi(yx)| = |f(|xy|) - f(|yx|)|.$$

بنابراین کافی است نشان دهیم که:

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{f(2n+1)}{g(2n+1)} = \infty \text{ یا } \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{f(2n+2)}{g(2n+2)} = \infty.$$

فرض کنید $|x| = m$ و $|y| = n$ ، و فرض کنید بدون از دست دادن کلیت $m \geq n$ با استفاده از نامساوی مثلث،

$$m - n = ||x| - |y|| \leq |xy|, \\ |yx| \leq |x| + |y| = m + n.$$

اما این نتیجه مستقیم (۳) است و اثبات کامل است.

تذکر ۴-۵: فرض کنید

$$G = \mathbb{Z}_n * \mathbb{Z}_m$$

چون f افزایشی است پس داریم:

$$|f(|xy|) - f(|yx|)| \\ \leq f(m+n) - f(m-n).$$

با $m, n \in \mathbb{N}$ و ω یک وزن روی G باشد که به صورت زیر تعریف می شود.

$$\omega(x) = \omega(a^{\varepsilon_1} b^{\eta_1} a^{\varepsilon_2} b^{\eta_2} \dots a^{\varepsilon_k} b^{\eta_k}) \\ = (1 + |x|),$$

با استفاده از (۱) و نامعادله $\omega(t) \geq C_1 g(|t|)$ برای هر $t \in \mathbb{Z} * \mathbb{Z}_n$ نامعادله (۳) را با $C = 1/C_1^2$ می دهد:

$$|\psi(xy) - \psi(yx)| \\ = |f(|xy|) - f(|yx|)| \\ \leq f(m+n) - f(m-n) \\ \leq g(m)g(n) \\ = g(|x|)g(|y|) \\ \leq \frac{1}{C_1^2} \omega(x)\omega(y).$$

طول x بصورت $|x| = \sum_{i=1}^k \varepsilon_i + \sum_{i=1}^k \eta_i$ است که $\sum_{i=1}^k \eta_i$ باقیمانده تقسیم $\sum_{i=1}^k \varepsilon_i$ بر n و $\sum_{i=1}^k \varepsilon_i$ باقیمانده تقسیم $\sum_{i=1}^k \eta_i$ بر m می باشد. در این صورت

دید می شود که ω یک وزن کراندار روی G است بنابراین کراندار قطری نیز می باشد. لذا $\ell^1(G, \omega)$ بنابر گزاره ۴-۲ میانگین پذیر ضعیف است.

سرانجام شرط (۲-۲) از لم ۳-۲ را برای تابع ψ بررسی می کنیم. به جای a یا a^2 را قرار می دهیم و کلاس همدمسته $\{xax^{-1}\}_{x \in \mathbb{Z} * \mathbb{Z}_n}$ و $\{xa^2x^{-1}\}_{x \in \mathbb{Z} * \mathbb{Z}_n}$ را در نظر می گیریم:

$$\sup_{y \in G} \frac{|\psi(yay^{-1})|}{\omega(yay^{-1})} \\ \geq \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{|\psi(b^n ab^{-n})|}{\omega(b^n ab^{-n})} \\ \geq \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{f(2n+1)}{C_2 g(2n+1)} \\ = \frac{1}{C_2} \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{f(2n+1)}{g(2n+1)},$$

۹

$$\sup_{y \in G} \frac{|\psi(ya^2y^{-1})|}{\omega(ya^2y^{-1})} \\ \geq \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{|\psi(b^n a^2 b^{-n})|}{\omega(b^n a^2 b^{-n})} \\ \geq \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{f(2n+2)}{C_2 g(2n+2)}$$

۵- نتیجه گیری

یکی از مهمترین مسائل در آنالیز ریاضی میانگین پذیری $\ell^1(G, \omega)$ برای گروه فشرده موضعی G است. ما نشان دادیم که برای گروه گسسته $G = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}_n$ و یک تابع وزن چند جمله ای ω_α جبر برلینگ $\ell^1(G, \omega_\alpha)$ میانگین پذیر ضعیف نیست و گروه دو وجهی $D_\infty = \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ میانگین پذیر است اما $\ell^1(D_\infty, \omega)$ همچنان نشان دادیم که برای یک تابع وزن بیوسته ω روی گروه G جبر برلینگ $\ell^1(G, \omega)$ تحت شرایطی اگر میانگین پذیر ضعیف باشد آنگاه ω کراندار است.

تشکر و قدردانی

از داوران محترم بابت داوری این مقاله کمال تشکر و قدردانی را داریم. این پروژه توسط دانشگاه آزاد اسلامی واحد تهران مرکزی حمایت شده است.

groups, *Studia. Math.* 230 (3) (2015) 189-214.

فهرست منابع

[11] Y. Zhang, Weak amenability of commutative Beurling algebras, *Proc. Amer. Math. Soc.* 142 (2014), 1649-1661.

[1] W. G. Bade, P. C. Curtis Jr, H. G. Dales, Amenability and weak amenability for Beurling and Lipschitz algebras, *Proc. London Math. Soc.* (3) 55 (1987) 359-377.

[۱۲] جواد سعادت‌مندان، علیرضا باقری ثالث، بررسی ارتباط بین وجود بردارهای پذیرفتنی با میانگین‌پذیری و فشردگی یک گروه موضعاً فشرده، مجله پژوهش‌های نوین در ریاضی، سال چهارم، شماره چهاردهم، تابستان ۱۳۹۷، ۱۱۲-۱۰۳.

[2] C. R. Borwick, The Johnson-Hochschild cohomology of weighted group algebras and augmentation ideals, PhD thesis, Univ. of Newcastle upon Tyne, 2003.

[۱۳] مرتضی قربانی، حمیدرضا رحیمی، دو تصویری بودن جبرهای باناخ نسبت به ایده‌آل، مجله پژوهش‌های نوین در ریاضی، سال پنجم، شماره هجدهم، تابستان ۱۳۹۸، ۳۰-۲۱.

[3] N. Grønbæk, A characterization of weakly amenable Banach algebras, *Studia Math.* 94 (2) (1989) 149-162.

[4] N. Grønbæk, Amenability of weighted convolution algebras on locally compact groups, *Trans. Amer. Math. Soc.* 319 (2) (1990) 765-775.

[5] W. Magnus, A. Karrass and D. Solitar, *Combinatorial Group Theory, Presentations of groups in terms of generators and relations.* Dover publications, New York, 1976.

[6] A. Pourabbas, The cohomology of some Banach algebras, PhD thesis, Univ. Of Newcastle upon Tyne, 1996.

[7] A. Pourabbas, Weak amenability of weighted group algebras, *Atti sem. Mat. Fis. Univ. Modena* 48 (2000), 299-316.

[8] H-R. Rahimi, A. Soltani, A note on approximately amenable modulo an ideal of Banach algebras, *J. New Resea. Math.*, Vol. 1, No. 2, Summer 2015 5-12.

[9] E. Samei, Weak amenability and 2-weak amenability of Beurling algebras, *J. Math. Anal. Appl.* 346 (2) (2008) 451-467.

[10] V. Shepelska, Weak amenability of weighted group algebras on some discrete

